















# ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

JOURNAL

HERAUSGEGEBEN

RÉDIGÉ

VON

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

8

167969  
13/12/21

STOCKHOLM

F. & G. BEIJER.

1886.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

BERLIN

MAYER & MÜLLER.  
38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE

PARIS

A. HERMANN.  
5 RUE DE LA SORBONNE



Q  
A2575  
N. 8

## REDACTION

### SVERIGE:

- A. V. BÄCKLUND, Lund.  
H. TH. DAUG, Upsala.  
H. GYLDÉN, Stockholm  
SOPHIE KOWALEVSKI, "  
G. MITTAG-LEFFLER, "

### NORGE:

- C. A. BJERKNES, Christiania.  
O. J. BROCH, "  
S. LIE, "  
L. SYLOW, Fredrikshald.

### DANMARK:

- L. LORENZ, Kjöbenhavn.  
J. PETERSEN, "  
H. G. ZEUTHEN, "

### FINLAND:

- L. LINDELÖF, Helsingfors.

# ACTA MATHEMATICA, 8. 1886.

---

## INHALT. — TABLE DES MATIÈRES.

---

	Seite. Page.
APPELL, P., Sur quelques applications de la fonction $Z(x, y, z)$ à la Physique mathématique .....	265—294
BERTRAND, J., Sur les unités électriques .....	387—392
CASORATI, F., Les fonctions d'une seule variable à un nombre quelconque de périodes. (Premier mémoire) .....	345—359
CASORATI, F., Les lieux fondamentaux des fonctions inverses des intégrales Abéliennes et en particulier des fonctions inverses des intégrales elliptiques de 2 <sup>me</sup> et 3 <sup>me</sup> espèce. (Deuxième mémoire) .....	360—386
HILL, G. W., On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon .....	1— 36
HOLST, E., Beweis des Satzes, dass eine jede algebraische Gleichung eine Wurzel hat .....	155—160
MELLIN, HJ., Zur Theorie der Gammafunction .....	37— 80
NOETHER, M., Über die reductiblen algebraischen Curven .....	161—192
POINCARÉ, H., Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires .....	295—344
SCHUBERT, H., Anzahl-Bestimmungen für lineare Räume beliebiger Dimension .....	97—118
STAUDE, O., Über hyperelliptische Integrale zweiter und dritter Gattung .....	81— 92
STENBERG, E. A., Einige Eigenschaften der linearen und homogenen Differentialgleichungen .....	119—154
STERN, M. A., Sur un théorème de M. Hermite relatif à la fonction $E(x)$ .....	93— 96
WEBER, H., Theorie der Abel'schen Zahlkörper .....	193—263
I. Abel'sche Körper und Kreiskörper. II. Über die Anzahl der Idealeklassen und die Einheiten in den Kreiskörpern, deren Ordnung eine Potenz von 2 ist. III. Der Kronecker'sche Satz.	
<hr/>	
Preisaufgabe der fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft für das Jahr 1889 .....	264

## ERRATUM.

The first equation of p. 5 of this volume should be

$$\lambda = \sqrt{JFG} w$$

instead of

$$\frac{d\rho}{dt} = \sqrt{JFG}.$$

---

## CORRECTION.

Mon mémoire: *Sur quelques conséquences arithmétiques des formules de la théorie des fonctions elliptiques*, publié dans le tome 5 des Acta Mathematica, contient à la fin du § V, p. 315, la formule suivante:

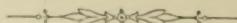
$$\begin{aligned} & E_2\left(x + \frac{1}{m}\right) + 2E_2\left(x + \frac{2}{m}\right) + \dots + (m-1)E_2\left(x + \frac{m-1}{m}\right) \\ & + E_2\left(x - \frac{1}{m}\right) + 2E_2\left(x - \frac{2}{m}\right) + \dots + (m-1)E_2\left(x - \frac{m-1}{m}\right) \\ & = E_2(mx) - mE_2(x). \end{aligned}$$

M. STERN m'a fait la remarque qu'elle a été écrite inexactement et qu'on doit la remplacer par celle-ci:

$$\begin{aligned} & (m-1)E_2\left(x + \frac{1}{m}\right) + (m-2)E_2\left(x + \frac{2}{m}\right) + \dots + E_2\left(x + \frac{m-1}{m}\right) \\ & + (m-1)E_2\left(x - \frac{1}{m}\right) + (m-2)E_2\left(x - \frac{2}{m}\right) + \dots + E_2\left(x - \frac{m-1}{m}\right) \\ & = E_2(mx) - mE_2(x). \end{aligned}$$

Paris, 19 Mars 1886.

Ch. Hermite.



ON THE PART OF THE  
MOTION OF THE LUNAR PERIGEE  
WHICH IS A FUNCTION OF THE  
MEAN MOTIONS OF THE SUN AND MOON<sup>1</sup>

BY

G. W. HILL  
in WASHINGTON.

For more than sixty years after the publication of the *Principia*, astronomers were puzzled to account for the motion of the lunar perigee, simply because they could not conceive that terms of the second and higher orders, with respect to the disturbing force, produced more than half of it. For a similar reason, the great inequalities of Jupiter and Saturn remained a long time unexplained.

The rate of motion of the lunar perigee is capable of being determined from observation with about a thirteenth of the precision of the rate of mean motion in longitude. Hence, if we suppose that the mean motion of the moon, in the century and a quarter which has elapsed since BRADLEY began to observe, is known within 3", it follows that the motion of the perigee can be got to within about the 500,000<sup>th</sup> of the whole. None of the values hitherto computed from theory agrees as closely as this with the value derived from observation. The question then arises whether the discrepancy should be attributed to the fault of not having carried the approximation far enough, or is indicative of forces acting on the moon which have not yet been considered.

<sup>1</sup> Reprinted, with some additions, from a paper published at Cambridge U. S. A., 1877.

This question cannot be decisively answered until some method of computing the quantity considered is employed, which enables us to say, with tolerable security, that the neglected terms do not exceed a certain limit. If other forces besides gravity have a part in determining the positions of the heavenly bodies, the moon is unquestionably that one which will earliest exhibit traces of these actions; and the motion of the perigee is one of the things most likely to give us advice of them. Hence I propose, in this memoir, to compute the value of this quantity, so far as it depends on the mean motions of the sun and moon, with a degree of accuracy that shall leave nothing further to be desired.

## I.

Denoting the potential function by  $\Omega$ , the differential equations of motion of the moon, in rectangular coördinates, are

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\Omega}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d\Omega}{dy},$$

When terms, involving the solar eccentricity, are neglected, as is done here, it is known that these equations admit an integral,<sup>1</sup> the Eulerian multipliers for which are, respectively,

$$F = \frac{dx}{dt} + n'y, \quad G = \frac{dy}{dt} - n'x,$$

$n'$  being the mean angular motion of the sun. When the equations are multiplied by these factors and the products added, it is seen that, not only is the resulting first member an exact derivative with respect to  $t$ , but that the second is also the exact derivative of  $\Omega$ . Hence the integral is

$$(2) \quad \frac{dx^2 + dy^2}{2dt^2} - n' \frac{xdy - ydx}{dt} = \Omega + C.$$

<sup>1</sup> As JACOBI was the first to announce this integral (*Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris*, Tome III, p. 59), we shall take the liberty of calling it the Jacobian integral.

Let us now suppose that the lunar inequalities independent of the eccentricity, that is, those having the argument of the variation, have already been obtained, and that it is desired to get those which are multiplied by the simple power of this quantity. Denoting the latter by  $\delta x$  and  $\delta y$ , and, for convenience, putting

$$\frac{d^2\Omega}{dx^2} = H, \quad \frac{d^2\Omega}{dxdy} = J, \quad \frac{d^2\Omega}{dy^2} = K,$$

which will be all known functions of  $t$ , we shall have the linear differential equations

$$(3) \quad \frac{d^2\delta x}{dt^2} = H\delta x + J\delta y, \quad \frac{d^2\delta y}{dt^2} = K\delta y + J\delta x.$$

The Jacobian integral also, being subjected to the operation  $\delta$ , furnishes another equation. Here we notice that when the arbitrary constant  $C$  is developed in ascending powers of  $e$ , only even powers present themselves, hence we have  $\delta C = 0$ . In the equation, moreover, the partial derivatives of  $\Omega$  may be replaced by their equivalents, the second differential quotients of the coördinates. Then, it is evident, the resulting equation may be written

$$(4) \quad F \frac{d\delta x}{dt} + G \frac{d\delta y}{dt} - \frac{dF}{dt} \delta x - \frac{dG}{dt} \delta y = 0.$$

This is plainly an integral of equations (3) with the special value 0 attributed to the arbitrary constant. For taking the derivative of it with respect to  $t$ ,

$$(5) \quad F \frac{d^2\delta x}{dt^2} + G \frac{d^2\delta y}{dt^2} - \frac{d^2F}{dt^2} \delta x - \frac{d^2G}{dt^2} \delta y = 0.$$

Hence the Eulerian multipliers, for obtaining (4) from (3), are, for the first equation,  $F$ , and for the second,  $G$ . Making the multiplication and comparing the result with (5), we get the conditions

$$(6) \quad \frac{d^2F}{dt^2} = HF + JG, \quad \frac{d^2G}{dt^2} = KG + JF.$$

On comparing these with (3), we gather at once that the system of equations

$$\delta x = F, \quad \delta y = G,$$

is a particular solution of equations (3); and it also satisfies (4). This solution, being composed of terms having the same argument as the variation, is foreign to the solution we seek, and, in consequence, the arbitrary constant, multiplying it in the complete integrals of (3), must, for our problem, be supposed to vanish. But advantage may be taken of it to depress the order of the final equation obtained by elimination. For this purpose we adopt new variables  $\rho$  and  $\sigma$ , such that

$$\delta x = F\rho, \quad \delta y = G\sigma.$$

Relations (6) being considered, (3) and (4) then become

$$F \frac{d^2\rho}{dt^2} + 2 \frac{dF}{dt} \frac{d\rho}{dt} + JG(\rho - \sigma) = 0,$$

$$G \frac{d^2\sigma}{dt^2} + 2 \frac{dG}{dt} \frac{d\sigma}{dt} + JF(\sigma - \rho) = 0,$$

$$F^2 \frac{d\rho}{dt} + G^2 \frac{d\sigma}{dt} = 0.$$

Write the first equation

$$\frac{d}{dt} \left( F^2 \frac{d\rho}{dt} \right) + JFG(\rho - \sigma) = 0,$$

and adopt a new variable  $\lambda$  such that

$$\frac{d\rho}{dt} = F^{-2}\lambda, \quad \frac{d\sigma}{dt} = -G^{-2}\lambda.$$

If these values are substituted in the equation after dividing by  $JFG$  and differentiating it, we get

$$(7) \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{JFG} \frac{d\lambda}{dt} \right] + \left[ \frac{1}{F^2} + \frac{1}{G^2} \right] \lambda = 0.$$

Let us now assume a variable  $w$  such that

$$\frac{d\rho}{dt} = \sqrt{JFG}. \quad \text{NOTE ERRATUM}$$

The second term of (7) is removed by this transformation, and the equation takes the form of the reduced linear equation of the second order,

$$(8) \quad \frac{d^2w}{dt^2} + \theta w = 0,$$

in which, after some reductions,

$$(9) \quad \theta = \frac{J(F^2 + G^2)}{FG} + \frac{d^2 \log(JFG)}{2dt^2} - \left[ \frac{d \log(JFG)}{2dt} \right]^2.$$

It will be perceived that interchanging  $F$  and  $G$  produces no change in  $\theta$ : hence had we eliminated  $\rho$  instead of  $\sigma$ , the equation obtained would have been the same; and this is true in general, — we arrive always at the same value for  $\theta$ , no matter what variables may have been used to express the original differential equations. From this we may conclude that  $\theta$  depends only on the relative position of the moon with reference to the sun, and that it can be developed in a periodic series of the form

$$\theta_0 + \theta_1 \cos 2\tau + \theta_2 \cos 4\tau + \dots,$$

in which  $\tau$  denotes the mean angular distance of the two bodies.

It may be noted also that  $\theta$ , as expressed above, does not involve the quantities  $H$  and  $K$ . It is obvious that, by means of the original differential equations, all second and higher derivatives may be eliminated from this expression, and that the Jacobian integral suffices for eliminating the first derivative of one of the variables. But it is not possible to express  $\theta$  as a function of the coördinates only without their derivatives.

## II.

As the reduction of  $\theta$ , in the form just given, presents some difficulties, we will derive another from differential equations in terms of coördinates expressing the relative position of the moon to the sun.

Let the axes of rectangular coördinates have a constant velocity of rotation, so that the axis of  $x$  constantly passes through the centre of the sun, and adopt the imaginary variables

$$u = x + y\sqrt{-1}, \quad s = x - y\sqrt{-1},$$

and put  $e^{\tau\sqrt{-1}} = \zeta$ . In addition, let  $D$  denote the operation  $-\frac{d}{d\tau}\sqrt{-1}$ , so that

$$D(\alpha\zeta) = \nu\alpha\zeta,$$

and  $m$  denote the ratio of the synodic month to the sidereal year, or

$$m = \frac{n'}{n - n'},$$

and  $\mu$  being the sum of the masses of the earth and moon,

$$\chi = \frac{\mu}{(n - n')^2}.$$

Lastly, putting

$$(10) \quad Q = \frac{\chi}{\sqrt{us}} + \frac{3}{8}m^2(u + s)^2,$$

the differential equations of motion are

$$(11) \quad \begin{cases} D^2u + 2mDu + 2\frac{dQ}{ds} = 0, \\ D^2s - 2mDs + 2\frac{dQ}{du} = 0. \end{cases}$$

Multiplying the first of these by  $Ds$ , the second by  $Du$ , adding the products and integrating the resulting equation, we have the Jacobian integral

$$DuDs + 2Q = 2C.$$

When the last three equations are subjected to the operation  $\delta$ , the results are

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} D^2\delta u + 2mD\delta u + 2\frac{d^2\Omega}{duds}\delta u + 2\frac{d^2\Omega}{ds^2}\delta s = 0, \\ D^2\delta s - 2mD\delta s + 2\frac{d^2\Omega}{duds}\delta s + 2\frac{d^2\Omega}{du^2}\delta u = 0, \\ DuD\delta s + DsD\delta u + 2\frac{d\Omega}{du}\delta u + 2\frac{d\Omega}{ds}\delta s = 0. \end{array} \right.$$

If, in these equations, the symbol  $\delta$  is changed into  $D$ , they evidently still hold, since they then become the derivatives of the preceding equations. Hence the system of equations

$$\delta u = Du, \quad \delta s = Ds,$$

forms a particular solution of them. For a like purpose as before, let us adopt new variables  $v$  and  $w$ , such that

$$\delta u = Du \cdot v, \quad \delta s = Ds \cdot w.$$

In terms of these, equations (12) become

$$Du \cdot D^2v + 2[D^2u + mDu]Dv + \left[ D^3u + 2mD^2u + 2\frac{d^2\Omega}{duds}Du \right]v + 2\frac{d^2\Omega}{ds^2}Ds \cdot w = 0,$$

$$Ds \cdot D^2w + 2[D^2s - mDs]Dw + \left[ D^3s - 2mD^2s + 2\frac{d^2\Omega}{duds}Ds \right]w + 2\frac{d^2\Omega}{du^2}Du \cdot v = 0,$$

$$DuDs \cdot D(v + w) + \left[ DsD^2u + 2\frac{d\Omega}{du}Du \right]v + \left[ DuD^2s + 2\frac{d\Omega}{ds}Ds \right]w = 0.$$

If the second and third derivatives of  $u$  and  $s$  are eliminated from these equations by means of equations (11), we get

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} Du \cdot D^2v - 2\left[ 2\frac{d\Omega}{ds} + mDu \right]Dv - 2\frac{d^2\Omega}{ds^2}Ds \cdot (v - w) = 0, \\ Ds \cdot D^2w - 2\left[ 2\frac{d\Omega}{du} - mDs \right]Dw - 2\frac{d^2\Omega}{du^2}Du \cdot (w - v) = 0, \\ DuDs \cdot D(v + w) - 2\left[ \frac{d\Omega}{ds}Ds - \frac{d\Omega}{du}Du + mDuDs \right](v - w) = 0. \end{array} \right.$$

If the first of these equations is multiplied by  $Ds$ , the second by  $Du$ , and the products added, the resulting equation will evidently be the derivative of the third; but if the products are subtracted, the second from the first, we get

$$\begin{aligned} & DuDs \cdot D^2(v - w) - 2D\Omega \cdot D(v - w) \\ & - 2 \left[ \frac{d\Omega}{ds} Ds - \frac{d\Omega}{du} Du + mDuDs \right] D(v - w) - 2 \left[ \frac{d^2\Omega}{du^2} Du^2 + \frac{d^2\Omega}{ds^2} Ds^2 \right] (v - w) = 0. \end{aligned}$$

For brevity we will write

$$\Delta = \frac{d\Omega}{ds} Ds - \frac{d\Omega}{du} Du + mDuDs,$$

and put

$$\rho = v + w, \quad \sigma = v - w,$$

then the last two equations, which will be those employed for the solution of the problem, become

$$(14) \quad \left| \begin{array}{l} DuDs \cdot D\rho - 2\Delta \cdot \sigma = 0, \\ D[DuDs \cdot D\sigma] - 2\Delta \cdot D\rho - 2 \left[ \frac{d^2\Omega}{du^2} Du^2 + \frac{d^2\Omega}{ds^2} Ds^2 \right] \sigma = 0. \end{array} \right.$$

Eliminating  $D\rho$  between these equations, a single equation, involving only the unknown  $\sigma$ , is obtained,

$$(15) \quad D[DuDs \cdot D\sigma] - 2 \left[ \frac{d^2\Omega}{du^2} Du^2 + \frac{d^2\Omega}{ds^2} Ds^2 + \frac{2\Delta^2}{DuDs} \right] \sigma = 0.$$

In order to remove the term involving  $D\sigma$ , a last transformation will be made; we put

$$\sigma = \frac{\mathbf{w}}{\sqrt{DuDs}}.$$

Then the differential equation, determining  $\mathbf{w}$ , is

$$D^2\mathbf{w} = \theta\mathbf{w},$$

in which

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{2}{DuDs} \left[ \frac{d^2\Omega}{du^2} Du^2 + \frac{d^2\Omega}{ds^2} Ds^2 \right] + \left( \frac{2\Delta}{DuDs} \right)^2 + \frac{D^2(DuDs)}{2DuDs} - \left[ \frac{D(DuDs)}{2DuDs} \right]^2 \\ &= \frac{2}{DuDs} \left[ \frac{d^2\Omega}{du^2} Du^2 + \frac{d^2\Omega}{ds^2} Ds^2 \right] + \left( \frac{2\Delta}{DuDs} \right)^2 - \frac{D^2\Omega}{DuDs} - \left[ \frac{D\Omega}{DuDs} \right]^2.\end{aligned}$$

But we have

$$D\Omega = \frac{d\Omega}{du} Du + \frac{d\Omega}{ds} Ds,$$

$$D^2\Omega = \frac{d^2\Omega}{du^2} Du^2 + 2 \frac{d^2\Omega}{duds} DuDs + \frac{d^2\Omega}{ds^2} Ds^2 + 2m\Delta - 2m^2 DuDs - 4 \frac{d\Omega}{du} \frac{d\Omega}{ds},$$

in which, from the latter equation, have been eliminated the second derivatives of  $u$  and  $s$ , by means of their values obtained from equations (11). From these is obtained

$$D^2\Omega + \frac{[D\Omega]^2}{DuDs} = \frac{d^2\Omega}{du^2} Du^2 + 2 \frac{d^2\Omega}{duds} DuDs + \frac{d^2\Omega}{ds^2} Ds^2 + \frac{\Delta^2}{DuDs} - m^2 DuDs,$$

on substitution of which in the value of  $\theta$ , there results

$$(16) \quad \theta = \frac{1}{DuDs} \left[ \frac{d^2\Omega}{du^2} Du^2 - 2 \frac{d^2\Omega}{duds} DuDs + \frac{d^2\Omega}{ds^2} Ds^2 \right] + 3 \left( \frac{\Delta}{DuDs} \right)^2 + m^2.$$

The partial derivatives of  $\Omega$ , involved in this expression, have the values

$$\frac{d\Omega}{du} = -\frac{1}{2} \frac{x}{r^5} s + \frac{3}{4} m^2(u+s),$$

$$\frac{d\Omega}{ds} = -\frac{1}{2} \frac{x}{r^5} u + \frac{3}{4} m^2(u+s),$$

$$\frac{d^2\Omega}{du^2} = -\frac{3}{4} \frac{x}{r^5} s^2 + \frac{3}{4} m^2,$$

$$\frac{d^2\Omega}{duds} = -\frac{1}{4} \frac{x}{r^5} + \frac{3}{4} m^2,$$

$$\frac{d^2\Omega}{ds^2} = -\frac{3}{4} \frac{x}{r^5} u^2 + \frac{3}{4} m^2.$$

where, for  $us$ , has been written  $r^2$ , the square of the moon's radius vector. After the substitution of these, it will be found that we can write

$$(17) \quad \theta = \frac{z}{r^3} + \frac{3}{8} \frac{\frac{z}{r^5} [uD_s - sDu]^2 + m^2(Du - Ds)^2}{C - Q} + \frac{3}{4} \left[ \frac{\Delta}{C - Q} \right]^2 + m^2,$$

in which

$$\Delta = \left[ -\frac{1}{2} \frac{z}{r^3} + \frac{3}{4} m^2 \right] [uD_s - sDu] - \frac{3}{4} m^2 (uD_u - sDs) + 2m(C - Q).$$

This expression for  $\theta$ , from which all derivatives of  $u$  and  $s$ , higher than the first, have been eliminated whenever they presented themselves, is suitable for development in infinite series, when the method of special values is employed. The quadrant being divided into a certain number of equal parts with reference to  $\tau$ , we compute the values of the four variables  $u$ ,  $s$ ,  $Du$ , and  $Ds$  of which  $\theta$  is a function, for these special values of  $\tau$ , and by substitution ascertain the corresponding values of  $\theta$ . From the last, by the wellknown process, are derived the several coefficients of the periodic terms of  $\theta$ . A discussion of the lunar inequalities, which are independent of every thing but the parameter  $m$ , shows that the values of  $u$  and  $s$  have the form

$$u = \sum_i a_i \zeta^{2i+1}, \quad s = \sum_i a_i \zeta^{-2i-1},$$

where  $i$  receives all integral values from  $-\infty$  to  $+\infty$ , zero included, and the coefficients  $a_i$  are constant, being equivalent each to the same constant multiplied by a function of  $m$  which is of the  $2i^{\text{th}}$  order with respect to this parameter.

By taking the derivatives

$$Du = \sum_i (2i+1) a_i \zeta^{2i+1}, \quad Ds = - \sum_i (2i+1) a_i \zeta^{-2i-1}.$$

It will be seen from these equations that, in the terms where  $i$  is large, we will be subjected to the inconvenience of having the errors, with which the coefficients  $a_i$  are necessarily affected, multiplied by large numbers.

This will be avoided by employing, in the computation of  $\theta$ , the formula

$$uD_s - sDu = 2\mathbf{m}r^2 - \frac{3}{2}\mathbf{m}^2 D^{-1}(u^2 - s^2),$$

where  $D^{-1}$  denotes the inverse operation of  $D$ . This does not give the constant term of  $uD_s - sDu$ , but this can be obtained from the expression

$$- 2 \sum_i (2i+1) \mathbf{a}_i^2,$$

which is not subject to the difficulty mentioned above. Wherever  $Du$  and  $Ds$  occur elsewhere in the formula for  $\theta$ , they are multiplied by the small factor  $\mathbf{m}^2$ , and, in consequence, the given formulae suffice.

This mode of proceeding will give only a numerical result: if we wish to have  $\mathbf{m}$  left indeterminate in the development of  $\theta$ , it will be advantageous to give the latter another form. In this case there is no objection to the appearance of second and third derivatives of  $u$  and  $s$  in the expression of  $\theta$ .

From the value of  $D^2\mathcal{Q}$ , previously given, it is easy to conclude that

$$\begin{aligned} & \frac{2}{DuDs} \left[ \frac{d^2\mathcal{Q}}{du^2} Du^2 + \frac{d^2\mathcal{Q}}{ds^2} Ds^2 \right] \\ &= -4 \frac{d^2\mathcal{Q}}{duds} - 2 \left( \frac{\Delta}{DuDs} \right)^2 + 2\mathbf{m}^2 - \frac{D^2(DuDs)}{DuDs} + \frac{1}{2} \left| \frac{D(DuDs)}{DuDs} \right|^2. \end{aligned}$$

If this is substituted in the expression first given for  $\theta$ , and we note that

$$4 \frac{d^2\mathcal{Q}}{duds} = \frac{z}{r^3} + 3\mathbf{m}^2,$$

$$\Delta = \frac{1}{2} [DuD^2s - DsD^2u] - \mathbf{m}DuDs,$$

the latter being obtained by substituting in the previously given value of  $\Delta$ , the values of the partial derivatives of  $\mathcal{Q}$  given by equations (11), we get

$$\begin{aligned} (18) \quad \theta = & - \left[ \frac{z}{r^3} + \mathbf{m}^2 \right] + 2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{D^2u}{Du} - \frac{D^2s}{Ds} \right) + \mathbf{m} \right]^2 \\ & - \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{D^2u}{Du} + \frac{D^2s}{Ds} \right) \right]^2 - D \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{D^2u}{Du} + \frac{D^2s}{Ds} \right) \right]. \end{aligned}$$

For the development of the first term of this expression, we can employ either of the following equations which result from equations (11),

$$\frac{z}{r^3} + m^2 = \frac{D^2 u + 2mDu + \frac{3}{2}m^2 s}{u} + \frac{5}{2}m^2$$

$$= \frac{D^2 s - 2mDs + \frac{3}{2}m^2 u}{s} + \frac{5}{2}m^2,$$

which, if one studies symmetry of expression, may be written

$$\begin{aligned} \frac{z}{r^3} + m^2 &= \left[ \frac{Du}{u} + m \right]^2 + D \left[ \frac{Du}{u} + m \right] + \frac{3}{2}m^2 \left[ 1 + \frac{s}{u} \right] \\ &= \left[ \frac{Ds}{s} - m \right]^2 + D \left[ \frac{Ds}{s} - m \right] + \frac{3}{2}m^2 \left[ 1 + \frac{u}{s} \right]; \end{aligned}$$

and if half the sum of the second members is substituted for the first term in (18) we shall have a singularly symmetrical expression for  $\theta$ .

If the values of  $u$  and  $s$  in terms of  $\zeta$  are substituted in the first of these equations, we get

$$\frac{z}{r^3} + m^2 = 1 + 2m + \frac{5}{2}m^2 + \frac{\sum_i [4i(i+1+m)a_i + \frac{3}{2}m^2 a_{-i-1}] \zeta^{2i}}{\sum_i a_i \zeta^{2i}}.$$

Let the last term of the second member of this equation be denoted by the series

$$\sum_i R_i \zeta^{2i};$$

since  $r$  is a series of cosines, we must have, in consequence of the equations of condition which the  $a_i$  satisfy,  $R_{-i} = R_i$ , and the equations, which determine these coefficients, can be obtained from the formula

$$\sum_j a_{i-j} R_j = 4i(i+1+m)a_i + \frac{3}{2}m^2 a_{-i-1},$$

when we attribute to  $i$ , in succession, all integral values from  $i=0$  to  $i=\infty$ , or which is preferable, from  $i=0$  to  $i=-\infty$ . The following

are all the equations and terms which need be retained when it is proposed to neglect quantities of the same order of smallness as  $\mathbf{m}^{10}$ ;

$$\mathbf{a}_0 R_0 + (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_{-1}) R_1 + (\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_{-2}) R_2 = \frac{3}{2} \mathbf{m}^2 \mathbf{a}_{-1},$$

$$\mathbf{a}_{-1} R_0 + (\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_{-2}) R_1 + \mathbf{a}_1 R_2 = -4\mathbf{m}\mathbf{a}_{-1} + \frac{3}{2} \mathbf{m}^2 \mathbf{a}_0,$$

$$\mathbf{a}_{-2} R_0 + (\mathbf{a}_{-1} + \mathbf{a}_{-3}) R_1 + \mathbf{a}_0 R_2 + \mathbf{a}_1 R_3 = 8(1 - \mathbf{m})\mathbf{a}_{-2} + \frac{3}{2} \mathbf{m}^2 \mathbf{a}_1,$$

$$\mathbf{a}_{-2} R_1 + \mathbf{a}_{-1} R_2 + \mathbf{a}_0 R_3 = 12(2 - \mathbf{m})\mathbf{a}_{-3} + \frac{3}{2} \mathbf{m}^2 \mathbf{a}_2,$$

$$\mathbf{a}_{-3} R_1 + \mathbf{a}_{-2} R_2 + \mathbf{a}_{-1} R_3 + \mathbf{a}_0 R_4 = 16(3 - \mathbf{m})\mathbf{a}_{-4} + \frac{3}{2} \mathbf{m}^2 \mathbf{a}_3.$$

For the purpose of illustrating the present method, we content ourselves with giving the following approximate formula: —

$$\begin{aligned} & \frac{\zeta}{r^3} + \mathbf{m}^2 \\ &= 1 + 2\mathbf{m} + \frac{5}{2} \mathbf{m}^2 - \frac{3}{2} \mathbf{m}^2 \mathbf{a}_1 + 4\mathbf{m}\mathbf{a}_{-1}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_{-1}) + \left[ \frac{3}{2} \mathbf{m}^2 - 4\mathbf{m}\mathbf{a}_{-1} \right] (\zeta^2 + \zeta^{-2}) \\ & \quad + \left[ 8(1 - \mathbf{m})\mathbf{a}_{-2} + \frac{3}{2} \mathbf{m}^2(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_{-1}) + 4\mathbf{m}\mathbf{a}_{-1}^2 \right] (\zeta^4 + \zeta^{-4}), \end{aligned}$$

where, for convenience in writing, it has been assumed that  $\mathbf{a}_0 = 1$ , and consequently that  $\mathbf{a}_i$  denotes here the ratio to  $\mathbf{a}_0$ , which, as has been mentioned above, is a function of  $\mathbf{m}$ . The absolute term and the coefficient of  $\zeta^4 + \zeta^{-4}$  are affected with errors of the eighth order, while the coefficient of  $\zeta^2 + \zeta^{-2}$  is affected with one of the sixth order.

We attend now to the remaining terms of  $\theta$ . If we put

$$\frac{D^2 u}{Du} = \frac{\sum_i (2i+1)^2 \mathbf{a}_i \zeta^{2i}}{\sum_i (2i+1) \mathbf{a}_i \zeta^{2i}} = \sum_i U_i \zeta^{2i},$$

it is plain that we shall have

$$\frac{D^2 s}{Ds} = -\frac{\sum_i (2i+1)^2 \mathbf{a}_i \zeta^{-2i}}{\sum_i (2i+1) \mathbf{a}_i \zeta^{-2i}} = -\sum_i U_i \zeta^{-2i},$$

and in consequence,

$$\frac{1}{2} \left( \frac{D^2 u}{Du} - \frac{D^2 s}{Ds} \right) = \sum_i \frac{1}{2} (U_i + U_{-i}) \zeta^{2i},$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{D^2 u}{Du} + \frac{D^2 s}{Ds} \right) = \sum_i \frac{1}{2} (U_i - U_{-i}) \zeta^{2i}.$$

From this it will be seen that the development of  $\frac{D^2 u}{Du}$  will suffice for obtaining all the remaining terms of  $\theta$ . Let us put

$$h_i = (2i + 1) a_i.$$

The equations which determine the coefficients  $U_i$  are given by the formula

$$\sum_j h_{i-j} U_j = (2i + 1) h_i,$$

but, in order to exhibit some of their properties, I write a few, *in extenso*, thus:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dots + h_0 U_{-2} + h_{-1} U_{-1} + h_{-2} (U_0 - 1) + h_{-3} U_1 + h_{-4} U_2 + \dots = -4h_{-2}, \\ \dots + h_1 U_{-2} + h_0 U_{-1} + h_{-1} (U_0 - 1) + h_{-2} U_1 + h_{-3} U_2 + \dots = -2h_{-1}, \\ \dots + h_2 U_{-2} + h_1 U_{-1} + h_0 (U_0 - 1) + h_{-1} U_1 + h_{-2} U_2 + \dots = 0, \\ \dots + h_3 U_{-2} + h_2 U_{-1} + h_1 (U_0 - 1) + h_0 U_1 + h_{-1} U_2 + \dots = 2h_1, \\ \dots + h_4 U_{-2} + h_3 U_{-1} + h_2 (U_0 - 1) + h_1 U_1 + h_0 U_2 + \dots = 4h_2, \\ \dots \end{array} \right.$$

When the subscripts of both the  $h$  and  $U$  in these equations are negated, and the signs of the right-hand members reversed, the system of equations is the same as before. Hence, if we have found the value of  $U_i$ , which is a function of the  $h$ , the value of  $U_{-i}$  will be got from it by simply negativing the subscripts of all the  $h$  involved in it and reversing the sign of the whole expression. When this operation is applied to the particular unknown  $U_0 - 1$ , we get the condition

$$U_0 - 1 = -(U_0 - 1);$$

whence we have, rigorously,

$$U_0 = 1.$$

This result can also be established by the aid of a definite integral. The absolute term, in the development of  $\frac{D^{\nu+1}u}{D^\nu u}$  in powers of  $\zeta$ , is given by the definite integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{D^{\nu+1}u}{D^\nu u} d\tau = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{d^{\nu+1}u}{d\tau^{\nu+1}}}{\frac{d^\nu u}{d\tau^\nu}} d\tau.$$

The indefinite integral of the expression under the sign of integration is

$$\log \frac{d^\nu u}{d\tau^\nu} = \log \left[ \frac{d^\nu x}{d\tau^\nu} + \frac{d^\nu y}{d\tau^\nu} \sqrt{-1} \right],$$

and if, for the moment, we take  $\rho$  and  $\varphi$  such that

$$\frac{d^\nu x}{d\tau^\nu} = \rho \cos \varphi, \quad \frac{d^\nu y}{d\tau^\nu} = \rho \sin \varphi,$$

this integral takes the shape

$$\log \rho + \varphi \sqrt{-1}.$$

The first term of this has the same value for  $\tau = 0$  and  $\tau = 2\pi$ , and consequently contributes nothing to the value of the definite integral. Thus we have

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{D^{\nu+1}u}{D^\nu u} d\tau = \frac{1}{2\pi} [\varphi]_{0}^{2\pi}.$$

When  $\tau = 0$ , let  $\varphi$  be assumed between  $0$  and  $2\pi$ : it will be found that  $\varphi$  has the value  $0$  or  $\frac{\pi}{2}$  or  $\pi$  or  $\frac{3}{2}\pi$  according as  $\nu$  is of the form  $4\mu$  or  $4\mu + 1$  or  $4\mu + 2$  or  $4\mu + 3$ . Moreover, when  $\tau$  augments,  $\varphi$  also

augments, and when  $\tau$  has passed over one circumference,  $\varphi$  has also augmented by a circumference. Hence

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{D^{\nu+1}u}{D^\nu u} d\tau = 1.$$

It follows, therefore, that  $\nu$  denoting zero or a positive integer, the absolute term of the development of  $\frac{D^{\nu+1}u}{D^\nu u}$  in integral powers of  $\zeta$  is 1.

And, in like manner, the absolute term of  $\frac{D^{\nu+1}s}{D^\nu s}$  is -1.

Equations (19) are readily solved by successive approximations, and when terms of the tenth order are neglected, we can write

$$\begin{aligned} \frac{D^2u}{Du} &= 1 + 2[h_1 - h_{-1}h_2 + h_1h_{-1}h_{-1}]\zeta^2 \\ &\quad - 2[h_{-1} - h_1h_{-2} + h_{-1}h_{-1}h_1]\zeta^{-2} \\ &\quad + 2[2h_2 - h_1h_1 - 2h_{-1}h_3 + 4h_1h_{-1}h_2 - 2h_1h_1h_{-1}]\zeta^4 \\ &\quad - 2[2h_{-2} - h_{-1}h_{-1} - 2h_1h_{-3} + 4h_{-1}h_1h_{-2} - 2h_{-1}h_{-1}h_{-1}h_1]\zeta^{-4} \\ &\quad + 2[3h_3 - 3h_1h_2 + h_1h_{-1}h_1]\zeta^6 \\ &\quad - 2[3h_{-3} - 3h_{-1}h_{-2} + h_{-1}h_{-1}h_{-1}]\zeta^{-6} \\ &\quad + 2[4h_4 - 4h_1h_3 + 4h_1h_1h_2 - 2h_2h_2 - h_1h_1h_1h_1]\zeta^8 \\ &\quad - 2[4h_{-4} - 4h_{-1}h_{-3} + 4h_{-1}h_{-1}h_{-2} - 2h_{-2}h_{-2} - h_{-1}h_{-1}h_{-1}h_{-1}]\zeta^{-8}, \end{aligned}$$

where we have supposed again that  $h_0 = a_0 = 1$ .

With the same degree of approximation we have used for  $\frac{x}{r^3} + m^2$ ,  $\theta$  can be written

$$\begin{aligned} \theta &= 1 + 2m - \frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m^2a_1 + 54a_1^2 + (12 - 4m)a_1a_{-1} + (6 - 4m)a_{-1}^2 \\ &\quad + \left[ (6 + 12m)a_1 + (6 + 8m)a_{-1} - \frac{3}{2}m^2 \right] (\zeta^2 + \zeta^{-2}) \\ &\quad + \left[ 20ma_2 + (16 + 20m)a_{-2} - (9 + 40m)a_1^2 + 6a_1a_{-1} \right. \\ &\quad \left. + (7 + 4m)a_{-1}^2 - \frac{3}{2}m^2(a_1 - a_{-1}) \right] (\zeta^4 + \zeta^{-4}). \end{aligned}$$

In the determination of the terms of the lunar coördinates which depend only on the parameter  $m$ , it has been found<sup>1</sup> that, with errors of the sixth order,

$$a_1 = \frac{3}{16} \frac{6 + 12m + 9m^2}{6 - 4m + m^2} m^2,$$

$$a_{-1} = -\frac{3}{16} \frac{38 + 28m + 9m^2}{6 - 4m + m^2} m^2,$$

and, with errors of the eighth order,

$$a_2 = \frac{27}{256} \frac{2 + 4m + 3m^2}{[6 - 4m + m^2][30 - 4m + m^2]} \left[ 238 + 40m + 9m^2 - 32 \frac{29 - 35m}{6 - 4m + m^2} \right] m^4.$$

$$a_{-2} = \frac{27}{64} \frac{2 + 4m + 3m^2}{[6 - 4m + m^2][30 - 4m + m^2]} \left[ -28 - 7m + 24 \frac{7 - m}{6 - 4m + m^2} \right] m^4.$$

No use will be made of these formulæ in the sequel of this memoir: they are given only that we may at need easily deduce an approximate literal expansion for the important function  $\theta$ .

### III.

In the preceding discussion it has been established that the determination of the lunar inequalities, which have the simple power of the eccentricity as factor, depends on the integration of the linear differential equation

$$D^2w = \theta w;$$

to the treatment of which we accordingly proceed. We assume that the development of  $\theta$ , in a series of the form

$$\theta = \sum_i \theta_i \zeta^{2i},$$

has been obtained. Here we have the condition  $\theta_{-i} = \theta_i$ . If  $\theta_1, \theta_2, \text{etc.}$

<sup>1</sup> These expressions are established in another memoir. See American Journal of Mathematics, Vol. I, p. 138.

are, to a considerable degree, smaller than  $\theta_0$ , an approximate statement of the equation is

$$D^2\mathbf{w} = \theta_0 \mathbf{w};$$

the complete integral of which is

$$\mathbf{w} = K\zeta^c + K'\zeta^{-c},$$

$K$  and  $K'$  being the arbitrary constants and  $c$  being written for  $\sqrt{\theta_0}$ . When the additional terms of  $\theta$  are considered, the effect is to modify this value of  $c$ , and also to add to  $\mathbf{w}$  new terms of the general form  $A\zeta^{\pm c+2i}$ . It is plain, therefore, that we may suppose

$$\mathbf{w} = Kf(\zeta, c) + K'f(\zeta, -c),$$

and may take, as a particular integral

$$\mathbf{w} = \sum_i \mathbf{b}_i \zeta^{c+2i},$$

$\mathbf{b}_i$  being a constant coefficient. If this equivalent of  $\mathbf{w}$  is substituted in the differential equation, we get the equation

$$(20) \quad [c + 2j]^2 \mathbf{b}_j - \sum_i \theta_{j-i} \mathbf{b}_i = 0,$$

which holds for all integral values for  $j$ , positive and negative. These conditions determine the ratios of all the coefficients  $\mathbf{b}_i$  to one of them, as  $\mathbf{b}_0$ , which may then be regarded as the arbitrary constant. They also determine  $c$ , which is the ratio of the synodic to the anomalistic month. For the purpose of exhibiting more clearly the properties of the equations represented generally by (20), I write a few of them *in extenso*: for convenience let

$$[i] = (c + 2i)^2 - \theta_0;$$

then

$$(21) \quad \left| \begin{array}{ccccccc} \dots + [-2]\mathbf{b}_{-2} - \theta_1\mathbf{b}_{-1} & - \theta_2\mathbf{b}_0 & - \theta_3\mathbf{b}_1 & - \theta_4\mathbf{b}_2 & \dots & = 0, \\ \dots - \theta_1\mathbf{b}_{-2} & + [-1]\mathbf{b}_{-1} - \theta_1\mathbf{b}_0 & - \theta_2\mathbf{b}_1 & - \theta_3\mathbf{b}_2 & \dots & = 0, \\ \dots - \theta_2\mathbf{b}_{-2} & - \theta_1\mathbf{b}_{-1} & + [0]\mathbf{b}_0 - \theta_1\mathbf{b}_1 & - \theta_2\mathbf{b}_2 & \dots & = 0, \\ \dots - \theta_3\mathbf{b}_{-2} & - \theta_2\mathbf{b}_{-1} & - \theta_1\mathbf{b}_0 + [1]\mathbf{b}_1 - \theta_1\mathbf{b}_2 & - \dots & = 0, \\ \dots - \theta_4\mathbf{b}_{-2} & - \theta_3\mathbf{b}_{-1} & - \theta_2\mathbf{b}_0 - \theta_1\mathbf{b}_1 + [2]\mathbf{b}_2 & - \dots & = 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right.$$

If, from this group of equations, infinite in number, and the number of terms in each equation also infinite, we eliminate all the  $b$  except one, we get a symmetrical determinant involving  $c$ , which, equated to zero, determines this quantity. This equation we will denote thus: —

$$(22) \quad \mathfrak{D}(c) = 0.$$

If, in (20), we put  $-c$  for  $c$ ,  $-j$  for  $j$ , and suppose that  $b_j$  is now denoted by  $b_{-j}$ , the equation is the same as at first; hence the determinant just mentioned remains unchanged, when for  $c$  in it we substitute  $-c$ , and

$$\mathfrak{D}(-c) = \mathfrak{D}(c),$$

or, in other words,  $\mathfrak{D}(c)$  is a function of  $c^2$ . Again, in the same equation, let  $c + 2\nu$  be substituted for  $c$ ,  $\nu$  being any positive or negative integer, and write  $j - \nu$  for  $j$ , and suppose that  $b_j$  is now denoted by  $b_{j+\nu}$ . The equation is again the same as at first, and hence the determinant suffers no change when  $c + 2\nu$  is written in it for  $c$ . That is,

$$\mathfrak{D}(c + 2\nu) = \mathfrak{D}(c).$$

It follows from all this that if (22) is satisfied by a root  $c = c_0$ , it will also have, as roots, all the quantities contained in the expression

$$\pm c_0 + 2i,$$

where  $i$  denotes any positive or negative integer or zero. And these are all the roots the equation admits; for each of the expressions denoted by  $[i]$  is of two dimensions in  $c$ , and may be regarded as introducing into the equation the two roots  $2i + c_0$  and  $2i - c_0$ . Consequently the roots are either all real or all imaginary, and it is impossible that the equation should have any equal roots unless all the roots are integral. But in the last case the inequalities we treat would evidently coalesce with those having the argument of the variation, and could not be separated from them; hence this case may be set aside as practically not occurring.

It is evident from the foregoing remarks that, in an analytical point of view, it is indifferent which of the roots of (22) is taken as the value of  $c$ ; in every case we get the same value for  $w$ . For denoting the

mean anomaly of the moon by  $\xi$ , we have the infinite series of arguments

$$\dots, \xi - 4\tau, \xi - 2\tau, \xi, \xi + 2\tau, \xi + 4\tau, \dots$$

each of which can be made to play the same *rôle* as  $\xi$ , and analysis knows no distinction between them. Hence the equation, which determines the motion of  $\xi$ , must, of necessity, also give the motions of all the arguments of the series above, as well as of their negatives.<sup>1</sup> One has, however, been in the habit of taking for  $c$  the root which approximates to  $\sqrt{\theta_0}$ .

It may be well to notice here the modifications which the addition to the investigation of terms of higher orders produces in equation (22). This may be written

$$\Pi(x \pm c_0 + 2i) = 0,$$

where  $x$  is the unknown quantity and  $\Pi$  is a symbol denoting the product of the infinite number of factors obtained by attributing to  $i$  all integral values positive and negative, zero included, and taking in succession the ambiguous sign in both significations. Had the terms, involving higher powers of  $e$ , been included in the investigation, the equation would have been

$$\Pi(x + jc_0 + 2i) = 0,$$

where  $j$  receives all integral values positive and negative. If, furthermore, we had included all terms involving the argument  $\tau$  and its odd multiples, the equation would have been

$$\Pi(x + jc_0 + i) = 0.$$

If to these we had added all terms depending on the solar eccentricity, the equation would have been

$$\Pi(x + jc_0 + i + km) = 0,$$

where  $k$  is also to receive all integral values positive and negative.

<sup>1</sup> A similar condition of things occurs in many less complex problems; for instance, in the determination of the principal axes of rotation of a rigid body. Although there is but one set of such axes, yet the final equation, solving the question, is of the third degree, all because analysis knows no distinction between the axes of  $x$ ,  $y$  and  $z$ .

A similar thing is true in the general planetary problem. Professor NEWCOMB says,<sup>1</sup> »The quantities  $\mathbf{b}$ , where  $\mathbf{b}$  is of similar signification with  $\mathbf{c}_0$  above, »ought, perhaps, to appear as the roots of an equation of the  $3n^{\text{th}}$  degree». But it is plain, from the foregoing remarks, that not only does this equation contain the  $3n$  roots  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{3n}$ , but also every root given by the general integral linear function of the  $\mathbf{b}$

$$i_1 \mathbf{b}_1 + i_2 \mathbf{b}_2 + \dots + i_{3n} \mathbf{b}_{3n},$$

for which, in the analysis, the corresponding argument

$$i_1 \lambda_1 + i_2 \lambda_2 + \dots + i_{3n} \lambda_{3n}$$

can play the same rôle as any one of the individual arguments  $\lambda$ . Hence this equation, in all cases but the problem of two bodies, must be regarded as transcendental or of infinite degree.

The equations which determine the coefficients  $\mathbf{b}_i$  and the quantity  $\mathbf{c}$ , having the form of normal equations in the method of least squares, can be solved by the process usually adopted for the latter. Let two of these equations be written

$$[j] \mathbf{b}_j - \sum_i \theta_{j-i} \mathbf{b}_i = 0,$$

$$[\nu] \mathbf{b}_\nu - \sum_i \theta_{\nu-i} \mathbf{b}_i = 0,$$

where, in the first, the summation does not include the value  $i = j$ , or in the second the value  $i = \nu$ . The result of the elimination of  $\mathbf{b}_j$  from these is

$$\left[ [j] - \frac{\theta_{j-\nu} \theta_{j-\nu}}{[\nu]} \right] \mathbf{b}_j - \sum_i \left[ \theta_{j-i} + \frac{\theta_{j-\nu} \theta_{i-\nu}}{[\nu]} \right] \mathbf{b}_i = 0,$$

where, in the summation,  $i$  does not receive the values  $j$  and  $\nu$ . This equation may be written

$$[j]^{\circ} \mathbf{b}_j - \sum_i \theta_{j-i}^{\circ} \mathbf{b}_i = 0.$$

<sup>1</sup> *On the general integrals of planetary motion*, Smithsonian Contributions to Knowledge, No. 281, p. 31.

In like manner we may eliminate from the system of equations a second unknown  $\mathbf{b}'_i$ . And the general form of equation obtained may be written

$$[j]^{(\nu, \nu')} \mathbf{b}_j - \sum_i \theta_{j-i}^{(\nu, \nu')} \mathbf{b}_i = 0,$$

where, in the summation,  $i$  receives neither of the values  $j$ ,  $\nu$  and  $\nu'$ . This process may be continued until all the  $\mathbf{b}$ , having sensible values but  $\mathbf{b}_0$ , are eliminated; and the single equation remaining, after division by  $\mathbf{b}_0$ , may be written

$$[0]^{(-2, -1, 1, 2, \dots)} = 0.$$

This determines  $\mathbf{c}$ ; when we pursue the method of numerical substitutions, it will be the most advantageous course to perform the preceding elimination twice, using two values for  $\mathbf{c}$ , slightly different, but each quite approximate. The last equation will then, in neither case, be exactly satisfied, but, by a comparison of the errors, one will discover the value of  $\mathbf{c}$  which makes the left member sensibly zero. By a similar interpolation between the values of the  $\mathbf{b}$ , given severally by the first and second eliminations, we get the sensibly exact values of these quantities.

When it is proposed to neglect terms of the same order as  $\mathbf{m}^6$ , the equation for  $\mathbf{c}$  may be written

$$[-1][0][1] - \theta_1^2 [(-1) + [1]] = 0;$$

or, when we substitute for the symbols their significations,

$$[(\mathbf{c}^2 + 4 - \theta_0)^2 - 16\mathbf{c}^2][\mathbf{c}^2 - \theta_0] - 2\theta_1^2[\mathbf{c}^2 + 4 - \theta_0] = 0.$$

But, as  $\mathbf{c}^2 - \theta_0$  is a quantity of the third order, we may neglect the cube of it in the first term, and the product of it by  $\theta_1^2$  in the second. Thus reduced, the equation becomes

$$[\mathbf{c}^2 - \theta_0]^2 + 2[\theta_0 - 1][\mathbf{c}^2 - \theta_0] + \theta_1^2 = 0;$$

whose solution gives

$$\mathbf{c} = \sqrt{1 + \sqrt{(\theta_0 - 1)^2 - \theta_1^2}}.$$

This is a remarkably simple expression for obtaining an approxi-

miate value of the motion of the lunar perigee. The actual numerical values of the two elements entering into this formula are

$$\theta_0 = 1.1588439, \quad \theta_1 = -0.0570440.$$

$\theta_1$  is therefore more than one third of  $\theta_0 - 1$ , which explains why such an erroneous value is obtained for the motion of the lunar perigee, when we neglect it and take  $c = \sqrt{\theta_0}$ . The numbers being substituted in the formula, we get  $c = 1.0715632$ ; and as the ratio of the motion of the perigee to the sidereal mean motion of the moon is given by the equation

$$\frac{1}{n} \frac{d\omega}{dt} = 1 - \frac{c}{1 + m},$$

we get

$$\frac{1}{n} \frac{d\omega}{dt} = 0.008591.$$

This is about  $\frac{1}{60}$  in excess of the value 0.008452 given by observation. The difference is caused, in the main, by our neglect of the inclination of the lunar orbit. The solar force is less effective in producing motion in the perigee than it would be if the moon moved in the plane of the ecliptic.

It will occur immediately to every one that the properties we have stated of the roots of  $\mathfrak{D}(c) = 0$  are precisely those of the transcendental equation

$$\cos(\pi x) - a = 0;$$

of which, if  $x_0$  is one of the roots, the whole series of roots is represented by

$$\pm x_0 + 2i.$$

Hence we must necessarily have, identically,

$$\mathfrak{D}(c) = A[\cos(\pi c) - \cos(\pi c_0)],$$

$A$  being some constant independent of  $c$ . As is the general custom, we assume that the positive sign is given to the element of the determinant formed by the product of the diagonal line of constituents containing  $c$ . When, therefore, the determinant  $\mathfrak{D}(c)$  is developed in powers of  $c$ ,

using only a finite number of constituents in it, the coefficient of the highest power of  $\mathbf{c}$  in it is always positive unity: hence we may assume that this is the value of the coefficient when the number of constituents is increased without limit. But from the well-known equation

$$\cos(\pi\mathbf{c}) = \left(1 - \frac{4}{1}\mathbf{c}^2\right)\left(1 - \frac{4}{9}\mathbf{c}^2\right)\left(1 - \frac{4}{25}\mathbf{c}^2\right)\dots,$$

we gather that the coefficient of the highest power of  $\mathbf{c}$ , in the development of  $\cos(\pi\mathbf{c})$  in powers of  $\mathbf{c}$ , may be regarded as represented by the infinite product

$$-\frac{4}{1} \cdot -\frac{4}{9} \cdot -\frac{4}{25} \dots$$

If then the row of constituents of  $\mathfrak{D}(\mathbf{c})$ , containing  $[0]$ , is multiplied by  $-4$ , the rows containing  $[-1]$  and  $[1]$  by  $\frac{4}{4^2-1}$ , the rows containing  $[-2]$  and  $[2]$  by  $\frac{4}{8^2-1}$ , and, in general, the row containing  $[i]$  by  $\frac{4}{(4i)^2-1}$ , we shall have the constituents of a second determinant, which may be designated as  $\nabla(\mathbf{c})$ . And the equation

$$\nabla(\mathbf{c}) = 0,$$

having the same roots as  $\mathfrak{D}(\mathbf{c}) = 0$ , will serve our purposes as well as the latter. We evidently now have

$$\nabla(\mathbf{c}) = \cos(\pi\mathbf{c}) - \cos(\pi\mathbf{c}_0).$$

As this is an identical equation, it holds when any special value is attributed to  $\mathbf{c}$ , and we are thus furnished with an elegant method of obtaining the value of the absolute term of the equation  $\cos(\pi\mathbf{c}_0)$ . For example, substituting for  $\mathbf{c}$ , in succession, the values  $0, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{\theta_0}$ , we have our choice between the values

$$\begin{aligned}\cos(\pi\mathbf{c}_0) &= 1 - \nabla(0) \\ &= -\nabla\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= -1 - \nabla(1) \\ &= \cos(\pi\sqrt{\theta_0}) - \nabla(\sqrt{\theta_0}).\end{aligned}$$

As the determinant  $\nabla(o)$  appears the simplest, we retain the first expression. Then, dropping the now useless subscript  $_o$ ), the equation which determines  $c$  may be written

$$\cos(\pi c) = 1 - \nabla(o).$$

This is certainly a remarkable equation: it virtually amounts to a general solution of the equation  $\mathfrak{D}(c) = 0$ . It also affords us immediately the criterion for the reality of the roots of the latter. Using the phrase of CAUCHY, if the modulus of the quantity  $1 - \nabla(o)$  does not exceed unity, the roots are all real; in the contrary case, they are all imaginary. The criterion for deciding whether the variable  $w$  is always contained between definite limits, or is capable of increasing or diminishing beyond every limit, is the same. In the first case, it is developable in a series of circular cosines; in the second, in a series of potential cosines.

As, in the particular case, where  $\theta_1, \theta_2, \&c.$ , all vanish, the proper value of  $c$  is  $\sqrt{\theta_o}$ , it follows that the element of the determinant  $\nabla(o)$ , formed by the product of the diagonal line of constituents involving  $\theta_o$ , is

$$1 - \cos(\pi\sqrt{\theta_o}) = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_o}\right).$$

If therefore each row of constituents of the determinant  $\nabla(o)$  is divided by the constituent of it which lies in the just-mentioned diagonal line, we shall have a set of constituents forming a third determinant  $\square(o)$ , such that

$$\nabla(o) = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_o}\right) \cdot \square(o).$$

In consequence the equation, determining  $c$ , can be put in the form

$$\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}c\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_o}\right)} = \square(o).$$

For the sake of exhibiting more clearly the significance of this

equation, I write a few of the central constituents of the determinant  $\square(\sigma)$ , from which the rest can be easily inferred.

$$\square(\sigma) = \left| \begin{array}{ccccccccc} \dots + & 1 & -\frac{\theta_1}{4^2 - \theta_0} & -\frac{\theta_2}{4^2 - \theta_0} & -\frac{\theta_3}{4^2 - \theta_0} & -\frac{\theta_4}{4^2 - \theta_0} & \dots \\ & \dots -\frac{\theta_1}{2^2 - \theta_0} + & 1 & -\frac{\theta_1}{2^2 - \theta_0} & -\frac{\theta_2}{2^2 - \theta_0} & -\frac{\theta_3}{2^2 - \theta_0} & \dots \\ & \dots -\frac{\theta_2}{\sigma^2 - \theta_0} & -\frac{\theta_1}{\sigma^2 - \theta_0} + & 1 & -\frac{\theta_1}{\sigma^2 - \theta_0} & -\frac{\theta_2}{\sigma^2 - \theta_0} & \dots \\ & \dots -\frac{\theta_3}{2^2 - \theta_0} & -\frac{\theta_2}{2^2 - \theta_0} & -\frac{\theta_1}{2^2 - \theta_0} + & 1 & -\frac{\theta_1}{2^2 - \theta_0} & \dots \\ & \dots -\frac{\theta_4}{4^2 - \theta_0} & -\frac{\theta_3}{4^2 - \theta_0} & -\frac{\theta_2}{4^2 - \theta_0} & -\frac{\theta_1}{4^2 - \theta_0} + & 1 & \dots \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right|$$

The question of the convergence, so to speak, of a determinant, consisting of an infinite number of constituents, has nowhere, so far as I am aware, been discussed. All such determinants must be regarded as having a central constituent; when, in computing in succession the determinants formed from the  $3^2, 5^2, 7^2$  &c., constituents symmetrically situated with respect to the central constituent, we approach, without limit, a determinate magnitude, the determinant may be called convergent, and the determinate magnitude is its value.

In the present case, there can scarcely be a doubt that, as long as the series  $\sum_i \theta_i \zeta^{2i}$  is a legitimate expansion of  $\theta$ , the determinant  $\nabla(\sigma)$  must be regarded as convergent.

We will give another equation for determining  $\sigma$ . We have

$$\cos(\pi\sigma) = \cos(\pi\sqrt{\theta_0}) - \nabla(\sqrt{\theta_0}).$$

The diagonal line of constituents in  $\nabla(\sqrt{\theta_0})$  is represented in general by the formula

$$\frac{16i(i + \sqrt{\theta_0})}{(4i)^2 - 1};$$

and when the factor corresponding to  $i = 0$  is omitted, the product

$$\prod_{i=-\infty}^{i=+\infty} \frac{16i(i + \sqrt{\theta_0})}{(4i)^2 - 1} = \frac{\pi \sin(\pi\sqrt{\theta_0})}{8\sqrt{\theta_0}}.$$

Consequently if we put

$$\square(\sqrt{\theta_0}) = \left| \begin{array}{ccccccccccccc} \dots & + & \theta_1 & - & \theta_2 & - & \theta_3 & - & \theta_4 & \dots \\ \dots & - & \frac{\theta_1}{8(2-\sqrt{\theta_0})} & + & \frac{\theta_2}{8(2-\sqrt{\theta_0})} & - & \frac{\theta_3}{8(2-\sqrt{\theta_0})} & - & \frac{\theta_4}{8(2-\sqrt{\theta_0})} & \dots \\ \dots & - & \frac{\theta_1}{4(1-\sqrt{\theta_0})} & + & \theta_1 & - & \frac{\theta_2}{4(1-\sqrt{\theta_0})} & - & \frac{\theta_3}{4(1-\sqrt{\theta_0})} & - & \frac{\theta_4}{4(1-\sqrt{\theta_0})} & \dots \\ \square(\sqrt{\theta_0}) = & \dots & + & \theta_2 & + & \theta_1 & + & \circ & + & \theta_1 & + & \theta_2 & \dots \\ \dots & - & \frac{\theta_3}{4(1+\sqrt{\theta_0})} & - & \frac{\theta_2}{4(1+\sqrt{\theta_0})} & - & \frac{\theta_1}{4(1+\sqrt{\theta_0})} & + & \theta_1 & - & \frac{\theta_1}{4(1+\sqrt{\theta_0})} & \dots \\ \dots & - & \frac{\theta_4}{8(2+\sqrt{\theta_0})} & - & \frac{\theta_3}{8(2+\sqrt{\theta_0})} & - & \frac{\theta_2}{8(2+\sqrt{\theta_0})} & - & \frac{\theta_1}{8(2+\sqrt{\theta_0})} & + & \theta_1 & \dots \\ \dots & & & & & & & & & & & & \dots \end{array} \right|,$$

a determinant, which, having  $\circ$  for its central constituent, presents some facilities in its computation, we shall have, for determining  $c$ , the equation

$$\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}c\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0}\right)} = 1 + \frac{\pi \cotg\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0}\right)}{2\sqrt{\theta_0}} \square(\sqrt{\theta_0}).$$

In the lunar theory  $\theta_i$  is a quantity of the  $2i^{\text{th}}$  order, and  $1 - \sqrt{\theta_0}$  a quantity of the first order; hence it is clear that, if we are willing to admit an error of the seventh order in  $c$ , the determinant

$$\square(\sqrt{\theta_0}) = -\frac{1}{2} \frac{\theta_1^2}{\theta_1 - 1}.$$

If, neglecting then quantities of the seventh order, we put

$$\frac{\pi\theta_1^2}{8\sqrt{\theta_0}(\theta_0 - 1)} = \operatorname{tg} \theta,$$

$\theta$  will be a small angle, and  $c$  will result from the equation

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}c\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0} - \theta\right)}{\cos\theta}.$$

This formula, although it involves the same coefficients  $\theta_0$  and  $\theta_1$  as the approximate formula previously given, is two orders more exact. A greater degree of approximation can be arrived at only by including the additional coefficient  $\theta_2$ . Employing the numerical values already attributed to  $\theta_0$  and  $\theta_1$ , we find

$$\theta = 25^\circ 41.^m 395, \quad c = 1.0715815, \quad \frac{1}{n} \frac{d\omega}{dt} = 0.008574.$$

It is better, however, to employ the equations

$$\frac{\pi\theta_1^2}{4\sqrt{\theta_0}(\theta_0 - 1)} = \operatorname{tg}\theta; \quad \cos(\pi c) = \frac{\cos(\pi\sqrt{\theta_0} - \theta)}{\cos\theta},$$

which give

$$\theta = 51^\circ 22.^m 6185, \quad c = 1.0715837865, \quad \frac{1}{n} \frac{d\omega}{dt} = 0.0085721020.$$

The determinants  $\square(o)$  and  $\square(\sqrt{\theta_0})$  can be replaced by infinite series proceeding according to ascending powers and products of the coefficients  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , &c.

Let us take the first, as being in more respects the simpler. It is plain that the element of the determinant formed by the product of the diagonal line of constituents is the only term of the zero order in it. Then one exchange always produces terms of the 4<sup>th</sup> or higher orders, two exchanges terms of the 8<sup>th</sup> or higher orders, three exchanges terms of the 12<sup>th</sup> or higher orders, and so on. Now let  $i, i', i'', \dots$  be positive or negative integers, of which no two are identical, written in the order of their algebraical magnitude, and let  $\{i\}$  stand for  $(2i)^2 - \theta_0$ . Then all the terms of  $\square(o)$ , which are obtained by 0, 1, 2, and 3 exchanges, are contained in the following expression, which is, consequently affected with an error of the 16<sup>th</sup> order,

$$\begin{aligned}
 \square(o) - 1 = & \sum_{i, i'} \frac{\theta_i^2}{\{i\}\{i'\}} \\
 & + \sum_{i, i', i'', i'''} \frac{\theta_{i-i'}^2 \theta_{i'-i''}^2}{\{i\}\{i'\}\{i''\}\{i'''\}} \\
 & - 2 \sum_{i, i', i''} \frac{\theta_{i-i'} \theta_{i'-i''} \theta_{i''-i}}{\{i\}\{i'\}\{i''\}} \\
 & - \sum_{i, i', i'', i''', iv} \frac{\theta_{i-i'}^2 \theta_{i''-i'''}^2 \theta_{iv-i''v}^2}{\{i\}\{i'\}\{i''\}\{i'''\}\{iv\}} \\
 & + 2 \sum_{i, i', i'', iv} \left| \begin{array}{l} \theta_{i-i'} \theta_{i''-i'''}^2 \theta_{iv-i''v} \theta_{iv-i'} \\ + \theta_{i'-i}^2 \theta_{i''-i'''}^2 \theta_{iv-i''v} \theta_{iv-i''v} \end{array} \right| \\
 & - 2 \sum_{i, i', i'', i'''} \left| \begin{array}{l} \theta_{i-i'} \theta_{i''-i'''} \theta_{i''-i'} \theta_{i'''-i} \\ + \theta_{i''-i} \theta_{i''-i'} \theta_{i'''-i'} \theta_{i'''-i''} \end{array} \right|.
 \end{aligned}$$

Particularizing the summations in this expression, and retaining only terms which are of lower orders than the 16<sup>th</sup>, we get

$$\begin{aligned}
 (23) \quad \square(o) = 1 - & \theta_1^2 \sum_i \frac{1}{\{i\}\{i+1\}} - \theta_2^2 \sum_i \frac{1}{\{i\}\{i+2\}} - \theta_3^2 \sum_i \frac{1}{\{i\}\{i+3\}} \\
 & + \theta_1^4 \sum_{i, i'} \frac{1}{\{i\}\{i+1\}\{i'\}\{i'+1\}} \\
 & + \theta_1^2 \theta_2^2 \sum_{i, i'} \frac{1}{\{i\}\{i+1\}\{i'\}\{i'+2\}} \\
 & - 2 \theta_1^2 \theta_2 \sum_i \frac{1}{\{i\}\{i+1\}\{i+2\}} \\
 & - 2 \theta_1 \theta_2 \theta_3 \sum_i \frac{1}{\{i\}\{i+1\}\{i+3\}} \\
 & - 2 \theta_1 \theta_2 \theta_3 \sum_i \frac{1}{\{i\}\{i+2\}\{i+3\}} \\
 & - \theta_1^6 \sum_{i, i', i''} \frac{1}{\{i\}\{i+1\}\{i'\}\{i'+1\}\{i''\}\{i''+1\}} \\
 & + 2 \theta_1^4 \theta_2 \sum_{i, i'} \frac{1}{\{i\}\{i+1\}\{i'\}\{i'+1\}\{i'+2\}} \\
 & - 2 [\theta_1^2 \theta_2^2 + \theta_1^3 \theta_3] \sum_i \frac{1}{\{i\}\{i+1\}\{i+2\}\{i+3\}}
 \end{aligned}$$

The functions of  $\theta_0$ , which are represented by the summations, can all be replaced by finite expressions. For brevity, let us put  $\theta_0 = 4\theta^2$ , then resolving the expression into partial fractions,  $i$  being taken as the variable, we have, for instance,

$$\begin{aligned}\sum_i \frac{1}{i(i+k)} &= \frac{1}{16} \sum_i \frac{1}{(\theta+i)(\theta-i)(\theta+i+k)(\theta-i-k)} \\ &= \frac{1}{16} \sum_i \left[ \frac{A}{\theta+i} + \frac{B}{\theta-i} + \frac{C}{\theta+i+k} + \frac{D}{\theta-i-k} \right],\end{aligned}$$

where  $A, B, C$  and  $D$  are determined by the equations

$$\begin{aligned}2k\theta(2\theta-k)A &= 1, & -2k\theta(2\theta+k)B &= 1, \\ -2k\theta(2\theta+k)C &= 1, & 2k\theta(2\theta-k)D &= 1.\end{aligned}$$

But, as is well known,

$$\sum_i \frac{1}{\theta+i} = \sum_i \frac{1}{\theta-i} = \sum_i \frac{1}{\theta+i+k} = \sum_i \frac{1}{\theta-i-k} = \pi \cotg \pi\theta.$$

Consequently

$$\begin{aligned}\sum_i \frac{1}{i(i+k)} &= \frac{1}{16} (A + B + C + D) \pi \cotg \pi\theta \\ &= \frac{\pi \cotg \pi\theta}{8\theta(4\theta^2 - k^2)} \\ &= \frac{\pi \cotg \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\theta_0} \right)}{4\sqrt{\theta_0}(\theta_0 - k^2)}.\end{aligned}$$

In like manner will be found

$$\begin{aligned}&\sum_i \frac{1}{i(i+k)(i+k')} \\ &= -\frac{1}{16} \frac{3\theta_0 - (k^2 - kk' + k'^2)}{\sqrt{\theta_0}(\theta_0 - k^2)(\theta_0 - k'^2)[\theta_0 - (k - k')^2]} \pi \cotg \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\theta_0} \right), \\ &\sum_i \frac{1}{i(i+1)(i+k)(i+k+1)} \\ &= \frac{1}{32} \frac{5\theta_0 - (k^2 + 1)}{\sqrt{\theta_0}(\theta_0 - 1)(\theta_0 - k^2)[\theta_0 - (k+1)^2][\theta_0 - (k-1)^2]} \pi \cotg \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\theta_0} \right).\end{aligned}$$

By attributing, in these equations, special integral values to  $k$ , will be obtained the values of all the single summations appearing in the preceding expression for  $\square(\circ)$ . With regard to the double summations, we may proceed as follows: substitute  $i + k$  for  $i'$ , then resolve the expression under consideration into partial fractions with respect to  $i$  as variable, and sum between the limits  $-\infty$  and  $+\infty$ ; the fractions occurring in the result thus obtained are next resolved into partial fractions with reference to  $k$ , and the summations, with reference to this integer, are taken between the limits 2 and  $+\infty$ ; or which is the same thing, between the limits 0 and  $+\infty$ , and the terms corresponding to  $k = 0$  and  $k = 1$  subtracted from the result. The single triple summation may be treated in an analogous manner. Thus we get

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i,i'} \frac{1}{\{i\}\{i+1\}\{i'\}\{i'+1\}} \\
 = & \frac{\pi \cotg\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0}\right)}{32\sqrt{\theta_0}(1-\theta_0)^2} \left[ \frac{\pi \cotg(\pi\sqrt{\theta_0})}{\sqrt{\theta_0}} - \frac{1}{\theta_0} + \frac{2}{1-\theta_0} + \frac{9}{2(4-\theta_0)} \right], \\
 & \sum_{i,i'} \frac{1}{\{i\}\{i+1\}\{i'\}\{i'+2\}} \\
 = & \frac{\pi \cotg\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0}\right)}{16\sqrt{\theta_0}(1-\theta_0)(4-\theta_0)} \left[ \frac{\pi \cotg(\pi\sqrt{\theta_0})}{\sqrt{\theta_0}} - \frac{1}{\theta_0} + \frac{2}{1-\theta_0} + \frac{2}{4-\theta_0} + \frac{5}{9-\theta_0} \right], \\
 & \sum_{i,i',i''} \frac{1}{\{i\}\{i+1\}\{i'\}\{i'+1\}\{i''\}\{i''+1\}} \\
 = & \frac{3\pi \cotg\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0}\right)}{64\sqrt{\theta_0}(1-\theta_0)^2(4-\theta_0)} \left[ \frac{\pi \cotg(\pi\sqrt{\theta_0})}{\sqrt{\theta_0}} - \frac{1}{\theta_0} + \frac{2}{1-\theta_0} + \frac{2}{4-\theta_0} + \frac{20}{3(9-\theta_0)} \right], \\
 & \sum_{i,i',i''} \frac{1}{\{i\}\{i+1\}\{i'\}\{i'+1\}\{i''\}\{i''+1\}} \\
 = & -\frac{\pi \cotg\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0}\right)}{128\sqrt{\theta_0}(1-\theta_0)^3} \left[ -\frac{1}{\theta_0} + \frac{2}{1-\theta_0} + \frac{9}{2(4-\theta_0)} \right] \left[ \frac{\pi \cotg(\pi\sqrt{\theta_0})}{\sqrt{\theta_0}} \right. \\
 & \left. - \frac{25}{8\theta_0} + \frac{1}{\theta_0^2} + \frac{2}{1-\theta_0} + \frac{4}{(1-\theta_0)^2} - \frac{9}{8(4-\theta_0)} + \frac{9}{(4-\theta_0)^2} - \frac{4}{9-\theta_0} - \frac{\pi^2}{3\theta_0} \right].
 \end{aligned}$$

From which it follows that

$$\begin{aligned}
 \square(0) = 1 + & \frac{\pi \cotg\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0}\right)}{4\sqrt{\theta_0}} \left[ \frac{\theta_1^2}{1-\theta_0} + \frac{\theta_2^2}{4-\theta_0} + \frac{\theta_3^2}{9-\theta_0} \right] \\
 & + \frac{\pi \cotg\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0}\right)}{32\sqrt{\theta_0}(1-\theta_0)^2} \left[ \frac{\pi \cotg(\pi\sqrt{\theta_0})}{\sqrt{\theta_0}} - \frac{1}{\theta_0} + \frac{2}{1-\theta_0} + \frac{9}{2(4-\theta_0)} \right] \theta_1^4 \\
 & + \frac{3\pi \cotg\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0}\right)}{8\sqrt{\theta_0}(1-\theta_0)(4-\theta_0)} \theta_1^2 \theta_2 \\
 & + \frac{\pi \cotg\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0}\right)}{128\sqrt{\theta_0}(1-\theta_0)^3} \left[ \left[ -\frac{1}{\theta_0} + \frac{2}{1-\theta_0} + \frac{9}{2(4-\theta_0)} \right] \frac{\pi \cotg(\pi\sqrt{\theta_0})}{\sqrt{\theta_0}} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{25}{8\theta_0} + \frac{1}{\theta_0^2} + \frac{2}{1-\theta_0} + \frac{4}{(1-\theta_0)^2} - \frac{9}{8(4-\theta_0)} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{9}{(4-\theta_0)^2} - \frac{4}{9-\theta_0} - \frac{\pi^2}{3\theta_0} \right] \theta_1^6 \\
 (24) \quad & + \frac{3\pi \cotg\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0}\right)}{32\sqrt{\theta_0}(1-\theta_0)^2(4-\theta_0)} \left[ \frac{\pi \cotg(\pi\sqrt{\theta_0})}{\sqrt{\theta_0}} - \frac{1}{\theta_0} + \frac{2}{1-\theta_0} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{2}{4-\theta_0} + \frac{20}{3(9-\theta_0)} \right] \theta_1^4 \theta_2 \\
 & + \frac{\pi \cotg\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0}\right)}{16\sqrt{\theta_0}(1-\theta_0)(4-\theta_0)} \left[ \frac{\pi \cotg(\pi\sqrt{\theta_0})}{\sqrt{\theta_0}} - \frac{1}{\theta_0} + \frac{2}{1-\theta_0} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{2}{4-\theta_0} + \frac{10}{9-\theta_0} \right] \theta_1^2 \theta_2^2 \\
 & + \frac{(7-3\theta_0)\pi \cotg\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0}\right)}{4\sqrt{\theta_0}(1-\theta_0)(4-\theta_0)(9-\theta_0)} \theta_1 \theta_2 \theta_3 \\
 & + \frac{5\pi \cotg\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0}\right)}{16\sqrt{\theta_0}(1-\theta_0)(4-\theta_0)(9-\theta_0)} \theta_1^3 \theta_3.
 \end{aligned}$$

This is the same result as would be obtained if, setting out with the equation  $\mathfrak{D}(c) = 0$ , and assuming that  $c = \sqrt{\theta_0}$  is an approximate value, we should expand the function  $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}c\right)$  in ascending powers and products of the coefficients  $\theta_1, \theta_2, \&c.$

## IV.

In order to obtain a numerical result from the preceding investigation, we assume

$$n = 17325594''.06085, \quad n' = 1295977''.41516$$

whence

$$m = 0.080848933808311.6.$$

From an investigation<sup>1</sup> of the corresponding values of the  $a_i$ , we have

$$2h_1 = + 0.009094244877375.5$$

$$4h_2 = + 0.000117573131569.1$$

$$6h_3 = + 0.000001261328523.8$$

$$8h_4 = + 0.000000012619314.9$$

$$10h_5 = + 0.000000000121722.9$$

$$12h_6 = + 0.000000000001147.9$$

$$14h_7 = + 0.00000000000010.6$$

$$- 2h_{-1} = - 0.017391493923079.4$$

$$- 4h_{-2} = + 0.000001965485829.2$$

$$- 6h_{-3} = + 0.000000073811780.8$$

$$- 8h_{-4} = + 0.000000000687885.7$$

$$- 10h_{-5} = + 0.000000000005777.1$$

$$- 12h_{-6} = + 0.00000000000047.5$$

$$- 14h_{-7} = + 0.00000000000004$$

<sup>1</sup> See American Journal of Mathematics, Vol. I, p. 247.

The values of the  $U_i$  derived from these are

$$\begin{array}{ll} U_1 = + 0.00909 40932 76038.2 & U_{-1} = - 0.01739 21860 78260.6 \\ U_2 = + 0.00007 62192 02104.5 & U_{-2} = + 0.00015 32094 08075.6 \\ U_3 = + 0.00000 06474 24628.8 & U_{-3} = - 0.00000 12670 56302.6 \\ U_4 = + 0.00000 00055 23086.8 & U_{-4} = + 0.00000 00115 67648.9 \\ U_5 = + 0.00000 00000 47209.0 & U_{-5} = - 0.00000 00000 95049.5 \\ U_6 = + 0.00000 00000 00403.9 & U_{-6} = + 0.00000 00000 00867.3 \\ U_7 = + 0.00000 00000 00003.4 & U_{-7} = - 0.00000 00000 00007.2 \end{array}$$

In combination with the values of the  $R_i$ , which has been given elsewhere,<sup>1</sup> these afford the following periodic series for  $\theta$ : —

$$\begin{aligned} \theta = & 1.15884 39395 96583 \\ & - 0.11408 80374 93807 \cos 2\tau \\ & + 0.00076 64759 95109 \cos 4\tau \\ & - 0.00001 83465 77790 \cos 6\tau \\ & + 0.00000 01088 95009 \cos 8\tau \\ & - 0.00000 00020 98671 \cos 10\tau \\ & + 0.00000 00000 12103 \cos 12\tau \\ & - 0.00000 00000 00211 \cos 14\tau \end{aligned}$$

The values of the coefficients  $\theta_0$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , &c., are the halves of these coefficients, except  $\theta_0$  which is equal to the first coefficient.

On substituting the numerical values of these quantities in (24), and separating the sum of the terms into groups according to their order for the sake of exhibiting the degree of convergence, we get

Term of the zero order,	1.00000 00000 00000 0
Term of the 4 <sup>th</sup> order,	+ 0.00180 46110 93422 7
Sum of the terms of the 8 <sup>th</sup> order,	+ 0.00000 01808 63109 9
Sum of the terms of the 12 <sup>th</sup> order,	+ 0.00000 00000 64478 6
$\square(0) = 1.00180 47920 21011 2$	

As far as we can judge from induction, the value of  $\square(0)$  would be affected, only in the 14<sup>th</sup> decimal, by the neglected remainder of the

<sup>1</sup> See American Journal of Mathematics, Vol. I, p. 249.

series, which is of the 16<sup>th</sup> order. An error in  $\square(o)$  is multiplied by 2.8 nearly in  $c$ .

The value, which is derived thence for  $c$ , is

$$c = 1.07158\ 32774\ 16016.$$

In order that nothing may be wanting in the exact determination of this quantity, we will employ the value just obtained as an approximate value in the elimination between equations (21). The coefficients  $[i]$ , as many of them as we have need for, have the following values: —

$$\begin{aligned} [-4] &= 46.8, & [1] &= 8.27577\ 98905\ 1, \\ [-3] &= 23.13045, & [2] &= 24.56211\ 3, \\ [-2] &= 7.41678\ 05615\ 1, & [3] &= 48.85. \\ [-1] &= -0.29688\ 63288\ 2300, \end{aligned}$$

If the quantities  $b_i$  are eliminated from equations (21) in the order  $b_{-1}$ ,  $b_1$ ,  $b_{-2}$ ,  $b_2$ ,  $b_{-3}$ ,  $b_3$  and  $b_{-4}$ ; it will be found that the coefficient of  $b_0$ , in the principal equation, undergoes the following successive depressions,

$$\begin{aligned} [o] &= -0.01055\ 32191\ 58933, \\ [o]^{(-1)} &= +0.00040\ 72723\ 11650, \\ [o]^{(-1, 1)} &= +0.00001\ 50888\ 08423, \\ [o]^{(-2, -1, 1)} &= +0.00000\ 00253\ 21700, \\ [o]^{(-2, -1, 1, 2)} &= +0.00000\ 00009\ 20420, \\ [o]^{(-3, -2, -1, 1, 2)} &= +0.00000\ 00000\ 03941, \\ [o]^{(-3, -2, -1, 1, 2, 3)} &= +0.00000\ 00000\ 00155, \\ [o]^{(-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3)} &= +0.00000\ 00000\ 00008. \end{aligned}$$

The last number is not sensibly changed by the elimination of any of the  $b_i$ , beyond  $b_{-4}$  on the one side, or  $b_3$  on the other. This residual is so small that it will not be necessary to repeat the computation with another value of  $c$ : it will suffice to subtract half of it from the assumed value of  $c$ . Thus we have as the final result

$$c = 1.07158\ 32774\ 16012;$$

and, consequently,

$$\frac{1}{n} \frac{d\omega}{dt} = 0.00857\ 25730\ 04864.$$

Let us compare this value with that obtained from DELAUNAY's literal expression<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \frac{d\omega}{dt} = & \frac{3}{4} m^2 + \frac{225}{32} m^3 + \frac{4071}{128} m^4 + \frac{265493}{2048} m^5 + \frac{12822631}{24576} m^6 \\ & + \frac{1273925965}{589824} m^7 + \frac{71028685589}{7077888} m^8 + \frac{32145882707741}{679477248} m^9, \end{aligned}$$

where  $m$  denotes the ratio of the mean motions of the sun and moon. On the substitution of the numerical values we have employed for these quantities, this series gives, term by term,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \frac{d\omega}{dt} = & 0.00419\ 6429 + 0.00294\ 2798 + 0.00099\ 5700 + 0.00030\ 3577 \\ & + 0.00009\ 1395 + 0.00002\ 8300 + 0.00000\ 9836 \\ & + 0.00000\ 3468 = 0.00857\ 1503. \end{aligned}$$

From the comparison, it appears that the sum of the remainder of DELAUNAY's series is 0.00000 1070, somewhat less than would be inferred by induction from the terms of the series itself. And, although DELAUNAY has been at the great pains of computing 8 terms of this series, they do not suffice to give correctly the first 4 significant figures of the quantity sought. On the other hand, the terms of the highest order, computed in the expression for  $\square(0)$ , were of the 12<sup>th</sup> order only; and yet, as we have seen, they have sufficed for giving exact nearly to the 15<sup>th</sup> decimal. As well as can be judged from induction, it would be necessary to prolong the series, in powers of  $m$ , as far as  $m^{27}$ , in order to obtain an equally precise result. Allowing that the two last figures of the foregoing value of  $\frac{1}{n} \frac{d\omega}{dt}$  may be vitiated by the accumulation of error arising from the very numerous operations, we may, I think, assert that 13 decimals correctly correspond to the assumed value of  $m$ . It may be stated that all the computations have been made twice, and no inconsiderable portion of them three times.

---

<sup>1</sup> Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris, Tome LXXIV, p. 19.

ZUR THEORIE DER GAMMAFUNCTION<sup>1</sup>

VON

H.J. MELLIN  
in HELSINGFORS.

Den Ausgangspunct der nachfolgenden Untersuchungen bildet eine Function der allgemeinen Form

$$(1) \quad F(z) = e^{\alpha z} \frac{\Gamma^{\mu_1}(z - a_1) \Gamma^{\mu_2}(z - a_2) \dots \Gamma^{\mu_r}(z - a_r)}{\Gamma^{\nu_1}(z - b_1) \Gamma^{\nu_2}(z - b_2) \dots \Gamma^{\nu_s}(z - b_s)},$$

wo  $\mu_1, \dots, \mu_r, \nu_1, \dots, \nu_s$  positive ganze Zahlen und  $\alpha, a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s$  beliebige von  $z$  unabhängige Grössen bezeichnen.

Die Sätze, welche Herr PRYM in seiner in CRELLE's Journal Bd. 82 publicirten Arbeit: *Zur Theorie der Gammafunction* entwickelte, können als ganz specielle Fälle von denjenigen betrachtet werden, die im Folgenden bewiesen werden sollen. Indem ich von dem MITTAG-LEFFLER'schen Satze Gebrauch mache, erhalte ich eine grosse Anzahl neuer Transcendenten, die mit der Gammafunction sehr nahe verwandt sind. Die Theorie der Gammafunction wird gleichzeitig nicht unbedeutend erweitert. Besonders bemerkenswerth ist die formale Übereinstimmung, welche dieselbe in gewissen Hinsichten mit der Theorie der linearen Differentialgleichungen erhält. Dieser Umstand kann, wie ich bei einer anderen Gelegenheit zeigen will, dadurch erklärt werden, dass in der That auch eine nähtere Beziehung zwischen den Integralen gewisser linearen Differentialgleichungen

<sup>1</sup> Vergl. meine Abhandlung: *Om en ny klass af transcedenta functioner, hvilka är nära beslägtade med gammafunktionen*, Acta soc. scient. Fennicæ, Tom. XIV, XV; 1885, 1886.

und solchen Transcendenten, von denen im Folgenden die Rede wird, stattfindet. Diese Beziehung giebt ein Satz am Ende dieser Abhandlung.

Die Function  $F(z)$  genügt offenbar der Gleichung

$$(2) \quad F(z + 1) = \mathbf{r}(z) F(z),$$

wo

$$(3) \quad \mathbf{r}(z) = e^{\alpha} \frac{(z - a_1)^{\mu_1} (z - a_2)^{\mu_2} \dots (z - a_r)^{\mu_r}}{(z - b_1)^{\nu_1} (z - b_2)^{\nu_2} \dots (z - b_s)^{\nu_s}}$$

ist.

Zum Ausgangspuncke unserer Untersuchungen hätten wir eine Function der noch allgemeineren Form

$$f(z) = e^{\alpha z} \frac{\prod_{\rho=1}^r \Gamma^{\mu_\rho}(a_\rho z - a'_\rho) \prod_{\rho=1}^p \Gamma^{m_\rho}(c_\rho - \gamma_\rho z)}{\prod_{\rho=1}^s \Gamma^{\nu_\rho}(\beta_\rho z - b_\rho) \prod_{\rho=1}^q \Gamma^{n_\rho}(d_\rho - \delta_\rho z)},$$

wählen können, in welcher  $\mu, \nu, m, n, \alpha, \beta, \gamma, \delta$  positive ganze Zahlen und  $a, b, c, d$  beliebige von  $z$  unabhängige Grössen bezeichnen. Dass dies nicht geschehen ist, hat hauptsächlich seinen Grund in dem folgenden Satze:

*Jeder beliebigen rationalen Function  $\mathbf{r}(z)$  entspricht eine und zwar, wenn man von einem Factor  $e^{2k\pi iz}$ , wo  $k$  eine ganze Zahl, absieht, nur eine einzige Function, welche die Form (1) hat und der Gleichung (2) genügt. Jede andere Function, die derselben Gleichung genügt wie  $F(z)$ , kann auf die Form  $\varphi(z)F(z)$  gebracht werden, wo  $\varphi(z)$  eine gewisse Function mit der Periode 1 bezeichnet.*

Auf Grund dieses Satzes, von dessen Richtigkeit man sich sofort überzeugt, können die Functionen der Form (1) als die Grundformen betrachtet werden, aus denen man alle übrigen einer Gleichung (2) genügenden Functionen durch Multiplication mit periodischen Functionen erhält.

## I.

Der Eigenschaft  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  der Gammafunction entspricht die Eigenschaft  $F(z+1) = r(z)F(z)$  von  $F(z)$ . Ebenso entspricht der Eigenschaft<sup>1</sup>

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(z+m)}{(z+m)^z} = 1$$

der erstenen Function eine ähnliche Eigenschaft der letzteren. Stellt man nämlich diese Gleichung mit dem Ausdrucke von  $F(z)$  zusammen, so findet man dass

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{F(z+m)}{(z, m)} = 1$$

ist, wo die Grösse  $(z, m)$  durch die Gleichung

$$(z, m) = e^{a(z+m)} \frac{(|m-1| m^{z-a_1})^{\mu_1} (|m-1| m^{z-a_2})^{\mu_2} \dots (|m-1| m^{z-a_r})^{\mu_r}}{(|m-1| m^{z-b_1})^{\nu_1} (|m-1| m^{z-b_2})^{\nu_2} \dots (|m-1| m^{z-b_s})^{\nu_s}}$$

definiert ist. Setzt man zur Abkürzung

$$(4) \quad \mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r,$$

$$(5) \quad \nu = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_s,$$

$$(6) \quad x = \nu_1 b_1 + \nu_2 b_2 + \dots + \nu_s b_s - \mu_1 a_1 - \mu_2 a_2 - \dots - \mu_r a_r,$$

so kann  $(z, m)$  in der einfachen Form

$$(7) \quad (z, m) = e^{a(z+m)} (|m-1| m^z)^{\mu-\nu} m^x$$

geschrieben werden.

<sup>1</sup>  $m^z = 1 + z \log m + \frac{z^2}{1 \cdot 2} \log^2 m + \dots$ ; mit  $\log m$  ist der reelle Logarithmus zu verstehen.

Es befriedigt also  $F(z)$  ein System von Functionalgleichungen von folgender Form

$$(8) \quad \begin{cases} F(z + 1) = \mathbf{r}(z) F(z) \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{F(z + m)}{(z, m)} = 1. \end{cases}$$

Durch wiederholte Anwendung der erstenen dieser Gleichungen ergiebt sich

$$F(z) = \frac{F(z + m)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z + 1) \dots \mathbf{r}(z + m - 1)} = \frac{F(z + m)}{(z, m)} \cdot \frac{(z, m)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z + 1) \dots \mathbf{r}(z + m - 1)}.$$

Wendet man auch die letztere an, so folgt

$$(9) \quad F(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{e^{\alpha(z+m)} ((m-1)m^z)^{\mu-\nu} m^\nu}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z + 1) \dots \mathbf{r}(z + m - 1)}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung hat also einen bestimmten endlichen Werth für jeden Werth  $z$ , der nicht gleich einer Unendlichkeitsstelle von  $F(z)$  ist. Da dieser neue eindeutige Ausdruck für  $F(z)$  eine nothwendige Folge der Bedingungen (8) allein ist, so geht daraus zugleich hervor, dass  $F(z)$  durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt ist.

Die Gradzahl des Zählers von  $\mathbf{r}(z)$  ist offenbar gleich  $\mu$  und die des Nenners gleich  $\nu$ . Ist  $\mu > \nu$  so ist immer

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (z, m) = \infty;$$

ist  $\mu < \nu$  so ist immer

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (z, m) = 0;$$

ist  $\mu = \nu$  so ist

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (z, m) = \infty,$$

wenn der reelle Theil von  $\alpha$  positiv ist, und

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (z, m) = 0,$$

wenn derselbe negativ ist. Ist dagegen der reelle Theil von  $\alpha$  gleich Null, so ist

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (z, m) = \infty,$$

wenn der reelle Theil von  $z$  positiv ist, und

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (z, m) = 0,$$

wenn derselbe negativ ist. Ist auch der reelle Theil von  $z$  gleich Null, so ist

$$|(z, m)| = |e^{az}|.$$

Die letztere der Gleichungen (8) sagt also aus, wie sich die Function  $F(z)$  verhält, wenn das Argument  $z = x + iy$  sich dem Puncte  $\infty$  in positiver Richtung längs einer der  $x$ -Axe parallelen Gerade nähert.

Wir setzen hier noch folgende Bezeichnungen fest, die wir künftig anwenden werden:

$$(10) \quad \mathbf{s}(z) = \frac{1}{\mathbf{r}(z)}$$

$$(11) \quad \mathbf{r}_0(z) = e^a (z - a_1)^{n_1} (z - a_2)^{n_2} \dots (z - a_r)^{n_r}$$

$$(12) \quad \mathbf{r}_1(z) = (z - b_1)^{\nu_1} (z - b_2)^{\nu_2} \dots (z - b_s)^{\nu_s}$$

$$(13) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{r}(z) = M.$$

Ist die Gradzahl  $\mu$  von  $\mathbf{r}_0(z)$  grösser als die Gradzahl  $\nu$  von  $\mathbf{r}_1(z)$ , so ist  $M = \infty$ . Ist  $\mu < \nu$  so ist  $M = 0$ . Ist  $\mu = \nu$  so ist

$$M = e^a.$$

## 2.

Es hat sich zweckmässig gezeigt, die Constanten  $a$  und  $b$  in  $F(z)$  einer gewissen Bedingung zu unterwerfen, und zwar der Bedingung, dass die Differenz irgend zweier dieser Grössen weder eine positive noch eine negative ganze Zahl sein darf. Vermöge der Gleichung  $F(z+1) = zF(z)$  findet man, dass diese Bedingung nicht von einer mehr beschränkenden Natur ist, als dass  $F(z)$ , wenn die Bedingung nicht erfüllt wäre, auf die Form eines Productes gebracht werden könnte, dessen Factoren eine ra-

tionale Function und eine Function derselben Form wie  $F(z)$  sein würden, in der aber die Constanten  $a, b$  die fragliche Bedingung erfüllten.

Ist diese Bedingung festgestellt, so können niemals zwei von den  $r+s$  Functionen

$$\Gamma^{\mu_1}(z - a_1), \dots, \Gamma^{\mu_r}(z - a_r), \quad \Gamma^{\nu_1}(z - b_1), \dots, \Gamma^{\nu_s}(z - b_s)$$

für denselben Werth  $z$  unendlich werden.

Da die Gammafunction keine Nullstelle besitzt, so kann auch der Nenner von  $F(z)$  für keinen Werth des Arguments gleich Null werden. Diejenigen Werthe, für die  $F(z)$  unendlich wird, sind daher in den Unendlichkeitsstellen des Zählers enthalten. Der Factor  $\Gamma^{\mu_\rho}(z - a_\rho)$  des Zählers von  $F(z)$  wird immer und nur dann unendlich, wenn  $z - a_\rho$  entweder gleich Null oder gleich einer negativen ganzen Zahl ist, d. h. für

$$(14) \quad z = a_\rho, a_\rho - 1, \dots, a_\rho - n, \dots,$$

und zwar wird er an jeder dieser Stellen unendlich der Ordnung  $\mu_\rho$ . Da keiner von den übrigen Factoren des Zählers und auch keiner von denen des Nenners zufolge der festgestellten Bedingung an diesen Stellen unendlich werden kann, so wird auch die Function  $F(z)$  selbst für jeden der Werthe (14) unendlich der Ordnung  $\mu_\rho$ . Setzt man in (14)  $\rho = 1, 2, \dots, r$ , so ergeben sich sämmtliche Unendlichkeitsstellen für  $F(z)$ . Diese Stellen zerfallen also in  $r$  arithmetische Reihen, die den  $r$  Factoren im Zähler von  $F(z)$  entsprechen.

In ähnlicher Weise ergiebt sich, dass die Nullstellen von  $F(z)$  als Glieder in den  $s$  arithmetischen Reihen enthalten sind, welche man erhält, indem man in

$$(15) \quad b_\rho, b_\rho - 1, \dots, b_\rho - n, \dots$$

den Index  $\rho$  die Werthe  $1, 2, \dots, s$  durchlaufen lässt. An jeder der Stellen (15) wird  $F(z)$  Null von der Ordnung  $\nu_\rho$ .

Die Nullstellen des Zählers  $\mathbf{r}_0(z)$  der rationalen Function  $\mathbf{r}(z)$  sind nach § 1

$$(16) \quad a_1, a_2, \dots, a_r,$$

und zwar sind diese bezüglich von den Ordnungen  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ . Jede

dieser Stellen ist als erstes Glied in einer der  $r$  arithmetischen Reihen enthalten, in welche die Unendlichkeitsstellen von  $F(z)$  zerfallen.

Die Nullstellen des Nenners  $\mathbf{r}_1(z)$  von  $\mathbf{r}(z)$  sind

$$(17) \quad b_1, b_2, \dots, b_s,$$

und zwar haben diese bezüglich die Ordnungen  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s$ . Jede dieser Stellen ist als erstes Glied in einer der  $s$  arithmetischen Reihen enthalten, in welche die Nullstellen von  $F(z)$  zerfallen.

Da keine zwei von den Grössen  $a, b$  einander gleich sind, so können Zähler und Nenner in  $\mathbf{r}(z)$  keinen gemeinschaftlichen Theiler haben.

### 3.

Im ersten Theile der schon citirten Arbeit habe ich gezeigt, dass die Function  $F(z) = \Gamma^\mu(z)$ , welche der Gleichung

$$F(z+1) = z^\mu F(z)$$

genügt, als Summe einer Partialbruchreihe  $P(z)$  und einer beständig convergirenden Potenzreihe  $Q(z)$  dargestellt werden kann, von denen  $P(z)$  einer Gleichung

$$P(z+1) = z^\mu P(z) - R(z)$$

genügt, wo  $R(z)$  eine gewisse ganze rationale Function, deren Gradzahl nicht grösser als  $\mu - 1$  ist, bezeichnet. Hieraus folgte sodann, dass  $Q(z)$  der Gleichung

$$Q(z+1) = z^\mu Q(z) + R(z)$$

Genüge leistet.

Diese Ergebnisse geben Veranlassung zu der Vermuthung, dass sich ähnliche Sätze auch für die durch Gleichung (1) definierte allgemeinere Function  $F(z)$  beweisen lassen müssen. Diese Function befriedigt die Gleichung

$$F(z+1) = \mathbf{r}(z)F(z)$$

oder

$$\mathbf{r}_1(z)F(z+1) - \mathbf{r}_0(z)F(z) = 0.$$

Nach dem MITTAG-LEFFLER'schen Satze kann man

$$F(z) = P(z) + Q(z)$$

setzen, wo  $P(z)$  eine Partialbruchreihe und  $Q(z)$  eine beständig convergirende Potenzreihe bezeichnet. Es liegt nun am nächsten anzunehmen, dass  $P(z)$  die Gleichung

$$\mathbf{r}_1(z)P(z+1) - \mathbf{r}_0(z)P(z) = -R(z)$$

befriedige, wo  $R(z)$  sowie  $\mathbf{r}_0(z)$  und  $\mathbf{r}_1(z)$  eine ganze rationale oder wenigstens eine ganze transcendent Function bedeutet. Wäre diese Annahme richtig, so würde  $Q(z)$  die Eigenschaft

$$\mathbf{r}_1(z)Q(z+1) - \mathbf{r}_0(z)Q(z) = R(z)$$

besitzen. Diese Gleichung sagt indessen nur in dem Falle etwas Bemerkenswerthes aus, wo sich  $R(z)$  auf eine ganze rationale Function reducirt.

Die allgemeine Form der Partialbruchreihe  $P(z)$  kann nach dem, was in § 2 gesagt ist, leicht aufgestellt werden. Setzt man

$$(18) \quad S(z; a_\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{A_{\mu_\rho}^{(\rho, n)}}{(z-a_\rho+n)^{\mu_\rho}} + \frac{A_{\mu_\rho-1}^{(\rho, n)}}{(z-a_\rho+n)^{\mu_\rho-1}} + \dots + \frac{A_1^{(\rho, n)}}{z-a_\rho+n} + g_n(z, a_\rho) \right),$$

wo  $A$  Constante und  $g$  ganze rationale Functionen bezeichnen, die so zu wählen sind, dass die Reihe gleichmässig convergirt, so kann  $P(z)$  in der Form

$$(19) \quad S(z) = S(z; a_1) + S(z; a_2) + \dots + S(z; a_r)$$

geschrieben werden.

Wenn die Constanten  $A$  solche specielle Werthe haben, dass  $S(z)$  als Partialbruchreihe für  $F(z)$  betrachtet werden kann, so wenden wir folgende Bezeichnungen an

$$P(z) \quad \text{statt} \quad S(z)$$

$$P(z; a_\rho) \quad \Rightarrow \quad S(z; a_\rho).$$

Bevor wir die Constanten  $A$  der Partialbruchreihe  $P(z)$  bestimmen, suchen wir erst die Frage zu beantworten, ob es überhaupt möglich sei,

in einem Ausdrücke der Form  $S(z)$  die Constanten  $A$  und die ganzen rationalen Functionen  $g$  so zu bestimmen, dass die  $r$  Reihen, von denen  $S(z)$  eine Summe ist, gleichmässig convergirende Reihen ergeben und die Differenz

$$(20) \quad \mathbf{r}_1(z)S(z+1) - \mathbf{r}_0(z)S(z)$$

eine ganze, rationale oder transcendentale, Function werde. Ist dies möglich, so kann die Differenz

$$S(z+1) - \mathbf{r}(z)S(z)$$

im Endlichen nur für solche Werthe unendlich werden, für welche der Nenner von  $\mathbf{r}(z)$  verschwindet.

Vorausgesetzt, dass die Reihen, von denen  $S(z)$  eine Summe ist, gleichmässig convergiren, so stellt der Ausdruck (20) immer und nur dann eine ganze Function dar, wenn er in der Umgebung jeder Unendlichkeitsstelle  $\omega$  für  $S(z)$  oder  $S(z+1)$  nach positiven ganzzahligen Potenzen von  $z - \omega$  entwickelt werden kann. Es müssen mithin  $\mathbf{r}_0(z)S(z)$  und  $\mathbf{r}_1(z)S(z+1)$  für dieselben Werthe unendlich werden und zwar so, dass in den Entwickelungen derselben nach ganzen Potenzen von  $z - \omega$  die Coefficienten der gleich hohen negativen Potenzen beziehungsweise einander gleich sind.

Die Unendlichkeitsstellen von  $S(z)$  sind als Glieder in den  $r$  arithmetischen Reihen

$$(21) \quad a_\rho, a_\rho - 1, \dots, a_\rho - n, \dots \\ \rho = 1, 2, \dots, r$$

enthalten. Die ersten Glieder

$$a_1, a_2, \dots, a_r$$

sind offenbar keine Unendlichkeitsstellen für  $S(z+1)$ . Das Product  $\mathbf{r}_0(z)S(z)$  kann auch an keiner der letztgenannten Stellen unendlich werden, denn  $\mathbf{r}_0(z)$  wird für  $z = a_\rho$  Null von der Ordnung  $\mu_\rho$ , während  $S(z)$  für denselben Werth unendlich höchstens von der Ordnung  $\mu_\rho$  werden kann. Die Differenz (20) kann mithin, auch wenn die Grössen  $A$  in  $S(z)$  unbestimmt gelassen werden, nur an denjenigen Stellen einen

unendlich grossen Werth annehmen, wo  $S(z)$  und  $S(z + 1)$  beide gleichzeitig unendlich werden. Diese für  $S(z)$  und  $S(z + 1)$  gemeinschaftlichen Unendlichkeitsstellen sind offenbar als Glieder in den  $r$  arithmetischen Reihen

$$(22) \quad a_\rho = 1, a_\rho = 2, \dots, a_\rho = n, \dots \\ \rho = 1, 2, \dots, r$$

enthalten, die man aus den Reihen (21) durch Absonderung der resp. ersten Glieder erhält. Diesen Reihen entsprechen resp. die  $r$  Differenzen

$$(23) \quad \mathbf{r}_1(z) S(z + 1; a_\rho) - \mathbf{r}_0(z) S(z; a_\rho) \\ \rho = 1, 2, \dots, r$$

in welche die Differenz (20) aufgelöst werden kann und für welche sie bezüglich die Reihen der Unendlichkeitsstellen bilden, wenn die Grössen  $A$  als unbestimmt betrachtet werden. Nach den Voraussetzungen, die in §. 2 gemacht wurden, sind je zwei dieser Reihen in den Gliedern von einander ganz verschieden, und es können also keine zwei der Differenzen (23) an derselben Stelle unendlich werden. Damit die Differenz (20) eine ganze Function sei, ist es daher nothwendig, und hinreichend, dass auch eine jede der  $r$  Differenzen (23) eine ganze Function sein soll.

In der Umgebung einer für  $S(z; a_\rho)$  und  $S(z + 1; a_\rho)$  gemeinschaftlichen Unendlichkeitsstelle  $a_\rho = n$ ,  $n \geqq 1$ , hat man

$$S(z; a_\rho) = \frac{A_{\rho\rho}^{(\rho, n)}}{(z - a_\rho + n)^{\mu_\rho}} + \dots + \frac{A_1^{(\rho, n)}}{z - a_\rho + n} + \mathfrak{G}(z - a_\rho + n)$$

und

$$S(z + 1; a_\rho) = \frac{A_{\rho\rho}^{(\rho, n-1)}}{(z - a_\rho + n)^{\mu_\rho}} + \dots + \frac{A_1^{(\rho, n-1)}}{z - a_\rho + n} + \mathfrak{G}_1(z - a_\rho + n),$$

wo  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{G}_1$  nach positiven, ganzzahligen Potenzen von  $z - a_\rho + n$  fortschreitende Reihen bezeichnen. Soll nun die Differenz

$$(24) \quad \mathbf{r}_1(z) S(z + 1; a_\rho) - \mathbf{r}_0(z) S(z; a_\rho)$$

eine ganze Function sein, so ist es, vorausgesetzt, dass die Reihe  $S(z; a_\rho)$

gleichmässig convergirt, daher nothwendig und hinreichend, die Constanten  $A$  so bestimmen zu können, dass eine jede der unendlich vielen rationalen Functionen

$$(25) \quad \mathbf{r}_1(z) \left( \frac{A_{\mu\rho}^{(\rho, n-1)}}{(z - a_\rho + n)^{\mu\rho}} + \dots + \frac{A_1^{(\rho, n-1)}}{z - a_\rho + n} \right)$$

$$= \mathbf{r}_0(z) \left( \frac{A_{\mu\rho}^{(\rho, n)}}{(z - a_\rho + n)^{\mu\rho}} + \dots + \frac{A_1^{(\rho, n)}}{z - a_\rho + n} \right)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

eine *ganze* rationale Function werde.

Für den reciproken Werth der rationalen Function  $\mathbf{r}(z)$  haben wir die Bezeichnung  $\mathbf{s}(z)$  gewählt. Da der Nenner  $\mathbf{r}_0(z)$  von  $\mathbf{s}(z)$  nach den in § 2 festgesetzten Bedingungen an keiner der Stellen

$$z = a_\rho - n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Null werden kann, so sind die Functionen (25) immer und nur dann alle ganze rationale Functionen, wenn die aus ihnen mittelst Division durch  $-\mathbf{r}_0(z)$  abgeleiteten Functionen

$$\frac{A_{\mu\rho}^{(\rho, n)}}{(z - a_\rho + n)^{\mu\rho}} + \dots + \frac{A_1^{(\rho, n)}}{z - a_\rho + n}$$

$$= \mathbf{s}(z) \left( \frac{A_{\mu\rho}^{(\rho, n-1)}}{(z - a_\rho + n)^{\mu\rho}} + \dots + \frac{A_1^{(\rho, n+1)}}{z - a_\rho + n} \right)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

bezüglich nach positiven ganzen Potenzen von

$$z - a_\rho + n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

entwickelt werden können. Wendet man nun die Gleichung an

$$\mathbf{s}(z) = \mathbf{s}(a_\rho - n) + \mathbf{s}'(a_\rho - n)(z - a_\rho + n) + \dots + \frac{\mathbf{s}^{(k)}(a_\rho - n)}{|k|}(z - a_\rho + n)^k + \dots,$$

bewerkstelligt die Entwicklung und setzt die Coefficienten der negativen Potenzen von  $z - a_\rho + n$  gleich Null, so ergeben sich die Gleichungen

$$A_{\mu'}^{(n)} = \mathbf{s}(a - n) A_{\mu'}^{(n-1)}$$

$$A_{\mu'-1}^{(n)} = \mathbf{s}'(a - n) A_{\mu'}^{(n-1)} + \mathbf{s}(a - n) A_{\mu'-1}^{(n-1)}$$

. . . . .

$$(26) \quad A_{\mu'-k}^{(n)} = \frac{\mathbf{s}^{(k)}(a - n)}{|k|} A_{\mu'}^{(n-1)} + \frac{\mathbf{s}^{(k-1)}(a - n)}{|k-1|} A_{\mu'-1}^{(n-1)} + \dots + \mathbf{s}(a - n) A_{\mu'-k}^{(n-1)}$$

$$A_1^{(n)} = \frac{\mathbf{s}^{(n'-1)}(a - n)}{|\mu' - 1|} A_{\mu'}^{(n-1)} + \frac{\mathbf{s}^{(n'-2)}(a - n)}{|\mu' - 2|} A_{\mu'-1}^{(n-1)} + \dots + \mathbf{s}(a - n) A_1^{(n-1)},$$

$$n = 1, 2, 3, \dots,$$

wo der Index  $\rho$  der Kürze halber überall fortgelassen ist, indem ich

$$A_{\mu'-k}^{(\rho, n)} = A_{\mu'-k}^{(n)}, \quad a_\rho = a, \quad \mu_\rho = \mu'$$

gesetzt habe.

Unter Voraussetzung der gleichmässigen Convergenz der Reihe  $S(z; a_\rho)$  drücken die recurrirenden Gleichungen (26) die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür aus, dass die Differenz (24) eine ganze Function sein soll.

Sobald den Constanten

$$A_{\mu'}^{(0)}, A_{\mu'-1}^{(0)}, \dots, A_1^{(0)}$$

des ersten Gliedes von  $S(z; a_\rho)$  beliebige bestimmte Werthe zuertheilt werden, so sind die Constanten  $A$  der folgenden Glieder durch die Formeln (26) eindeutig bestimmt, und zwar sind für jedes  $n$

$$A_{\mu'}^{(n)}, A_{\mu'-1}^{(n)}, \dots, A_1^{(n)}$$

homogene lineare Functionen von

$$A_{\mu'}^{(0)}, A_{\mu'-1}^{(0)}, \dots, A_1^{(0)}.$$

Bedenkt man nun, dass man immer, wie auch die Constanten  $A$  des ersten Gliedes von  $S(z; a_\rho)$  gewählt worden seien, nachdem den-

jenigen der folgenden Glieder die aus den Formeln (26) sich ergebenden Werthe zuertheilt worden sind, solche ganze rationale Functionen  $g_0(z; a_\rho)$ ,  $g_1(z; a_\rho)$ , ... darstellen kann, dass  $S(z; a_\rho)$  zu einer gleichmässig convergirenden Reihe wird, so geht hieraus hervor, dass es unendlich viele Functionen der Form  $S(z; a_\rho)$  geben muss, welche die Eigenschaft besitzen, die Gleichung

$$\mathbf{r}_1(z) S(z + 1; a_\rho) = \mathbf{r}_0(z) S(z; a_\rho) - R(z; a_\rho)$$

zu befriedigen, wo  $R(z; a_\rho)$  den Charakter einer ganzen Function hat. Wird auf beide Seiten dieser Gleichung durch  $\mathbf{r}_1(z)$  dividirt, so folgt

$$(27) \quad S(z + 1; a_\rho) = \mathbf{r}(z) S(z; a_\rho) - \mathbf{R}(z; a_\rho),$$

wo

$$\mathbf{R}(z; a_\rho) = \frac{R(z; a_\rho)}{\mathbf{r}_1(z)}.$$

Die Gleichung (27) drückt eine bemerkenswerthe Eigenschaft der Function  $S(z; a_\rho)$  aus, weil die beiden Functionen  $\mathbf{r}(z)$  und  $\mathbf{R}(z; a_\rho)$  nur eine endliche Anzahl von Unendlichkeitsstellen haben, während die Anzahl derselben für  $S(z; a_\rho)$  eine unendliche ist.

Auf Grund der jetzt gewonnenen Resultate ergiebt sich in Bezug auf den Ausdruck  $S(z)$ , dessen allgemeine Form die Gleichungen (18) und (19) angeben, Folgendes. Es giebt unendlich viele Functionen dieser Form, welche die Eigenschaft besitzen, der Gleichung

$$(28) \quad S(z + 1) = \mathbf{r}(z) S(z) - \mathbf{R}(z)$$

zu genügen, wo  $\mathbf{R}(z)$  eine Function bezeichnet, welche in der Form eines Quotienten, dessen Zähler eine ganze Function und dessen Nenner die rationale ganze Function  $\mathbf{r}_1(z)$  ist, dargestellt werden kann. Soll  $S(z)$  dieser Gleichung genügen, so müssen vor allem die Constanten  $A$  der Reihen, von denen  $S(z)$  eine Summe ist, durch  $r$  diesen Reihen entsprechende Gleichungssysteme der Form (26) bestimmt werden. Sind ausserdem die ganzen rationalen Functionen  $g$  so bestimmt, dass diese  $r$  Reihen gleichmässig convergiren, so sind zugleich alle Bedingungen dafür, dass  $S(z)$  eine Function der angegebenen Beschaffenheit darstelle, erfüllt.

Die zu  $F(z)$  gehörige Partialbruchreihe  $P(z)$  hat dieselbe Form wie  $S(z)$ . Es ist nun die Frage zu beantworten, ob sie auch einer Gleichung derselben Form genügt wie  $S(z)$ .

## 4.

Wir nehmen an, dass die Constanten  $A$  in dem allgemeinen Ausdrucke  $S(z)$  solche specielle Werthe haben, dass wir

$$S(z) = P(z)$$

$$\begin{aligned} S(z; a_\rho) &= P(z; a_\rho) \\ \rho &= 1, 2, \dots, r \end{aligned}$$

setzen können, und werden zeigen, dass die zur Reihe  $P(z; a_\rho)$  gehörigen Constanten  $A$  die Bedingungen (26) erfüllen. Damit ist auch bewiesen, dass  $P(z; a_\rho)$  die Gleichung

$$P(z + 1; a_\rho) = \mathbf{r}(z)P(z; a_\rho) - \mathbf{R}(z; a_\rho)$$

und mithin  $P(z)$  die Gleichung

$$P(z + 1) = \mathbf{r}(z)P(z) - \mathbf{R}(z)$$

erfüllt, wo mit  $\mathbf{R}(z; a_\rho)$  und  $\mathbf{R}(z)$  Functionen bezeichnet werden, die sich beide in der Form eines Quotienten, dessen Zähler eine ganze Function und dessen Nenner die rationale ganze Function  $\mathbf{r}_1(z)$  ist, darstellen lassen.

Wenn die Constanten  $A$  die fraglichen Werthe besitzen, so gilt für eine gewisse Umgebung der Stelle

$$z = a_\rho - n$$

die Gleichung

$$F(z) = \frac{A_{\mu'}^{(n)}}{(z - a + n)^{\mu'}} + \dots + \frac{A_1^{(n)}}{z - a + n} + \mathfrak{G}(z - a + n),$$

wo

$$A_{\mu'-k}^{(n)} = A_{\mu-\rho-k}^{(\rho, n)}, \quad a = a_\rho, \quad \mu' = \mu_\rho$$

und  $\mathfrak{G}$  eine nach positiven ganzzahligen Potenzen von  $z - a + n$  fortschreitende Reihe bezeichnet. Bekanntlich kann man nun eine jede der Grössen  $A$  in der Form eines bestimmten Integrals ausdrücken, und zwar ist

$$(29) \quad A_{\mu'-k}^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(a - n + re^{it}) (re^{it})^{\mu'-k} dt,$$

wo  $r$  eine beliebige positive Grösse, welche kleiner als der Convergenzradius der Reihe  $\mathfrak{G}$  ist, bezeichnet. Aus (29) ergiebt sich

$$(30) \quad A_{\mu'-k}^{(n-1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(a - n + 1 + re^{it}) (re^{it})^{\mu'-k} dt.$$

Setzt man in (29)

$$\begin{aligned} F(a - n + re^{it}) &= F(a - n + 1 + re^{it}) \mathbf{s}(a - n + re^{it}) \\ &= F(a - n + 1 + re^{it}) \left( \sum_{\lambda=0}^{\lambda=k} \frac{\mathbf{s}^{(\lambda)}(a - n)}{|\lambda|} (re^{it})^\lambda + (re^{it})^{k+1} f(re^{it}) \right), \end{aligned}$$

führt die Integration gliedweise aus und beachtet die Gleichung (30), so folgt

$$\begin{aligned} (31) \quad A_{\mu'-k}^{(n)} &= \mathbf{s}(a - n) A_{\mu'-k}^{(n-1)} + \mathbf{s}'(a - n) A_{\mu'-k+1}^{(n-1)} + \dots + \frac{\mathbf{s}^{(k)}(a - n)}{|k|} A_{\mu'}^{(n-1)} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(a - n + 1 + re^{it}) (re^{it})^{\mu'+1} f(re^{it}) dt. \end{aligned}$$

Hier bezeichnet  $f(re^{it})$  offenbar eine in Bezug auf  $re^{it}$  rationale Function, die für  $r = 0$  einen endlichen Werth annimmt. Weil

$$\lim_{r \rightarrow 0} F(a - n + 1 + re^{it}) (re^{it})^{\mu'}$$

eine endliche Grösse ist, und mithin

$$\lim_{r \rightarrow 0} F(a - n + 1 + re^{it}) (re^{it})^{\mu'+1} f(re^{it}) = 0,$$

so ist das letzte Glied der rechten Seite von (31) ebenfalls gleich Null.

Wird dasselbe aus der Gleichung fortgelassen und werden die übrigen Glieder der rechten Seite in umgekehrter Reihenfolge geschrieben, so erhält man

$$A_{\mu'-k}^{(n)} = \frac{\mathbf{s}^{(k)}(a-n)}{|k|} A_{\mu'}^{(n-1)} + \frac{\mathbf{s}^{(k-1)}(a-n)}{|k-1|} A_{\mu'-k}^{(n-1)} + \dots + \mathbf{s}(a-n) A_{\mu'-k}^{(n-1)}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Constanten  $A$  der Partialbruchreihe  $P(z; a_\rho)$  den Bedingungen (26) genügen.

*Es ist mithin eine ganz allgemeine und zugleich bemerkenswerthe Eigenschaft der Partialbruchreihe  $P(z)$  jeder Function  $F(z)$ , welche die in § 2 erwähnten Bedingungen erfüllt, dass sie der Gleichung*

$$P(z+1) = \mathbf{r}(z)P(z) - \mathbf{R}(z)$$

genügt, mithin eine ähnliche Eigenschaft besitzt wie die Function  $F(z)$ , welche die Gleichung

$$F(z+1) = \mathbf{r}(z)F(z)$$

befriedigt. Die Function  $\mathbf{R}(z)$  ist in der Form eines Quotienten darstellbar, dessen Zähler eine ganze Function und dessen Nenner gleich demjenigen von  $\mathbf{r}(z)$  ist.

Aus den vorigen Untersuchungen hat sich ferner ergeben, dass es unendlich viele andere Functionen giebt, welche gleichwie  $P(z)$  einer Gleichung der Form (28) genügen.

Unter diesen Functionen  $S(z)$ , welche die Eigenschaft besitzen, einer Gleichung der Form (28) zu genügen, sind natürlich diejenigen am meisten bemerkenswerth, für welche  $\mathbf{R}(z)$  sich auf eine rationale Function reducirt.

Bis jetzt ist die rationale Function  $\mathbf{r}(z)$  keinen anderen Bedingungen unterworfen gewesen, als dass der Zähler keine Constante und die Differenz irgend zweier der  $r+s$  Grössen  $a, b$  keine ganze Zahl sei. Ist  $\mathbf{r}(z)$  gegeben, so ist auch diejenige Function der Form (1), die der Gleichung

$$F(z+1) = \mathbf{r}(z)F(z)$$

genügt, eindeutig bestimmt bis auf einen Factor  $e^{2k\pi i z}$ , wo  $k$  eine ganze Zahl. Umgekehrt ist  $\mathbf{r}(z)$  eindeutig bestimmt, wenn  $F(z)$  gegeben ist.

Weiterhin werden wir berücksichtigen ob, die Grösse

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{r}(z) = M$$

dem absoluten Betrage nach grösser als, gleich oder kleiner als 1 ist.  
Von nun an soll vorausgesetzt sein, dass

$$|M| > 1.$$

Für diesen Fall wollen wir zunächst zeigen, dass die Reihen

$$S(z; a_1), \quad S(z; a_2), \quad \dots, \quad S(z; a_r),$$

von denen  $S(z)$  eine Summe ist, auch dann gleichmässig convergiren, wenn man die in den Gliedern derselben vorkommenden ganzen rationalen Functionen  $g$  gleich Null annimmt. Alle auf diese Weise erhaltenen Functionen  $S(z)$  zeichnen sich dadurch aus, dass die entsprechenden Functionen  $\mathbf{R}(z)$  immer rational sind.

Von grossem Interesse ist der Fall, wo  $|M| = 1$  ist; hierher gehören beispielsweise die Potenzen des EULER'schen Integrals erster Gattung

$$\int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{a-1} dt = \frac{\Gamma(z) \Gamma(a)}{\Gamma(z+a)}.$$

In diesem Falle convergiren die Reihen  $S(z)$  zwar nicht immer gleichmässig, wenn die ganzen rationalen Functionen  $g$  gleich Null angenommen werden, wohl aber kann man bewirken, dass die Reihen gleichmässig convergiren, ohne dass die Gradzahl der Functionen  $g$  mit der Ordnungszahl über jede Grenze hinaus zu wachsen braucht. Die Untersuchung für den Fall, wo  $|M| = 1$  ist, will ich einer späteren Arbeit aufbewahren, da sie nicht durch so einfache Betrachtungen, wie sie weiterhin in Frage kommen, erledigt werden kann.

Von nicht so grosse Interesse scheint der Fall zu sein, wo  $|M| < 1$  ist, weil die Gradzahl der Functionen  $g$  mit der Ordnungszahl über jede Grenze hieraus wachsen muss, damit die Reihen  $S(z)$  gleichmässig convergiren.

## 5.

Wir setzen also im Folgenden voraus, dass die Gradzahl des Zählers von  $\mathbf{r}(z)$  entweder grösser als die des Nenners oder gleich derselben sei, und, wenn das letztere zutrifft, dass

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{r}(z) = M$$

dem absoluten Betrage nach grösser als 1 ist, mit andern Worten, dass

$$0 \leq \left| \frac{1}{M} \right| < 1.$$

Ist dann

$$(32) \quad S(z; a_\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{A_{\mu'}^{(n)}}{(z - a + n)^{\mu'}} + \frac{A_{\mu'-1}^{(n)}}{(z - a + n)^{\mu'-1}} + \cdots + \frac{A_1^{(n)}}{z - a + n} \right)$$

$$(A_{\mu'-k}^{(n)} = A_{\mu-\rho}^{(\rho, n)}, \quad a = a_\rho, \quad \mu' = \mu_\rho)$$

eine Partialbruchreihe, in der die Grössen  $A$  die Bedingungen (26) erfüllen, so kann bewiesen werden, dass diese Reihe gleichmässig convergiert.

— Es sei nämlich  $\varepsilon$  eine positive Grösse, welche die Bedingung

$$\left| \frac{1}{M} \right| < \varepsilon < 1$$

erfüllt. Weil

$$\mathbf{s}(z) = \frac{1}{\mathbf{r}(z)}$$

ist, und mithin

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{s}(z) = \frac{1}{M},$$

so kann immer eine positive Grösse  $\rho$  so angenommen werden, dass

$$|\mathbf{s}(z)| < \varepsilon,$$

wenn die Veränderliche  $z$  dem absoluten Betrage nach grösser als  $\rho$  ist. Wird  $\mathbf{s}(z)$  in der bekannten Form einer Summe von Partialbrüchen und

einer ganzen Function dargestellt, so muss offenbar diese ganze Function gleich  $\frac{1}{M}$  sein. Werden nun durch Differentiation ähnliche Ausdrücke für die Ableitungen von  $s(z)$  entwickelt, so leuchtet unmittelbar ein, dass

$$\lim_{z \rightarrow \infty} s^{(k)}(z) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Bezeichnet also  $\delta$  eine positive Grösse, welche die Bedingung

$$\varepsilon + (\mu' - 1)\delta < 1, \quad \mu' = \mu_\rho$$

erfüllt, so ist es immer möglich, eine positive ganze Zahl  $n'$  so anzunehmen, dass die Ungleichheiten

$$|s(a - n)| < \varepsilon, \quad |s'(a - n)| < \delta, \quad \dots, \quad |s^{(\mu'-1)}(a - n)| < \delta$$

stattfinden, wenn  $n$  grösser als  $n'$  ist. Aus den Gleichungen (26) geht nun hervor, dass

$$\begin{aligned} |A_{\mu'}^{(n)}| &\leqq \varepsilon |A_{\mu'}^{(n-1)}| \\ |A_{\mu'-1}^{(n)}| &\leqq \delta |A_{\mu'}^{(n-1)}| + \varepsilon |A_{\mu'-1}^{(n-1)}| \\ |A_{\mu'-2}^{(n)}| &\leqq \delta |A_{\mu'}^{(n-1)}| + \delta |A_{\mu'-1}^{(n-1)}| + \varepsilon |A_{\mu'-2}^{(n-1)}| \\ &\vdots \\ |A_1^{(n)}| &\leqq \delta |A_{\mu'}^{(n-1)}| + \delta |A_{\mu'-1}^{(n-1)}| + \delta |A_{\mu'-2}^{(n-1)}| + \dots + \varepsilon |A_1^{(n-1)}|. \end{aligned}$$

Es ist also

$$\begin{aligned} &|A_{\mu'}^{(n)}| + |A_{\mu'-1}^{(n)}| + \dots + |A_1^{(n)}| \\ &\leqq [\varepsilon + (\mu' - 1)\delta] |A_{\mu'}^{(n-1)}| + [\varepsilon + (\mu' - 2)\delta] |A_{\mu'-1}^{(n-1)}| + \dots + \varepsilon |A_1^{(n-1)}| \end{aligned}$$

und mithin

$$\begin{aligned} &|A_{\mu'}^{(n)}| + |A_{\mu'-1}^{(n)}| + \dots + |A_1^{(n)}| \\ &\leqq [\varepsilon + (\mu' - 1)\delta] (|A_{\mu'}^{(n-1)}| + |A_{\mu'-1}^{(n-1)}| + \dots + |A_1^{(n-1)}|). \end{aligned}$$

Weil  $\varepsilon + (\mu' - 1)\delta < 1$ , so ist

$$(33) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (|A_{\mu'}^{(n)}| + |A_{\mu'-1}^{(n)}| + \dots + |A_1^{(n)}|)$$

eine convergirende Reihe. Nachdem nun die Convergenz der Reihe (33) nachgewiesen ist, so ergeben die gewöhnlichen Schlussfolgerungen, dass die Reihe (32) eine unbedingt und gleichmässig convergirende ist.

Mit der Bezeichnung  $S(z; a_\rho)$  soll im weiteren Verlaufe dieser Untersuchungen immer eine Reihe verstanden sein, welche durch die Gleichung (32) definiert ist. Die Constanten  $A$  sind den Bedingungen (26) unterworfen, durch welche die Constanten

$$A_\mu^{(0)}, A_{\mu-1}^{(0)}, \dots, A_1^{(0)}$$

des ersten Gliedes von  $S(z; a_\rho)$  nicht bestimmt werden. Indem man diesen Constanten verschiedene Werthe beilegt, erhält man eine unendliche Anzahl von Functionen, von denen jede einer Gleichung

$$(34). \quad S(z + 1; a_\rho) = \mathbf{r}(z)S(z; a_\rho) - \mathbf{R}(z; a_\rho)$$

Genüge leistet.

Legt man ferner dem Index  $\rho$  in der Gleichung (32), wo der Kürze halber

$$A_{\mu-\rho}^{(\rho, n)} = A_{\mu'}^{(n)}, \quad a_\rho = a, \quad \mu_\rho = \mu'$$

gesetzt sind, die Werthe  $\rho = 1, 2, 3, \dots, r$  bei, so entstehen  $r$  verschiedene Gruppen von Functionen. Zu jeder dieser Gruppen gehört ein System von recurrirenden Gleichungen der Form (26), mittelst dessen die Constanten  $A$  jeder zur Gruppe gehörigen Function berechnet werden können. Dieses System ist von einem zu einer anderen Gruppe gehörigen Systeme wenigstens in den Coefficienten verschieden. Die Reihen

$$P(z; a_1), \quad P(z; a_2), \quad \dots, \quad P(z; a_r);$$

deren Summe

$$P(z) = P(z; a_1) + P(z; a_2) + \dots + P(z; a_r)$$

gleich der zu  $F(z)$  gehörigen Partialbruchreihe ist, gehören zu je einer dieser  $r$  Gruppen. Diejenige Gruppe, zu welcher  $P(z; a_\rho)$  gehört, wollen wir kurz mit  $(a_\rho)$  bezeichnen. Nach den in § 2 erwähnten Bedingungen können zwei zu verschiedenen Gruppen gehörige Reihen für denselben Werth der Veränderlichen  $z$  nicht unendlich werden. Dagegen werden

alle zur Gruppe  $(a_\rho)$  gehörigen Reihen unendlich, wenn die Veränderliche  $z$  mit einem Gliede der arithmetischen Reihe

$$a_\rho, a_\rho - 1, \dots, a_\rho - n, \dots$$

zusammenfällt.

Die Richtigkeit dieser letzten Behauptung geht aus dem Satze hervor, dass die Constanten  $A$  desselben Gliedes einer Reihe  $S(z; a_\rho)$  nicht gleichzeitig Null sein können, wenn nicht  $S(z; a_\rho)$  identisch gleich Null sein soll. Dieses folgt aus den Gleichungen (26) und zwar, weil nicht nur eine jede der Constanten

$$A_{\mu'}^{(n)}, A_{\mu'-1}^{(n)}, \dots, A_1^{(n)}$$

als eine homogene lineare Function von

$$A_{\mu'}^{(0)}, A_{\mu'-1}^{(0)}, \dots, A_1^{(0)}$$

ausgedrückt werden kann, sondern auch eine jede der letzteren als homogene lineare Function der ersteren, da  $s(a - n)$  von Null verschieden ist.

Aus den nämlichen Gleichungen leuchtet auch die Richtigkeit des folgenden Satzes ein: Wenn jede der Constanten  $A$  des ersten Gliedes einer zur Gruppe  $(a_\rho)$  gehörigen Reihe gleich der entsprechenden Constante einer anderen zu derselben Gruppe gehörigen Reihe ist, so sind die beiden Reihen identisch.

Ferner kann offenbar jede homogene und lineare Function einer Anzahl zu derselben Gruppe gehöriger Reihen gleich einer einzigen zur Gruppe gehörigen Reihe gesetzt werden.

Es seien

$$S_1(z; a_\rho), S_2(z; a_\rho), \dots, S_{\mu_\rho}(z; a_\rho)$$

$\mu_\rho$  zur Gruppe  $(a_\rho)$  gehörige Reihen und

$$A_{11}^{(\rho)}, A_{12}^{(\rho)}, \dots, A_{1\mu_\rho}^{(\rho)}$$

$$A_{21}^{(\rho)}, A_{22}^{(\rho)}, \dots, A_{2\mu_\rho}^{(\rho)}$$

$$A_{\mu_\rho 1}^{(\rho)}, A_{\mu_\rho 2}^{(\rho)}, \dots, A_{\mu_\rho \mu_\rho}^{(\rho)}$$

die zu den bezüglichen ersten Gliedern derselben gehörigen Constanten.  
Sind nun die Reihen  $S$  so gewählt, dass die Determinante

$$(35) \quad \Delta_\rho = \begin{vmatrix} A_{11}^{(\rho)} & A_{12}^{(\rho)} & \dots & A_{1\mu_\rho}^{(\rho)} \\ A_{21}^{(\rho)} & A_{22}^{(\rho)} & \dots & A_{2\mu_\rho}^{(\rho)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{\mu_\rho 1}^{(\rho)} & A_{\mu_\rho 2}^{(\rho)} & \dots & A_{\mu_\rho \mu_\rho}^{(\rho)} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, so kann jede andere zur Gruppe  $(a_\rho)$  gehörige Reihe  $S(z; a_\rho)$  immer und nur auf eine Weise als homogene und lineare Function von  $S_1, S_2, \dots, S_{\mu_\rho}$  ausgedrückt werden, d. h. in der Form

$$(36) \quad S(z; a_\rho) = p_1^{(\rho)} S_1(z; a_\rho) + p_2^{(\rho)} S_2(z; a_\rho) + \dots + p_{\mu_\rho}^{(\rho)} S_{\mu_\rho}(z; a_\rho).$$

Denn, falls

$$A_1^{(\rho)}, A_2^{(\rho)}, \dots, A_{\mu_\rho}^{(\rho)}$$

die Constanten des ersten Gliedes von  $S(z; a_\rho)$  bezeichnen, so gibt es, weil die Determinante  $\Delta_\rho$  des linearen Gleichungssystems

$$(37) \quad \begin{aligned} A_{11}^{(\rho)} p_1^{(\rho)} + A_{21}^{(\rho)} p_2^{(\rho)} + \dots + A_{\mu_\rho 1}^{(\rho)} p_{\mu_\rho}^{(\rho)} &= A_1^{(\rho)} \\ A_{12}^{(\rho)} p_1^{(\rho)} + A_{22}^{(\rho)} p_2^{(\rho)} + \dots + A_{\mu_\rho 2}^{(\rho)} p_{\mu_\rho}^{(\rho)} &= A_2^{(\rho)} \\ \dots &\dots \\ A_{1\mu_\rho}^{(\rho)} p_1^{(\rho)} + A_{2\mu_\rho}^{(\rho)} p_2^{(\rho)} + \dots + A_{\mu_\rho \mu_\rho}^{(\rho)} p_{\mu_\rho}^{(\rho)} &= A_{\mu_\rho}^{(\rho)} \end{aligned}$$

unserer Annahme nach von Null verschieden ist, ein, und zwar nur ein einziges, System

$$p_1^{(\rho)}, p_2^{(\rho)}, \dots, p_{\mu_\rho}^{(\rho)},$$

welches dem Gleichungssysteme genügt, und für welches auf Grund der beiden vorhergehenden Sätze die Gleichung (36) besteht.

Betrachten wir jetzt die Functionen, welche durch den allgemeinen Ausdruck

$$(38) \quad S(z) = \sum_{\rho=1}^r S(z; a_\rho),$$

dargestellt werden, wo  $S(z; a_\rho)$  eine beliebige zur Gruppe  $(a_\rho)$  gehörige Function bezeichnet, so ist

$$(39) \quad S(z + 1) = \mathbf{r}(z) S(z) - \mathbf{R}(z)$$

und

$$(40) \quad \mathbf{R}(z) = \sum_{\rho=1}^r \mathbf{R}(z; a_\rho).$$

Es seien

$$S_1(z; a_\rho), \quad S_2(z; a_\rho), \quad \dots, \quad S_{\mu_\rho}(z; a_\rho)$$

wie vorher  $\mu_\rho$  zur Gruppe  $(a_\rho)$  gehörige Reihen, die so gewählt sind, dass die Determinante  $\Delta_\rho$  einen von Null verschiedenen Werth hat. Es besteht dann die Gleichung (36), mit deren Hülfe  $S(z)$  auf die Form

$$(41) \quad S(z) = \sum_{\rho=1}^r [p_1^{(\rho)} S_1(z; a_\rho) + p_2^{(\rho)} S_2(z; a_\rho) + \dots + p_{\mu_\rho}^{(\rho)} S_{\mu_\rho}(z; a_\rho)]$$

gebracht werden kann. In diesem Ausdrucke kommen  $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r = \mu$  Reihen vor und ebenso viele Constanten  $p$ . Dadurch, dass man nur diese Constanten verändert, werden alle Functionen erhalten, die durch den Ausdruck (38) dargestellt werden. Sind die indicirten Reihen gegeben und handelt es sich darum,  $S(z)$  in der Form (41) darzustellen, so hat man die Constanten  $p$  durch ein System von  $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r = \mu$  linearen Gleichungen zu bestimmen, wodurch die  $r$  Systeme, welche man dadurch erhält, dass man in (37) nach einander  $\rho = 1, 2, \dots, r$  setzt, zusammengegriffen werden. Wird die Determinante des so erhaltenen Systems mit  $\Delta$  bezeichnet, so ist

$$\Delta = \begin{vmatrix} \bar{\Delta}_1 & & & \\ & \bar{\Delta}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\Delta}_r \end{vmatrix}$$

wenn  $\overline{\Delta}_\rho$  das Schema

$$A_{11}^{(\rho)} \dots A_{\mu_\rho 1}^{(\rho)}$$

· · · · ·

$$A_{\mu_\rho 1}^{(\rho)} \dots A_{\mu_\rho \mu_\rho}^{(\rho)}$$

bezeichnet. Aus dieser Form der Determinante  $\Delta$  geht hervor, dass

$$(42) \quad \Delta = \Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_r.$$

## 6.

Wir wollen nun nachweisen, dass in der Gleichung (34), welcher eine zur Gruppe  $(a_\rho)$  gehörige Reihe genügt, die Function  $\mathbf{R}(z; a_\rho)$  immer rational ist. Die Gleichung (40) zeigt sodann, dass auch  $\mathbf{R}(z)$  in (39) rational ist.

Zu diesem Zwecke betrachten wir den Zähler von  $\mathbf{R}(z; a_\rho)$ :

$$\begin{aligned} R(z; a_\rho) &= \mathbf{r}_0(z) S(z; a_\rho) - \mathbf{r}_1(z) S(z + 1; a_\rho) \\ &= \mathbf{r}_0(z) \left( \frac{A_{\mu'}^{(0)}}{(z-a)^{\mu'}} + \dots + \frac{A_1^{(0)}}{z-a} \right) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \mathbf{r}_0(z) \left( \frac{A_{\mu'}^{(n)}}{(z-a+n)^{\mu'}} + \dots + \frac{A_1^{(n)}}{z-a+n} \right) - \mathbf{r}_1(z) \left( \frac{A_{\mu'}^{(n-1)}}{(z-a+n)^{\mu'}} + \dots + \frac{A_1^{(n-1)}}{z-a+n} \right) \right], \end{aligned}$$

wo der Kürze halber

$$A_{\mu_\rho-k}^{(\rho, n)} = A_{\mu'-k}^{(n)}, \quad a_\rho = a, \quad \mu_\rho = \mu'$$

gesetzt sind.

Weil  $\mathbf{r}_0(z)$  für  $z=a$  Null der Ordnung  $\mu'$  wird, so kann das erste Theil der rechten Seite gleich einer ganzen rationalen Function gesetzt werden, deren Gradzahl höchstens  $\mu-1$  ist, wenn  $\mu$  wie in § 1 die Gradzahl von  $\mathbf{r}_0(z)$  bezeichnet. Da  $R(z; a_\rho)$  den Charakter einer ganzen Function hat, so kann auch keines von den Gliedern des zweiten Theiles unendlich werden. Wird also das allgemeine Glied nach ganzen Potenzen von  $z-a+n$  entwickelt, so müssen die Coefficienten der nega-

tiven Potenzen von  $z - a + n$  gleich Null werden. Weil die Gradzahl  $\mu$  von  $r_0(z)$  nicht kleiner ist als die Gradzahl  $\nu$  von  $r_1(z)$ , so ist offenbar der Exponent der höchsten positiven Potenz von  $z - a + n$ , die im Gliede überhaupt erscheinen kann, gleich  $\mu - 1$ . Das allgemeine Glied kann mithin auf die Form

$$A_0 + A_1(z - a + n) + \dots + A_{n-1}(z - a + n)^{n-1}$$

gebracht werden. Wird dieser Ausdruck nach Potenzen von  $z$  entwickelt, so folgt

$$R(z; a_\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} (B_0^{(n)} + B_1^{(n)} z + \dots + B_{\mu-1}^{(n)} z^{\mu-1}).$$

Da die Reihe  $S(z; a_\rho)$  gleichmässig convergiert, so ist dies auch mit  $R(z; a_\rho)$  der Fall. Man darf also diese Reihe nach Potenzen von  $z$  entwickeln und erhält somit ein Resultat der Form

$$(43) \quad R(z; a_\rho) = \alpha_1^{(\rho)} + \alpha_2^{(\rho)} z + \dots + \alpha_n^{(\rho)} z^{n-1},$$

wo  $\alpha_1^{(\rho)}, \alpha_2^{(\rho)}, \dots, \alpha_n^{(\rho)}$  von  $z$  unabhängige Grössen bezeichnen.

Die in Gleichung (34) vorkommende Function  $\mathbf{R}(z; a_\rho)$  ist mithin immer rational und kann in der Form eines Quotienten, dessen Nenner gleich demjenigen von  $r(z)$  und dessen Zähler eine ganze rationale Function höchstens  $(\mu - 1)^{\text{ten}}$  Grades ist, dargestellt werden:

$$(44) \quad \mathbf{R}(z; a_\rho) = \frac{R(z; a_\rho)}{r_1(z)}.$$

Vermöge der Gleichung (40) gilt das nämliche von der in Gleichung (39) vorkommenden Function  $\mathbf{R}(z)$ :

$$(45) \quad \mathbf{R}(z) = \frac{R(z)}{r_1(z)},$$

$$(46) \quad R(z) = \sum_{\rho=1}^r R(z; a_\rho) = \alpha_1 + \alpha_2 z + \dots + \alpha_n z^{n-1}.$$

Der Beweis, dass jede Reihe  $S(z; a_\rho)$  der Form (32), deren Con-

stanten  $A$  die Bedingungen (26) erfüllen, unbedingt und gleichmässig convergire, wurde unter der Voraussetzung geführt dass

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |\mathbf{r}(z)| = |M| > 1$$

sei. In diesem Falle ist aber nach § 1

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (z, m) = \infty,$$

woraus sich ergiebt, da offenbar

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S(z + m; a_p) = 0$$

ist, dass  $S(z; a_p)$  nicht nur die Eigenschaft

$$S(z + 1; a_p) = \mathbf{r}(z) S(z; a_p) - \mathbf{R}(z; a_p)$$

sondern auch die folgende besitzt:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{S(z + m; a_p)}{(z, m)} = 0.$$

Hieraus geht nun ferner hervor, dass auch jede in der Form (38) oder (41) ausdrückbare Function  $S(z)$  den beiden Gleichungen

$$S(z + 1) = \mathbf{r}(z) S(z) - \mathbf{R}(z)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{S(z + m)}{(z, m)} = 0$$

genügt. Es fragt sich nun, ob jede beliebige Function mit diesen beiden Eigenschaften in der Form (38) oder (41) darstellbar sei. Mit dieser Frage hängt eine andere zusammen. Wir können zwar unbeschränkt viele Functionen der Form  $S(z)$  bilden, von denen jede zwei Gleichungen der oben angegebenen Form befriedigt, wo  $\mathbf{R}(z)$  eindeutig bestimmt ist, sobald  $S(z)$  gebildet ist. Ist es aber, wenn die rationale Function  $\mathbf{R}(z)$  beliebig gegeben ist, auch umgekehrt möglich eine Function  $S(z)$  herzustellen, welche diesen beiden Gleichungen genügt? — Indem wir diese Fragen beantworten erhalten wir einen neuen allgemeinen Ausdruck für die in der Form (38) oder (41) darstellbaren Functionen.

## 7.

Zunächst wollen wir den folgenden Satz beweisen:

*Jeder beliebigen rationalen Function  $\mathbf{R}(z)$  entspricht eine und zwar nur eine einzige Function  $S(z)$  mit den beiden Eigenschaften*

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} S(z + 1) = \mathbf{r}(z)S(z) - \mathbf{R}(z) \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{S(z + m)}{(z, m)} = 0. \end{array} \right.$$

Durch wiederholte Anwendung der ersten dieser Gleichungen ergibt sich

$$(48) \quad \begin{aligned} & \frac{S(z + m)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z + 1)\dots\mathbf{r}(z + m - 1)} \\ &= S(z) - \left( \frac{\mathbf{R}(z)}{\mathbf{r}(z)} + \frac{\mathbf{R}(z + 1)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z + 1)} + \dots + \frac{\mathbf{R}(z + m - 1)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z + 1)\dots\mathbf{r}(z + m - 1)} \right). \end{aligned}$$

Weil

$$\frac{S(z + m)}{\mathbf{r}(z)\dots\mathbf{r}(z + m - 1)} = \frac{S(z + m)}{(z, m)} \cdot \frac{(z, m)}{\mathbf{r}(z)\dots\mathbf{r}(z + m - 1)}$$

ist, und nach § 1

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(z, m)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z + 1)\dots\mathbf{r}(z + m - 1)} = F(z),$$

so zeigt die zweite der Gleichungen (47), dass die linke Seite von (48) für wachsendes  $m$  die Null zur Grenze hat, wenn  $z$  von den Unendlichkeitsstellen der Function  $F(z)$  verschieden ist. Wenn also eine Function mit den Eigenschaften (47) überhaupt existiert, so ist sie eindeutig bestimmt durch die Gleichung

$$(49) \quad S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{R}(z + n)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z + 1)\dots\mathbf{r}(z + n)}.$$

Soll hiermit die Existenz einer Function mit den genannten Eigenschaften

erwiesen sein, so muss die rechte Seite von (49) eine convergirende Reihe bilden, für welche diese Eigenschaften nachgewiesen werden können.

Da der Quotient eines Gliedes der Reihe  $S(z)$  durch das vorhergehende gleich

$$\frac{\mathbf{R}(z+n)}{\mathbf{R}(z+n-1)} \cdot \frac{1}{\mathbf{r}(z+n)}$$

ist, weil ferner in diesem Ausdrucke

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{R}(z+n)}{\mathbf{R}(z+n-1)} = 1$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\mathbf{r}(z+n)} \right| = \left| \frac{1}{M} \right| < 1$$

ist, so ergiebt sich durch ganz gewöhnliche Betrachtungen, dass  $S(z)$  eine unbedingt und gleichmässig convergirende Reihe ist. Sie stellt also eine analytische Function dar, die offenbar den Charakter einer rationalen Function hat. Aus der einfachen Bildungsweise der Glieder geht ferner hervor, dass sie die erste der Gleichungen (47) befriedigt, wovon die Gleichung (48) eine Folge ist. Aus dieser und den beiden darauf folgenden Gleichungen findet man, dass sie auch der zweiten von den Gleichungen (47) Genüge leistet.

Im Folgenden betrachten wir nun die Reihe (49) nur unter der Annahme, dass  $\mathbf{R}(z)$  eine rationale Function bezeichnet, welche auf die Form

$$\mathbf{R}(z) = \frac{R(z)}{\mathbf{r}_1(z)}$$

gebracht werden kann, wo der Zähler  $R(z)$  eine ganze rationale Function höchstens  $(\mu - 1)^{\text{ten}}$  Grades ist:

$$R(z) = \alpha_1 + \alpha_2 z + \dots + \alpha_n z^{n-1}.$$

Indem man den Coefficienten  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  verschiedene Werthe zuerteilt, bekommt man unendlich viele Functionen der Form (49), von denen jede einem bestimmten Gleichungssysteme (47) Genüge leistet. Zu diesen gehören alle Functionen, die in der Form (38) oder (41) dargestellt werden können. Es bleibt noch übrig zu entscheiden, ob auch

umgekehrt jede Reihe der Form (49) auf die Form (41) gebracht werden kann.

Um dies entscheiden zu können muss man sich zunächst davon überzeugen, dass man unter den Functionen der Form (41) immer  $\mu$  verschiedene auswählen kann, zwischen denen keine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten stattfindet.

Man verfahre z. B. so, dass man aus der Gruppe  $(a_1)$   $\mu_1$  Reihen  $S(z; a_1)$  nimmt, für welche die Determinante  $\Delta_1$  von Null verschieden ist, aus der Gruppe  $(a_2)$   $\mu_2$  Reihen  $S(z; a_2)$  für welche die Determinante  $\Delta_2$  von Null verschieden ist, u. s. w., und schliesslich aus der Gruppe  $(a_r)$   $\mu_r$  Reihen  $S(z; a_r)$  für welche die Determinante  $\Delta_r$  von Null verschieden ist. Man bekommt so im Ganzen  $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r = \mu$  Reihen, die wir in einer beliebigen Reihenfolge schreiben und mit

$$(50) \quad S_1(z), \quad S_2(z), \quad \dots, \quad S_\mu(z)$$

bezeichnen wollen. Zwischen diesen Reihen kann nun keine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten stattfinden. Denn würde eine solche bestehen, so müsste auch, da zwei zu verschiedenen Gruppen gehörige Reihen keine gemeinschaftliche Unendlichkeitsstelle haben, eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten zwischen den zur Gruppe  $(a_\rho)$ , ( $\rho = 1, 2, \dots, r$ ), gehörigen Reihen stattfinden, was unmöglich ist, da die Determinante  $\Delta_\rho$  von Null verschieden ist.

Es seien nun

$$S_\lambda(z+1) = \mathbf{r}(z) S_\lambda(z) - \mathbf{R}_\lambda(z) \\ \lambda = 1, 2, \dots, r$$

die  $\mu$  Gleichungen, denen beziehungsweise die Reihen (50) genügen; es werde

$$\mathbf{R}_\lambda(z) = \frac{R_\lambda(z)}{\mathbf{r}_1(z)},$$

$$R_\lambda(z) = \alpha_{\lambda 1} + \alpha_{\lambda 2} z + \dots + \alpha_{\lambda n} z^{n-1}$$

gesetzt, und die Determinante

$$(51) \quad \partial = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \dots & \alpha_{\mu n} \end{vmatrix}$$

gebildet, so gilt der folgende Satz: Wenn die Functionen (50) so gewählt sind, dass zwischen ihnen keine homogene lineare Gleichung mit constanten Coefficienten stattfindet, so kann die Determinante  $\delta$  nicht gleich Null sein.

Denn bildet man die Function

$$f(z) = p_1 S_1(z) + p_2 S_2(z) + \dots + p_n S_n(z),$$

so besitzt sie offenbar die Eigenschaft

$$f(z+1) = \mathbf{r}(z)f(z) = \overline{\mathbf{R}}(z),$$

wo

$$\overline{\mathbf{R}}(z) = \frac{\overline{R}(z)}{\mathbf{r}_1(z)}$$

und

$$\overline{R}(z) = p_1 R_1(z) + p_2 R_2(z) + \dots + p_n R_n(z)$$

ist. Wird  $\overline{R}(z)$  nach Potenzen von  $z$  entwickelt, so folgt ein Resultat der Form

$$\overline{R}(z) = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 z + \dots + \bar{\alpha}_n z^{n-1}.$$

Wäre nun  $\delta = 0$  so könnte dem homogenen linearen Gleichungssystem

$$\bar{\alpha}_1 = \alpha_{11} p_1 + \alpha_{21} p_2 + \dots + \alpha_{n1} p_n = 0$$

$$\bar{\alpha}_2 = \alpha_{12} p_1 + \alpha_{22} p_2 + \dots + \alpha_{n2} p_n = 0$$

$$\bar{\alpha}_n = \alpha_{1n} p_1 + \alpha_{2n} p_2 + \dots + \alpha_{nn} p_n = 0$$

ein Werthsystem

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

genügen, wo die sämmtlichen  $p$  nicht gleich Null sind. Alsdann würde aber sein

$$f(z+1) = \mathbf{r}(z)f(z)$$

und mithin

$$\frac{f(z+m)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\dots\mathbf{r}(z+m-1)} = f(z).$$

wie gross auch die positive ganze Zahl  $m$  sein mag. Es müsste also wegen der Relationen:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(z + m) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} |\mathbf{r}(z)| > 1$$

$f(z)$  identisch verschwinden, mit andern Worten die Gleichung

$$f(z) = p_1 S_1(z) + p_2 S_2(z) + \dots + p_n S_n(z) = 0$$

für alle Werthe der Veränderlichen  $z$  stattfinden. Dies stimmt aber nicht überein mit unserer Annahme, dass zwischen den Functionen  $S$  keine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten stattfindet. Es muss also  $\delta$  von Null verschieden sein, wenn die Functionen  $S$  linear unabhängig sind.

Wir wollen jetzt nachweisen, dass jede Reihe der Form (49), wo

$$\mathbf{R}(z) = \frac{R(z)}{\mathbf{r}_1(z)},$$

$$R(z) = \alpha_1 + \alpha_2 z + \dots + \alpha_n z^{n-1}$$

ist, auf die Form (41) gebracht werden kann. Es seien wie früher

$$S_1(z), S_2(z), \dots, S_n(z)$$

$\mu$  Reihen (50), zwischen denen keine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten stattfindet, und man bilde den Ausdruck

$$f(z) = p_1 S_1(z) + p_2 S_2(z) + \dots + p_n S_n(z).$$

Da die Determinante  $\delta$  des linearen Gleichungssystems

$$\bar{\alpha}_1 = \alpha_1, \bar{\alpha}_2 = \alpha_2, \dots, \bar{\alpha}_n = \alpha_n$$

nach dem vorstehenden Satze von Null verschieden ist, so giebt es ein und zwar nur ein Werthsystem

$$p_1, p_2, \dots, p_n,$$

welches den Gleichungen genügt, für welches mithin

$$R(z) = R(z)$$

ist. Für dieses Werthsystem sind nun auch die Brüche  $\bar{\mathbf{R}}(z)$  und  $\mathbf{R}(z)$  gleich, da sie denselben Nenner haben, und es ist also bewiesen, dass die Functionen  $f(z)$  die erste der Gleichungen (47) befriedigt, denen  $S(z)$  Genüge leistet. Sie befriedigt aber offenbar auch die zweite. Nach dem im Anfange dieses § bewiesenen Satze ist also

$$f(z) = S(z).$$

Hiermit ist nun folgender Satz bewiesen:

*Sind*

$$S_1(z), S_2(z), \dots, S_n(z)$$

*μ Functionen der Form (37) oder (41), welche so gewählt sind, dass zwischen ihnen keine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten stattfindet, so kann jede Function  $S(z)$  mit den beiden Eigenschaften (47), wo*

$$\mathbf{R}(z) = \frac{a_1 + a_2 z + \dots + a_n z^{n-1}}{\mathbf{r}_1(z)}$$

*ist, immer und zwar nur auf eine Weise in der Form*

$$S(z) = p_1 S_1(z) + p_2 S_2(z) + \dots + p_n S_n(z),$$

*wo  $p_1, p_2, \dots, p_n$  Constanten bezeichneten, dargestellt werden.*

Im Vorstehenden ist bewiesen worden, dass die Determinante  $\delta$  einen von Null verschiedenen Werth hat, wenn die Functionen  $S_1(z), S_2(z), \dots, S_n(z)$  so gewählt sind, dass zwischen ihnen keine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten stattfindet. Aus den dabei angewandten Betrachtungen ergiebt sich aber, dass eine solche Gleichung besteht, wenn  $\delta = 0$  ist. Eine nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Functionen  $S$  linear unabhängig seien, ist mithin, dass die Determinante  $\delta$  einen von Null verschiedenen Werth habe.

## 8.

Es sei  $\mathbf{R}(z)$  eine rationale Function der Form

$$\mathbf{R}(z) = \frac{a_1 + a_2 z + \dots + a_n z^{n-1}}{\mathbf{r}_1(z)},$$

wo  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  als unbestimmte Größen betrachtet werden, und es mag ein *particuläres Integral* des Systems der Functionalgleichungen

$$(52) \quad \left| \begin{array}{l} S(z+1) = \mathbf{r}(z)S(z) - \mathbf{R}(z) \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{S(z+m)}{(z, m)} = 0 \end{array} \right.$$

jede Function heissen, die einem der unendlich vielen Gleichungssystemen genügt, worin das System (52) übergehen kann, wenn  $\mathbf{R}(z)$  als eine spezielle rationale Function der angegebenen Form aufgefasst wird. Als dann hat man den folgenden Satz, der mit einem fundamentalen Satze aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen vollständig übereinstimmt.

Ist

$$(53) \quad S_1(z), S_2(z), \dots, S_n(z)$$

ein solches System *particulärer Integrale* des obigen Systems von Functionalgleichungen, dass seine Determinante  $\delta$  einen von Null verschiedenen Werth hat, so kann jedes andere Integral  $S(z)$  desselben Systems als lineare homogene Function mit constanten Coefficienten von  $S_1(z), S_2(z), \dots, S_n(z)$  ausgedrückt werden:

$$(54) \quad S(z) = p_1 S_1(z) + p_2 S_2(z) + \dots + p_n S_n(z).$$

Da der Ausdruck (54) durch eine geeignete Specialisirung der Constanten  $p_1, p_2, \dots, p_n$  gleich jeder beliebigen Functionen gemacht werden kann, die einem speciellen Gleichungssysteme der Form (52) genügt, so nennen wir diesen Ausdruck das *allgemeine Integral* des Systems der Functionalgleichungen (52). Wird ferner mit einem *Fundamentalsystem* particulärer Integrale jedes System (53) bezeichnet, von dessen Elementen jedes Integral von (52) als lineare homogene Function ausgedrückt werden kann, so gilt noch der folgende Satz:

Die *particulären Integrale*

$$S_1(z), S_2(z), \dots, S_n(z)$$

constituiren ein *Fundamentalsystem* einzig und allein in dem Falle wo keine

lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten zwischen ihnen stattfinden kann.

Schliesslich hat man den folgenden Satz: Zwischen je  $\mu + 1$  particulären Integralen des Systems (52) besteht eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten.

## 9.

Wir betrachten jetzt die Gleichung

$$(55) \quad F(z) = P(z) + Q(z),$$

wo  $P(z)$  die zu  $F(z)$  gehörige Partialbruchreihe und  $Q(z)$  eine beständig convergirende Potenzreihe bezeichnet. Da die Function  $P(z)$  nach den vorigen Untersuchungen ein particuläres Integral des Gleichungssystems (52) ist, so hat man

$$(56) \quad P(z + 1) = \mathbf{r}(z)P(z) - \mathbf{R}^*(z),$$

wo  $\mathbf{R}^*(z)$  eine gewisse rationale Function der Form

$$\mathbf{R}^*(z) = \frac{a_1 + a_2 z + \dots + a_n z^{n-1}}{\mathbf{r}_1(z)} .$$

bezeichnet. Stellt man die Gleichung  $F(z + 1) = \mathbf{r}(z)F(z)$  mit (55) und (56) zusammen, so findet man, dass die beständig convergirende Potenzreihe

$$Q(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$$

der Gleichung

$$(57) \quad Q(z + 1) = \mathbf{r}(z)Q(z) + \mathbf{R}^*(z)$$

genügt.

Die Potenzreihe  $Q(z)$  kann dem System der Functionalgleichungen (52) nicht genügen. Das genannte System ist ein Specialfall des folgenden

$$(58) \quad \begin{cases} S(z + 1) = \mathbf{r}(z)S(z) - \mathbf{R}(z) \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{S(z + m)}{(z, m)} = K, \end{cases}$$

wo  $K$  eine unbestimmte Constante und  $\mathbf{R}(z)$  eine allgemeine rationale Function der in vorigem § angegebenen Form bezeichnet. Dass  $Q(z)$  ein particuläres Integral des Systems (58) ist, geht aus dem folgenden Satze hervor:

*Jeder Combination einer bestimmten Constante  $K$  und einer speciellen rationalen Function  $\mathbf{R}(z)$  der oft genannten Form entspricht eine und zwar nur eine einzige Function  $S(z)$  mit den beiden Eigenschaften (58). Es ist ferner immer und nur auf eine Weise möglich die Constanten  $p_1, p_2, \dots, p_n, q$  so zu bestimmen, dass*

$$S(z) = p_1 S_1(z) + p_2 S_2(z) + \dots + p_n S_n(z) + q Q(z)$$

wird, wo  $S_1(z), S_2(z), \dots, S_n(z)$  ein Fundamentalsystem particularer Integrale des Systems der Functionalgleichungen (52) constituiren.

Durch wiederholte Anwendung der ersten der Gleichungen (58) erhält man

$$\begin{aligned} & \frac{S(z+m)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\dots\mathbf{r}(z+m-1)} \\ &= S(z) - \left( \frac{\mathbf{R}(z)}{\mathbf{r}(z)} + \frac{\mathbf{R}(z+1)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)} + \dots + \frac{\mathbf{R}(z+m-1)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\dots\mathbf{r}(z+m-1)} \right). \end{aligned}$$

Wendet man die zweite Gleichung an, so folgt

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{S(z+m)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\dots\mathbf{r}(z+m-1)} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{S(z+m)}{(z+m)} \cdot \frac{(z+m)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\dots\mathbf{r}(z+m-1)} = K \cdot F(z), \end{aligned}$$

wenn auch die Gleichung (9) in § 1 in Betracht gezogen wird, und es muss mithin

$$S(z) = KF(z) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{R}(z+n)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\dots\mathbf{r}(z+n)}$$

sein. Wenn also eine Function mit den beiden Eigenschaften (58) existirt, so ist sie in dieser Form darstellbar. Da die rechte Seite der letzten Gleichung eine Function wirklich darstellt, welche die beiden angenommenen Eigenschaften der linken Seite offenbar besitzt, so ist hiermit der

erste Theil des obigen Satzes bewiesen. Setzt man ferner auf der rechten Seite

$$F(z) = P(z) + Q(z),$$

so folgt auch die Richtigkeit des zweiten Theiles, wenn man bemerkt, dass es immer und zwar nur auf eine Weise möglich ist, die Constanten  $p_1, p_2, \dots, p_n$  so zu bestimmen, dass

$$KP(z) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{R}(z+n)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\dots\mathbf{r}(z+n)} = p_1 S_1(z) + p_2 S_2(z) + \dots + p_n S_n(z)$$

wird.

Da also der Ausdruck

$$(59) \quad S(z) = p_1 S_1(z) + p_2 S_2(z) + \dots + p_n S_n(z) + KQ(z)$$

durch eine geeignete Specialisirung der Constanten  $p_1, p_2, \dots, p_n, K$  gleich jeder beliebigen Function gemacht werden kann, die einem speciellen Gleichungssysteme der Form (58) genügt, so ist dieser Ausdruck das *allgemeine Integral* des Systems der Functionalgleichungen (58).

Nimmt man an, es sei  $K = 1$ , und bestimmt die Constanten  $p$  so, dass

$$p_1 S_1(z) + p_2 S_2(z) + \dots + p_n S_n(z) = P(z)$$

ist, so wird

$$S(z) = F(z).$$

Nimmt man an, es sei  $K = 0$ , und bestimmt die Constanten  $p$  wie früher, so wird

$$S(z) = P(z).$$

Nimmt man an, es sei  $K = -1$ , und setzt  $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 0$ , so wird

$$S(z) = Q(z).$$

Es sind also  $F(z), P(z), Q(z)$  particuläre Integrale des allgemeinen Gleichungssystems (58).

Aus dem soeben bewiesenen Satze geht nun auch die Richtigkeit des folgenden hervor:

Die Function  $F(z)$ , welche die charakteristischen Eigenschaften

$$F(z + 1) = \mathbf{r}(z) F(z), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{F(z + m)}{(z, m)} = 1$$

besitzt, kann als eine Summe zweier anderen Functionen  $P(z)$  und  $Q(z)$  dargestellt werden, von denen  $P(z)$  eine Partialbruchreihe der Form (38) mit den charakteristischen Eigenschaften

$$P(z + 1) = \mathbf{r}(z) P(z) - \mathbf{R}^*(z), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{P(z + m)}{(z, m)} = 0$$

und  $Q(z)$  eine beständig convergirende Potenzreihe mit den charakteristischen Eigenschaften

$$Q(z + 1) = \mathbf{r}(z) Q(z) + \mathbf{R}^*(z), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Q(z + m)}{(z, m)} = 1$$

bezeichnet.

Unter den particulären Integralen des Systems (58) sind  $F(z)$ ,  $P(z)$ ,  $Q(z)$  besonders bemerkenswerth und zwar aus folgenden Gründen.

$F(z)$  ist, abgesehen von einem constanten Factor, die einzige Function, welche dem Gleichungssystem (58) genügt, wenn  $\mathbf{R}(z) = 0$  ist.

Das allgemeine Integral geht nur dann in  $F(z)$  über, wenn man  $K = 1$  und

$$p_1 S_1(z) + p_2 S_2(z) + \dots + p_n S_n(z) = P(z)$$

setzt.

$Q(z)$  ist, abgesehen von einem constanten Factor, die einzige Function mit dem Charakter einer ganzen Function, welche dem Gleichungssystem (58) genügt, und dann muss  $\mathbf{R}(z) = -\mathbf{R}^*(z)$  sein. Deswegen ist auch die rationale Function  $\mathbf{R}^*(z)$  besonders bemerkenswerth.

## 10.

Nach den vorigen Untersuchungen entspricht jeder Function  $S(z)$  der Form (38) eine rationale Function der Form

$$\mathbf{R}(z) = \frac{a_1 + a_2 z + \dots + a_n z^{n-1}}{\mathbf{r}_1(z)},$$

für welche die Gleichung

$$S(z + 1) = \mathbf{r}(z) S(z) - \mathbf{R}(z)$$

stattfindet. Umgekehrt entspricht auch jeder rationalen Function der genannten Form eine Function  $S(z)$ , welche dieser Gleichung genügt. Es ist noch übrig zu zeigen, wie die eine dieser Functionen bestimmt werden soll, wenn die andere gegeben ist.

Es mag zunächst angenommen werden, dass  $S(z)$  gegeben ist und dass  $\mathbf{R}(z)$  bestimmt werden soll. Es sei  $a$  irgend ein Werth, für den weder  $S(z)$  noch  $S(z + 1)$  unendlich wird. Werden  $\mathbf{r}_0(z)$ ,  $\mathbf{r}_1(z)$ ,  $S(z)$ ,  $S(z + 1)$  nach positiven ganzzahligen Potenzen von  $z - a$  entwickelt und der Zähler von  $\mathbf{R}(z)$

$$R(z) = \mathbf{r}_0(z) S(z) - \mathbf{r}_1(z) S(z + 1)$$

nach wachsenden Potenzen von  $z - a$  geordnet, so werden die Coefficienten derjenigen Potenzen, deren Exponenten grösser als  $\mu - 1$  sind, gleich Null. Setzt man

$$R(z) = A_1 + A_2(z - a) + \dots + A_\mu(z - a)^{\mu-1},$$

so ist offenbar

$$\begin{aligned} A_{\lambda+1} &= \mathbf{r}_0(a) \frac{S^{(\lambda)}(a)}{| \lambda |} + \mathbf{r}'_0(a) \frac{S^{(\lambda-1)}(a)}{| \lambda - 1 |} + \dots + \frac{\mathbf{r}_0^{(\lambda)}(a)}{| \lambda |} S(a) \\ &- \left( \mathbf{r}_1(a) \frac{S^{(\lambda)}(a+1)}{| \lambda |} + \mathbf{r}'_1(a) \frac{S^{(\lambda-1)}(a+1)}{| \lambda - 1 |} + \dots + \frac{\mathbf{r}_1^{(\lambda)}(a)}{| \lambda |} S(a+1) \right). \\ &\quad (\lambda = 0, 1, \dots, \mu - 1). \end{aligned}$$

Hat man in dieser Weise für die Elemente

$$S_1(z), S_2(z), \dots, S_\mu(z)$$

eines Fundamentalsystems von (47) die entsprechenden Functionen

$$\mathbf{R}_1(z), \mathbf{R}_2(z), \dots, \mathbf{R}_\mu(z)$$

bestimmt, so ist diejenige rationale Function  $\mathbf{R}(z)$ , die einem anderen

beliebig gegebenen particulären Integrale  $S(z)$  entspricht, durch die Gleichung

$$\mathbf{R}(z) = p_1 S_1(z) + p_2 S_2(z) + \dots + p_\mu S_\mu(z)$$

gegeben, wenn  $p_1, p_2, \dots, p_\mu$  dasjenige Werthsystem bezeichnet, für welches die Gleichung

$$S(z) = p_1 S_1(z) + p_2 S_2(z) + \dots + p_\mu S_\mu(z)$$

stattfindet. Die Constanten  $p$  ergeben sich durch Auflösung eines Systems von  $\mu$  linearen Gleichungen.

Ist  $\mathbf{R}(z)$  gegeben, so ist die entsprechende Function  $S(z)$  durch die Gleichung

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{R}(z+n)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\dots\mathbf{r}(z+n)}$$

unmittelbar bestimmt. Hier tritt die Function  $S(z)$  jedoch nicht in der Form einer Partialbruchreihe auf. Hat man aber für ein Fundamentalsystem, dessen Elemente  $S_1(z), S_2(z), \dots, S_\mu(z)$  in dieser Form gegeben sind, die bezüglichen zu den Elementen gehörigen rationalen Functionen  $\mathbf{R}_1(z), \mathbf{R}_2(z), \dots, \mathbf{R}_\mu(z)$  bestimmt, so kann  $S(z)$  durch Auflösung eines Systems von  $\mu$  linearen Gleichungen auf die Form einer Partialbruchreihe gebracht werden. Es ist nämlich

$$S(z) = p_1 S_1(z) + p_2 S_2(z) + \dots + p_\mu S_\mu(z),$$

wenn  $\overset{\circ}{p}_1, p_2, \dots, p_\mu$  dasjenige Werthsystem bezeichnet für welches

$$\mathbf{R}(z) = p_1 \mathbf{R}_1(z) + p_2 \mathbf{R}_2(z) + \dots + p_\mu \mathbf{R}_\mu(z).$$

## 11.

Nach dem, was im vorigen § gezeigt worden ist, braucht es keiner näheren Erörterung, wenn es sich um die Lösung der soeben betrachteten Probleme für das allgemeinere System der Functionalgleichungen (58) handelt. Es sei nur bemerkt, dass alsdann  $P(z)$  und die entsprechende rationale Function  $\mathbf{R}^*(z)$  bestimmt sein müssen.

Die Function  $P(z)$  ist eine Summe von  $r$  Reihen:

$$(60) \quad P(z) = P(z; a_1) + P(z; a_2) + \dots + P(z; a_r).$$

Zu jeder dieser  $r$  Reihen gehört ein System von Bedingungsgleichungen, denen die Constanten  $A$  genügen. Durch diese Gleichungen werden die Constanten des ersten Gliedes nicht bestimmt. Diese sollen jetzt ermittelt werden.

Bezeichnet man die logarithmischen Ableitungen von  $F(z)$  und  $I'(z)$  beziehungsweise mit  $\psi(z)$  und  $\phi(z)$ , so ist offenbar

$$(61) \quad \psi(z) = \alpha + \mu_1 \phi(z - a_1) + \mu_2 \phi(z - a_2) + \dots + \mu_r \phi(z - a_r) \\ - \nu_1 \phi(z - b_1) - \nu_2 \phi(z - b_2) - \dots - \nu_s \phi(z - b_s).$$

Die Function  $\phi(z)$  kann bekanntlich in der Form

$$\phi(z) = -C - \frac{1}{z} + \left(1 - \frac{1}{z+1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{z+2}\right) + \dots$$

dargestellt werden, wo  $C$  die EULER-MASCHERONI'sche Constante bezeichnet. Es sei nun  $P(z; a_\rho)$  eine der Reihen, von denen  $P(z)$  eine Summe ist, und es mag der Kürze halber

$$A_{\mu_\rho-k}^{(\rho, 0)} = A_{\mu_\rho-k}$$

gesetzt werden. Durch theilweise Integration erhalten wir nun zunächst aus

$$A_{\mu_\rho-k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(a_\rho + re^{it}) (re^{it})^{\mu_\rho-k} dt$$

die Gleichung

$$(62) \quad A_{\mu_\rho-k} = -\frac{1}{2(\mu_\rho - k)\pi} \int_0^{2\pi} F(a_\rho + re^{it}) \psi(a_\rho + re^{it}) (re^{it})^{\mu_\rho-k+1} dt.$$

Setzt man in Gleichung (61)  $x = a_\rho + re^{it}$ , so erscheint auf der rechten Seite das Glied  $\mu_\rho \psi(re^{it})$ . Setzt man

$$\mu_\rho \psi(re^{it}) = -\frac{\mu_\rho}{re^{it}} + \mu_\rho \psi(1 + re^{it})$$

und entwickelt die rechte Seite von (61) nach ganzen Potenzen von  $re^{it}$ , so bekommt man eine Reihe der Form

$$(63) \quad \Psi(a_\rho + re^{it}) = -\frac{\mu_\rho}{re^{it}} + \alpha + C_0 + C_1 re^{it} + \dots + \frac{C_\lambda}{\lambda} (re^{it})^\lambda + \dots,$$

wo

$$C_\lambda = \sum_{\sigma=1}^r \mu_\sigma \psi^{(\lambda)}(a_\rho - a_\sigma) - \sum_{\sigma=1}^s \nu_\sigma \psi^{(\lambda)}(a_\rho - b_\sigma)$$

ist. Es wird durch  $\sum^{(\rho)}$  angedeutet, dass dasjenige Glied, wo  $\sigma = \rho$  ist, durch  $\mu_\rho \psi^{(\lambda)}(1)$  zu ersetzen ist. Setzt man in (62) statt  $\Psi(a_\rho + re^{it})$  die Reihenentwickelung (63) ein und führt die Integration gliedweise aus, indem man beachtet, dass

$$\int_0^{2\pi} F(a_\rho + re^{it})(re^{it})^h dt = 0$$

für  $h = \mu_\rho + 1, \mu_\rho + 2, \dots$ , so ergiebt sich

$$k A_{\mu_\rho - k} = (\alpha + C_0) A_{\mu_\rho - k+1} + C_1 A_{\mu_\rho - k+2} + \dots + \frac{C_{k-1}}{k-1} A_{\mu_\rho}.$$

Für  $k = 1, 2, \dots, \mu_\rho - 1$  bekommt man die Recursionsformeln

$$(64) \quad \left| \begin{array}{l} A_{\mu_\rho - 1} = (\alpha + C_0) A_{\mu_\rho} \\ 2 A_{\mu_\rho - 2} = (\alpha + C_0) A_{\mu_\rho - 1} + \frac{C_1}{1} A_{\mu_\rho} \\ 3 A_{\mu_\rho - 3} = (\alpha + C_0) A_{\mu_\rho - 2} + \frac{C_1}{1} A_{\mu_\rho - 1} + \frac{C_2}{2} A_{\mu_\rho} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ (\mu_\rho - 1) A_1 = (\alpha + C_0) A_2 + \frac{C_1}{1} A_3 + \frac{C_2}{2} A_4 + \dots + \frac{C_{\mu_\rho - 2}}{\mu_\rho - 2} A_{\mu_\rho}, \end{array} \right.$$

wo

$$(65) \quad \begin{aligned} A_{\mu_\rho} &= \lim_{z=a_\rho} (z - a_\rho)^{\mu_\rho} F(z) \\ &= e^{\alpha a_\rho} \frac{\Gamma^{\nu_1}(a_\rho - a_1) \dots \Gamma^{\nu_{\rho-1}}(a_\rho - a_{\rho-1}) \Gamma^{\nu_\rho + 1}(a_\rho - a_{\rho+1}) \dots \Gamma^{\nu_r}(a_\rho - a_r)}{\Gamma^{\nu_1}(a_\rho - b_1) \Gamma^{\nu_2}(a_\rho - b_2) \dots \Gamma^{\nu_r}(a_\rho - b_s)}. \end{aligned}$$

## 12.

Die in den §§ 5—11 angestellten Untersuchungen sind unter der Voraussetzung geführt worden, dass

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |\mathbf{r}(z)| > 1$$

ist. Den interessanten Fall, wo

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |\mathbf{r}(z)| = 1$$

ist, will ich bei einer anderen Gelegenheit behandeln.

Es findet eine enge Beziehung statt zwischen den Integralen gewisser linearen Differentialgleichungen und solchen Transcendenten, von denen im Vorigen die Rede gewesen ist. Die Beschaffenheit dieser Beziehung soll hier kurz angegeben werden. Die zur Function

$$F(z) = F^n(z)$$

gehörigen Reihen  $S(z)$  bilden eine Gruppe und haben alle die Form

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{A_{\mu}^{(n)}}{(z+n)^{\mu}} + \frac{A_{\mu-1}^{(n)}}{(z+n)^{\mu-1}} + \dots + \frac{A_1^{(n)}}{z+n} \right).$$

Jede derselben befriedigt eine Gleichung

$$S(z+1) = z^n S(z) - \mathbf{R}(z),$$

wo  $\mathbf{R}(z)$  eine ganze rationale Function höchstens  $(\mu-1)^{\text{ten}}$  Grades bezeichnet. Die Constanten  $A$  genügen den Bedingungen

$$A_{\mu}^{(n)} = \left( \frac{-1}{n} \right)^{\mu} A_{\mu}^{(n-1)}$$

$$A_{\mu-k}^{(n)} = \binom{-\mu}{k} \left( \frac{-1}{n} \right)^{\mu+k} A_{\mu}^{(n-1)} + \binom{-\mu}{k-1} \left( \frac{-1}{n} \right)^{\mu+k-1} A_{\mu-1}^{(n-1)} + \dots + \left( \frac{-1}{n} \right)^{\mu} A_{\mu-k}^{(n-1)}$$

$$A_1^{(n)} = \binom{-\mu}{\mu-1} \left( \frac{-1}{n} \right)^{2\mu-1} A_{\mu}^{(n-1)} + \binom{-\mu}{\mu-2} \left( \frac{-1}{n} \right)^{2\mu-2} A_{\mu-1}^{(n-1)} + \dots + \left( \frac{-1}{n} \right)^{\mu} A_1^{(n-1)}.$$

Setzt man

$$A_{\mu}^{(0)} = 0, \quad A_{\mu-1}^{(0)} = 0, \quad \dots, \quad A_1^{(0)} = 1,$$

so bekommt man eine Reihe der Form

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu n}}{(\lfloor n \rfloor)^{\mu}} \cdot \frac{1}{z+n}.$$

Setzt man ferner

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu n}}{(\lfloor n \rfloor)^{\mu}} x^n$$

so kann  $S(z)$ , wenn der reelle Theil von  $z$  grösser als Null ist, folgendermaassen in der Form eines bestimmten Integrals ausgedrückt werden:

$$S(z) = \int_0^1 y x^{z-1} dx.$$

Die beständig convergirende Potenzreihe  $y$  genügt, wie sich leicht ergiebt, der linearen homogenen Differentialgleichungen  $\mu^{\text{ter}}$  Ordnung

$$D_x x D_x \dots x D_x y = (-1)^{\mu} y.$$

Es gilt nun folgender Satz:

*Jedem Fundamentalsystem particulärer Integrale*

$$(66) \quad S_1(z), S_2(z), \dots, S_{\mu}(z)$$

*des Systems der Functionalgleichungen*

$$\begin{cases} S(z+1) = z^{\mu} S(z) - \mathbf{R}(z) \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{S(z+m)}{(\lfloor m-1 \rfloor^{\mu})^{\mu}} = 0 \end{cases}$$

entspricht ein solches Fundamentalsystem particulärer Integrale

$$(67) \quad y_1, y_2, \dots, y_{\mu}$$

*der linearen homogenen Differentialgleichung  $\mu^{\text{ter}}$  Ordnung*

$$D_x x D_x \dots x D_x y = (-1)^{\mu} y,$$

dass

$$(68) \quad S_{\lambda}(z) = \int_0^1 y_{\lambda} x^{z-1} dx, \quad (\lambda = 1, 2, \dots, \mu)$$

wenn der reelle Theil von  $z$  positiv ist, und umgekehrt entspricht auch jedem Fundamentalsystem (67) ein Fundamentalsystem (66), für welches die Gleichungen (68) stattfinden.

Dieser Satz ist nur ein Specialfall von anderen, die sich auf lineare homogene Differentialgleichungen der Form

$$(69) \quad x^\alpha D_x x^{\alpha_1} D_x \dots D_x x^{\alpha_n} y = cx^\beta D_x x^{\beta_1} D_x \dots D_x x^{\beta_n} y$$

beziehen. Die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe ist von der Form (69). Sie kann in der That folgendermaassen geschrieben werden:

$$x^\beta D_x x^\gamma D_x y = x^\gamma D_x x^{\beta-\alpha+1} D_x x^\alpha y.$$

Die Gammafunction ist nicht die einzige Function, welche nach der im Vorigen angewandten Methode behandelt werden kann und von der man alsdann zu neuen mit der Function verwandten Transcendenten gelangt. Dieselbe Methode kann ebenfalls auf die Function

$$F(z) = \frac{\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_1 q^n z)^{\mu_1} \dots \prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_r q^n z)^{\mu_r}}{\prod_{n=0}^{\infty} (1 + b_1 q^n z)^{\nu_1} \dots \prod_{n=0}^{\infty} (1 + b_s q^n z)^{\nu_s}} \quad (|q| < 1)$$

angewandt werden.

# ÜBER HYPERELLIPTISCHE INTEGRALE

ZWEITER UND DRITTER GATTUNG

VON

OTTO STAUDE

in BRESLAU.

Auf die Darstellung der hyperelliptischen Integrale 2. und 3. Gattung durch Thetafunctionen sind namentlich die von RIEMANN begründeten Methoden mehrfach<sup>1</sup> angewendet worden, während die unmittelbare Analogie des in JACOBI's späterer Theorie der elliptischen Integrale benutzten Verfahrens<sup>2</sup> bisher nicht verfolgt zu sein scheint. Indem die vorliegende Mittheilung auf die Ausdehnbarkeit der JACOBI'schen Methode auf die hyperelliptischen Integrale 1. Ordnung hinweisen will, verbindet sie damit die Absicht einer von Herrn WEIERSTRASS mitgetheilte Formel,<sup>3</sup> welche die Bogenlänge der geodätischen Linie auf dem Ellipsoid durch hyperelliptische Functionen ausdrückt, auf einfache Weise abzuleiten.

§ 1. Um die geometrische Bedeutung der bezeichneten Formel in ihrem vollen Umfange zu charakterisiren, bedarf es zuvörderst einiger

<sup>1</sup> Vgl. unter anderen: ROCH, *Über die 3. Gattung der Abel'schen Integrale 1. Ordnung*, CRELLE's Journal, Bd. 65, S. 42; *Über Abel'sche Integrale 3. Gattung*, ebd., Bd. 68, S. 170. WEBER, *Über die Transcendenten 2. und 3. Gattung bei den hyperelliptischen Functionen 1. Ordnung*, ebd., Bd. 82, S. 131. THOMAE, *Über Integrale 2. Gattung*, ebd., Bd. 93, S. 69 und Bd. 94, S. 241.

<sup>2</sup> Vgl. JACOBI, *Gesammelte Werke*, herausg. v. WEIERSTRASS, Bd. 1, SS. 526 ff; 533 ff.

<sup>3</sup> Vgl. WEIERSTRASS, *Über geodätische Linien auf dem dreiaxigen Ellipsoid*, Monatsberichte der Berliner Akademie vom J. 1861, S. 995.

Bemerkungen über die Darstellung der geodätischen Linien und der Krümmungskurven auf dem Ellipsoid durch hyperelliptische Functionen.

Es werden unter  $x, y, z$  die gewöhnlichen, unter  $\lambda, \mu, \nu$  die elliptischen Coordinaten eines Punctes im Raume verstanden. Die letzteren sind in bekannter Weise, unter Annahme dreier Constanten  $\alpha, \beta, \gamma$ , definiert und entsprechen mit Bezug auf diese den Ungleichungen

$$\alpha > \nu > \beta > \mu > \gamma > \lambda > -\infty.$$

Auf dem Ellipsoid  $\lambda = \lambda_0$  wird diejenige geodätische Linie betrachtet, welche dessen Schnittlinie mit dem einschaligen Hyperboloid  $\mu = \mu_0$ , eine Krümmungskurve auf dem Ellipsoid  $\lambda = \lambda_0$ , berührt;  $\lambda_0$  bedeutet einen bestimmten Werth von  $\lambda$ ,  $\mu_0$  einen ebensolchen von  $\mu$ . Die Differentialgleichung der geodätischen Linie in elliptischen Coordinaten  $\mu$  und  $\nu$  lautet:

$$(1) \quad \frac{(\nu - \lambda_0)d\nu}{2N} - \frac{(\mu - \lambda_0)d\mu}{2M} = 0,$$

wobei  $N$  und  $M$  resp. die mit  $z = \nu$  und  $z = \mu$  gebildete Wurzelgrösse

$$Z = \sqrt{(\alpha - z)(\beta - z)(\mu_0 - z)(\gamma - z)(\lambda_0 - z)}$$

bedeuten. Während die Variablen  $\mu$  und  $\nu$  dieser Differentialgleichung genügen, stellen die Ausdrücke:

$$dS_1 = \frac{(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0)d\nu}{2N} - \frac{(\mu - \lambda_0)(\mu - \mu_0)d\mu}{2M}$$

und

$$dS_2 = \sqrt{\frac{(\alpha - \omega)(\beta - \omega)(\gamma - \omega)}{(\mu_0 - \omega)(\lambda_0 - \omega)}} \left\{ \frac{(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0)d\nu}{(\nu - \omega)2N} - \frac{(\mu - \lambda_0)(\mu - \mu_0)d\mu}{(\mu - \omega)2M} \right\}$$

das Bogenelement der geodätischen Linie dar,<sup>1</sup> und zwar resp. in gewöhnlicher und in projectivischer auf das Ellipsoid  $\lambda = \omega$  als Fundamentalfläche bezogener Maassbestimmung. Dieselben Formeln gelten für das Bogenelement der Krümmungskurve  $\mu = \mu_0$ . Man mag  $-\infty < \omega < \lambda_0$  annehmen, um für  $dS_2$  einen reellen Werth zu erhalten.

<sup>1</sup> Vgl. Mathematische Annalen, Bd. 20, S. 158.

An Stelle der elliptischen Coordinaten  $\mu, \nu$  sollen nun die Integralsummen:

$$(1) \quad u_1 = \int_{\beta}^{\nu, N} \frac{(\nu - \mu_0) d\nu}{2N} - \int_{\gamma}^{\mu, M} \frac{(\mu - \mu_0) d\mu}{2M}, \quad u_2 = \int_{\beta}^{\nu, N} \frac{(\nu - \lambda_0) d\nu}{2N} - \int_{\gamma}^{\mu, M} \frac{(\mu - \lambda_0) d\mu}{2M}$$

als neue Coordinaten zur Bestimmung der Punkte des Ellipsoides  $\lambda = \lambda_0$  eingeführt werden. Mit Rücksicht auf (1) lautet dann die Differentialgleichung der geodätischen Linie:

$$(2) \quad du_2 = 0.$$

Die Variablen  $u_1, u_2$  werden jetzt als Argumente hyperelliptischer Functionen genommen. Man gehe zu dem Ende von der bekannten Definition  $\vartheta(v_1, v_2)$  zweier Variablen  $v_1, v_2$  und dreier Parameter  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  aus und unterscheide die 16 coordinirten Formen der Function nach WEIERSTRASS durch die Zweiindices-bezeichnung.<sup>1</sup> Die Variablen  $v_1, v_2$  und die Parameter  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  sollen dann von  $u_1, u_2$  und den auf reellem Wege mit den positiven Werthen der reellen Quadratwurzeln  $\sqrt{Z^2}$  und  $\sqrt{-Z^2}$  berechneten Constanten:

$$(3) \quad \left| \begin{array}{l} A_1 = \int_{\gamma}^{\mu_0} \frac{(z - \mu_0) dz}{2\sqrt{Z^2}}, \quad B_1 = - \int_{\beta}^{\alpha} \frac{(z - \mu_0) dz}{2\sqrt{Z^2}}, \quad C_1 = \int_{\lambda_0}^{\gamma} \frac{(z - \mu_0) dz}{2\sqrt{-Z^2}}, \\ A_2 = \int_{\gamma}^{\mu_0} \frac{(z - \lambda_0) dz}{2\sqrt{Z^2}}, \quad B_2 = - \int_{\beta}^{\alpha} \frac{(z - \lambda_0) dz}{2\sqrt{Z^2}}, \quad C_2 = \int_{\lambda_0}^{\gamma} \frac{(z - \lambda_0) dz}{2\sqrt{-Z^2}}, \\ D_1 = - \int_{\alpha}^{\infty} \frac{(z - \mu_0) dz}{2\sqrt{-Z^2}}, \quad D_2 = - \int_{\alpha}^{\infty} \frac{(z - \lambda_0) dz}{2\sqrt{-Z^2}}, \end{array} \right.$$

in folgender Weise abhängen:

$$(4) \quad v_1 = \frac{u_1 B_2 - u_2 B_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \frac{\pi i}{2}, \quad v_2 = \frac{A_1 u_2 - A_2 u_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \frac{\pi i}{2};$$

$$(5) \quad \left| \begin{array}{l} a_{11} = - \frac{C_1 B_2 - C_2 B_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \pi, \quad a_{22} = - \frac{A_1 D_2 - A_2 D_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \pi, \\ a_{12} = a_{21} = - \frac{D_1 B_2 - D_2 B_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \pi = - \frac{A_1 C_2 - A_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \pi. \end{array} \right.$$

<sup>1</sup> Vgl. Mathematische Annalen, Bd. 24, S. 284.

Als Functionen von  $u_1, u_2$  seien die Functionen  $\vartheta(v_1, v_2)$  mit  $\theta(u_1, u_2)$  bezeichnet. Es sei überdies mit ebenfalls positiven Werthen von  $\sqrt{Z^2}$ :

$$(6) \quad E = \int_r^{\mu_0} \frac{(z - \lambda_0)(z - \mu_0) dz}{2\sqrt{Z^2}}, \quad F = - \int_{\tilde{\rho}}^{\alpha} \frac{(z - \lambda_0)(z - \mu_0) dz}{2\sqrt{Z^2}}.$$

Alsdann geben die Formeln:<sup>1</sup>

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{\alpha - \lambda_0}} = \sqrt[4]{\frac{(\alpha - \lambda_0)(\alpha - \mu_0)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}} \frac{\theta_{45}(u_1, u_2)}{\theta(u_1, u_2)}, \\ \frac{y}{\sqrt{\beta - \lambda_0}} = \sqrt[4]{\frac{(\beta - \lambda_0)(\beta - \mu_0)}{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)}} \frac{\theta_{35}(u_1, u_2)}{\theta(u_1, u_2)}, \\ \frac{z}{\sqrt{\gamma - \lambda_0}} = \sqrt[4]{\frac{(\gamma - \lambda_0)(\mu_0 - \gamma)}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)}} \frac{\theta_{51}(u_1, u_2)}{\theta(u_1, u_2)} \end{cases}$$

bei gleichzeitiger unabhängiger Veränderlichkeit der beiden Variablen  $u_1, u_2$  im reellen Größengebiet die Coordinaten  $x, y, z$  der Punkte der zwischen den beiden Zweigen der Krümmungskurve  $\mu = \mu_0$  gelegenen Zone des Ellipsoids  $\lambda = \lambda_0$ ; und zwar erhält man, während  $u_1, u_2$  ein vollständiges System modulis  $(4A_1, 4A_2; 4B_1, 4B_2)$  incongruenter Werthepaare durchläuft, jeden Punkt der Zone zweimal. Lässt man dagegen, von einem der beiden einem Punkt der Zone auf solche Weise zugehörigen reellen Werthepaare  $u_1, u_2$  ausgehend, fernerhin  $u_2$  unverändert,  $u_1$  aber beständig wachsen oder beständig abnehmen, so beschreibt der Punkt  $(x, y, z)$  eine der beiden durch seine Ausgangslage hindurchgehenden geodätischen Linien nach der einen oder anderen ihrer beiden Richtungen. Setzt man z. B.  $u_2 = 0$  oder  $u_2 = -2A_2$  und lässt beziehungsweise  $u_1$  von  $u_1 = 0$  oder  $u_1 = -2A_1$  an beständig wachsen oder abnehmen, so erhält man die 2 geodätischen Curvenzüge, welche sich im Punkte  $x = \sqrt{\alpha - \lambda_0}, y = 0, z = 0$

<sup>1</sup> Meine Indicesbezeichnung der Function  $\theta(u_1, u_2)$  geht in die WEIERSTRASS'sche über, wenn man überall die Zahl 5 weglässt und  $\theta_5$  statt  $\theta$  schreibt, also

$\theta_5 \theta_{24} \theta_{04} \theta_{02} \theta_3 \theta_1 \theta_{13} \theta_{01} \theta_{03} \theta_0 \theta_{12} \theta_{23} \theta_2 \theta_{14} \theta_{34} \theta_4$

statt

$\theta \theta_{24} \theta_{04} \theta_{02} \theta_{35} \theta_{51} \theta_{13} \theta_{01} \theta_{03} \theta_{05} \theta_{11} \theta_{23} \theta_{25} \theta_{41} \theta_{43} \theta_{45}$ .

kreuzen. Setzt man hinwiederum  $u_2 = -A_2$  und lässt  $u_1$  von  $u_1 = -A_1$  wachsen und abnehmen, so beschreibt der Punct  $(x, y, z)$  den geodätischen Curvenzug, welcher in einem der Punkte  $\mu = \mu_0$ ,  $\nu = \beta$  die Krümmungscurve  $\mu = \mu_0$  berührt.

Lässt man endlich  $u_1$ ,  $u_2$  der Gleichung  $\theta_{25}(u_1, u_2) = 0$  entsprechend variieren, etwa von dem Werthepaare  $-A_1$ ,  $-A_2$  an, so beschreibt der Punct  $(x, y, z)$  die Krümmungscurve  $\mu = \mu_0$  selbst.

Die Formeln (7) geben also einerseits die Fläche der zwischen den beiden Zweigen der Krümmungscurve  $\mu = \mu_0$  gelegenen Zone des Ellipsoides  $\lambda = \lambda_0$ , andererseits diese Krümmungscurve und ihre geodätischen Tangenten durch die Parameter  $u_1$ ,  $u_2$  dargestellt.

§ 2. Um auch die Bogenlängen  $S_1$  und  $S_2$  der betrachteten Curven auf dem Ellipsoid durch die Parameter  $u_1$ ,  $u_2$  ausgedrückt zu erhalten, wird man zuerst die allgemeinere Aufgabe lösen:

Die Integralsummen 2. und 3. Gattung:

$$(II) \quad S_1 = \int_{\beta}^{\nu, N} \frac{(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0) d\nu}{2N} - \int_{\gamma}^{\mu, M} \frac{(\mu - \lambda_0)(\mu - \mu_0) d\mu}{2M},$$

$$(II') \quad S_2 = \sqrt{\frac{(\alpha - \omega)(\beta - \omega)(\gamma - \omega)}{(\mu_0 - \omega)(\lambda_0 - \omega)}} \left\{ \int_{\beta}^{\nu, N} \frac{(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0) d\nu}{(\nu - \omega)2N} - \int_{\gamma}^{\mu, M} \frac{(\mu - \lambda_0)(\mu - \mu_0) d\mu}{(\mu - \omega)2M} \right\}$$

durch die Integralsummen 1. Gattung  $u_1$ ,  $u_2$ , bei unbeschränkter Veränderlichkeit der gemeinsamen oberen Grenzen  $\nu$ ,  $N$  und  $\mu$ ,  $M$  innerhalb des hyperelliptischen Gebildes, darzustellen.

Dabei wird man in  $S_2$  zugleich an Stelle von  $\omega$  zwei neue Parameter  $s_1$ ,  $s_2$  einführen, welche definiert sind durch die Gleichungen:

$$(I') \quad s_1 = \int_{-\infty}^{\omega, \Omega} \frac{(\lambda - \mu_0) d\lambda}{2A}, \quad s_2 = \int_{-\infty}^{\omega, \Omega} \frac{(\lambda - \lambda_0) d\lambda}{2A}, \quad \theta_{13}(s_1, s_2) = 0;$$

unter  $A$  und  $\Omega$  sind die mit  $z = \lambda$  und  $z = \omega$  gebildeten Werthe der Quadratwurzel  $Z$  zu verstehen.

Vermöge der in (I) und (I') angenommenen Beziehung zwischen den Variablen  $\nu$ ,  $\mu$  und  $u_1$ ,  $u_2$  einerseits,  $\omega$  und  $s_1$ ,  $s_2$  andererseits bestehen

die folgenden Relationen, welche als unmittelbare Ausflüsse der Umkehrung der hyperelliptischen Integralsummen 1. Gattung zu betrachten sind:<sup>1</sup>

$$(8) \quad \begin{aligned} \sqrt{(\nu - \mu_0)(\mu_0 - \mu)} &= \sqrt[4]{(\alpha - \mu_0)(\beta - \mu_0)(\mu_0 - \gamma)(\mu_0 - \lambda_0)} \frac{\theta_{25}(u_1, u_2)}{\theta(u_1, u_2)}, \\ \sqrt{(\nu - \lambda_0)(\mu - \lambda_0)} &= \sqrt[4]{(\alpha - \lambda_0)(\beta - \lambda_0)(\gamma - \lambda_0)(\mu_0 - \lambda_0)} \frac{\theta_{50}(u_1, u_2)}{\theta(u_1, u_2)}, \\ \sqrt{\mu_0 - \omega} &= \sqrt[4]{\frac{(\alpha - \mu_0)(\beta - \mu_0)(\mu_0 - \gamma)}{\mu_0 - \lambda_0}} \frac{\theta_{45}(s_1, s_2)}{\theta_{24}(s_1, s_2)}, \\ \sqrt{\lambda_0 - \omega} &= \sqrt[4]{\frac{(\alpha - \lambda_0)(\beta - \lambda_0)(\gamma - \lambda_0)}{\mu_0 - \lambda_0}} \frac{\theta_{45}(s_1, s_2)}{\theta_{40}(s_1, s_2)}, \\ \sqrt{\frac{(\alpha - \omega)(\beta - \omega)(\gamma - \omega)}{(\mu_0 - \omega)(\lambda_0 - \omega)}} &= -\sqrt[4]{\frac{(\alpha - \lambda_0)(\beta - \lambda_0)(\gamma - \lambda_0)}{\mu_0 - \lambda_0}} \frac{\theta_{45}\theta_{45}\theta_{21}(s_1, s_2)\theta_{43}(s_1, s_2)}{\theta_{21}\theta_{43}\theta_{40}(s_1, s_2)\theta_{45}(s_1, s_2)}. \end{aligned}$$

Bezeichnen ferner  $\theta$ ,  $\theta'^{(1)}$ ,  $\theta'^{(2)}$  die Werthe der Function  $\theta(u_1, u_2)$  und ihrer partiellen Ableitungen nach  $u_1$  und  $u_2$  für  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 0$ , so ist:<sup>2</sup>

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\theta'^{(1)}_{24}}{\theta_{45}} = 0, & \frac{\theta'^{(1)}_{40}}{\theta_{45}} = -\sqrt[4]{\frac{(\alpha - \lambda_0)(\beta - \lambda_0)(\gamma - \lambda_0)}{\mu_0 - \lambda_0}}, \\ \frac{\theta'^{(2)}_{24}}{\theta_{45}} = -\sqrt[4]{\frac{(\alpha - \mu_0)(\beta - \mu_0)(\mu_0 - \gamma)}{\mu_0 - \lambda_0}}, & \frac{\theta'^{(2)}_{40}}{\theta_{45}} = 0, \\ \frac{\theta'^{(2)}_{24}}{\theta'^{(1)}_{40}} = \frac{\theta_{01}\theta_{03}\theta_{25}}{\theta_{21}\theta_{23}\theta_{05}}, & \frac{\theta'^{(1)}_{13} + \theta'^{(2)}_{13}}{\theta_{45}} = 0. \end{cases}$$

Mit Benutzung dieser Formeln drücken sich die Differentiale  $dS_1$  und  $dS_2$  der Integralsummen 2. und 3. Gattung  $S_1$  und  $S_2$  in folgender Weise aus:

$$(10) \quad dS_1 = \frac{(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0) d\nu}{2N} - \frac{(\mu - \lambda_0)(\mu - \mu_0) d\mu}{2M} \\ = \frac{\theta'^{(1)2}_{40}\theta^2_{50}(u_1, u_2)}{\theta^2_{45}\theta^2(u_1, u_2)} du_1 + \frac{\theta'^{(2)2}_{24}\theta^2_{25}(u_1, u_2)}{\theta^2_{45}\theta^2(u_1, u_2)} du_2,$$

$$(10') \quad dS_2 = \sqrt{\frac{(\alpha - \omega)(\beta - \omega)(\gamma - \omega)}{(\mu_0 - \omega)(\lambda_0 - \omega)}} \left\{ \frac{(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0) d\nu}{(2N)} - \frac{(\mu - \lambda_0)(\mu - \mu_0) d\mu}{(2M)} \right\} \\ = \frac{\theta^2_{40}(s_1, s_2)\theta^2_{50}(u_1, u_2)}{\theta^2_{45}(s_1, s_2)\theta^2(u_1, u_2)} du_1 + \frac{\theta^2_{24}(s_1, s_2)\theta^2_{25}(u_1, u_2)}{\theta^2_{45}(s_1, s_2)\theta^2(u_1, u_2)} du_2 \\ = \frac{\theta'^{(1)}_{40}\theta_{45}\theta_{21}(s_1, s_2)\theta_{43}(s_1, s_2)}{\theta_{21}\theta_{43}\theta_{40}(s_1, s_2)\theta_{45}(s_1, s_2)} \frac{\theta^2_{40}(s_1, s_2)\theta^2_{50}(u_1, u_2)}{\theta^2_{45}(s_1, s_2)\theta^2(u_1, u_2)} du_1 + \frac{\theta^2_{24}(s_1, s_2)\theta^2_{25}(u_1, u_2)}{\theta^2_{45}(s_1, s_2)\theta^2(u_1, u_2)} du_2 \\ = 1 + \frac{\theta^2_{40}(s_1, s_2)\theta^2_{50}(u_1, u_2)}{\theta^2_{45}(s_1, s_2)\theta^2(u_1, u_2)} + \frac{\theta^2_{24}(s_1, s_2)\theta^2_{25}(u_1, u_2)}{\theta^2_{45}(s_1, s_2)\theta^2(u_1, u_2)}. \end{math>$$

<sup>1</sup> Vgl. Mathematische Annalen, Bd. 25, S. 416.

<sup>2</sup> Vgl. Mathematische Annalen, Bd. 24, S. 290.

§ 3. Diese Ausdrücke in den  $u_1, u_2$  und  $s_1, s_2$  können aber als vollständige Differentiale dargestellt werden mittels des für die Thetafunktionen geltenden Additionstheorems:

$$\begin{aligned} \theta_{45} \theta(u+v) \theta(u+w) \theta_{45}(v+w) &= \theta(u) \theta_{45}(v) \theta_{45}(w) \theta(u+v+w) \\ - \theta_{25}(u) \theta_{24}(v) \theta_{25}(w) \theta_{25}(u+v+w) - \theta_{50}(u) \theta_{40}(v) \theta_{40}(w) \theta_{50}(u+v+w) \\ - \theta_{02}(u) \theta_{13}(v) \theta_{13}(w) \theta_{02}(u+v+w), \end{aligned}$$

in welchem allgemein die einfachen Symbole  $u; v$ ; u. s. w. die Argumentpaare  $u_1, u_2; v_1, v_2$ ; u. s. w. vertreten und unter  $u_1, u_2; v_1, v_2; w_1, w_2$  3 Paare unabhängiger Veränderlicher verstanden werden. Wenn man dieses Additionstheorem partiell nach  $w_h$  ( $h = 1, 2$ ) differentiiert, hiernach  $w_1 = \circ, w_2 = \circ$  setzt und schliesslich durch  $\theta_{45} \theta(u) \theta_{45}(v) \theta(u+v)$  dividiert, so folgt:

$$\begin{aligned} (11) \quad & \frac{\theta'^{(h)}(u+v)}{\theta(u+v)} - \frac{\theta'^{(h)}(u)}{\theta(u)} - \frac{\theta'^{(h)}(v)}{\theta_{45}(v)} \\ &= \frac{\theta_{24}^{(h)} \theta_{25}(u) \theta_{24}(v) \theta_{25}(u+v)}{\theta_{45} \theta(u) \theta_{45}(v) \theta(u+v)} + \frac{\theta_{40}^{(h)} \theta_{50}(u) \theta_{40}(v) \theta_{50}(u+v)}{\theta_{45} \theta(u) \theta_{45}(v) \theta(u+v)} + \frac{\theta_{13}^{(h)} \theta_{02}(u) \theta_{13}(v) \theta_{02}(u+v)}{\theta_{45} \theta(u) \theta_{45}(v) \theta(u+v)}, \end{aligned}$$

wo mit  $\theta'^{(h)}(u)$ , u. s. w., der 1. partielle Differentialquotient von  $\theta(u_1, u_2)$  nach  $u_h$ , u. s. w., bezeichnet ist. Durch partielle Ableitung dieser Formel nach  $v_i$  ( $i = 1, 2$ ) und nachfolgende Nullsetzung von  $v_1$  und  $v_2$  erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \left( \frac{\theta'^{(h)}(u)}{\theta(u)} \right) - \frac{\theta'^{(h)i)}{45}}{\theta_{45}} = \frac{\theta_{24}^{(h)} \theta_{24}^{(i)} \theta_{25}^2(u)}{\theta_{45}^2 \theta^2(u)} + \frac{\theta_{40}^{(h)} \theta_{40}^{(i)} \theta_{50}^2(u)}{\theta_{45}^2 \theta^2(u)} + \frac{\theta_{13}^{(h)} \theta_{13}^{(i)} \theta_{02}^2(u)}{\theta_{45}^2 \theta^2(u)},$$

wo  $\theta'^{(h)i}$  der Werth des 2. partiellen Differentialquotienten von  $\theta_{45}(u_1, u_2)$  nach  $u_h$  und  $u_i$  für  $u_1 = \circ, u_2 = \circ$  ist.

Multipliciert man die 4 mit  $h, i = 1, 1; 1, 2; 2, 1; 2, 2$  hieraus entstehenden Formeln der Reihe nach mit  $du_1, du_2, du_1, du_2$  und addirt unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Gleichungen (9), so ergibt sich:

$$\begin{aligned} d \left( \frac{\theta'^{(1)}(u)}{\theta(u)} \right) + d \left( \frac{\theta'^{(2)}(u)}{\theta(u)} \right) - \frac{\theta'^{(11)} + \theta'^{(21)}}{\theta_{45}} du_1 - \frac{\theta'^{(12)} + \theta'^{(22)}}{\theta_{45}} du_2 \\ = \frac{\theta_{40}^{(1)2} \theta_{50}^2(u)}{\theta_{45}^2 \theta^2(u)} du_1 + \frac{\theta_{24}^{(2)2} \theta_{25}^2(u)}{\theta_{45}^2 \theta^2(u)} du_2 \end{aligned}$$

und damit nach (10):

$$(12) \quad dS_1 = d\left(\frac{\theta'^{(1)}(u_1, u_2)}{\theta(u_1, u_2)}\right) + d\left(\frac{\theta'^{(2)}(u_1, u_2)}{\theta(u_1, u_2)}\right) - \frac{\theta''^{(11)} + \theta''^{(21)}}{\theta_{45}} du_1 - \frac{\theta''^{(12)} + \theta''^{(22)}}{\theta_{45}} du_2.$$

Lässt man endlich  $u_1, u_2$ , von dem Werthepaare  $\circ, \circ$  an, eine continuirliche Reihe von Werthepaaren durchlaufen, so ist durch die Gleichungen (I) im Allgemeinen eine entsprechende Reihe von Stellenpaaren  $\nu, N; \mu, M$  im hyperelliptischen Gebilde gegeben; und die längs dieser zusammengehörigen Werthreihen  $u_1, u_2$  und  $\nu, N; \mu, M$  vollzogene Integration der Differentialgleichung (12) giebt:

$$(13) \quad S_1 = \int_{\beta}^{\nu, N} \frac{(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0) d\nu}{2N} - \int_{\gamma}^{\mu, M} \frac{(\mu - \lambda_0)(\mu - \mu_0) d\mu}{2M} - \frac{\partial \log \theta(u_1, u_2)}{\partial u_1} + \frac{\partial \log \theta(u_1, u_2)}{\partial u_2} - \frac{\theta''^{(11)} + \theta''^{(21)}}{\theta_{45}} u_1 - \frac{\theta''^{(12)} + \theta''^{(22)}}{\theta_{45}} u_2.$$

Statt der Nullwerthe der 2. Ableitungen der Function  $\theta_{45}(u_1, u_2)$  können hier die Constanten (6) eingeführt werden. Es entsprechen nämlich den Werthepaaren  $A_1, A_2$  und  $B_1, B_2$  von  $u_1, u_2$  die Werthepaare  $E$  und  $F$  von  $S_1$ ; die Substitution dieser zusammengehörigen Werthepaare in die Gleichung (13) giebt die Relationen:

$$(14) \quad \begin{cases} E = \frac{\theta''^{(11)} + \theta''^{(21)}}{\theta_{45}} A_1 + \frac{\theta''^{(12)} + \theta''^{(22)}}{\theta_{45}} A_2 \\ F = \frac{\theta''^{(11)} + \theta''^{(21)}}{\theta_{45}} B_1 + \frac{\theta''^{(12)} + \theta''^{(22)}}{\theta_{45}} B_2. \end{cases}$$

Mit Benutzung dieser Formeln kann man die Gleichung (13) auch schreiben:

$$(III) \quad S_1 = \int_{\beta}^{\nu, N} \frac{(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0) d\nu}{2N} - \int_{\gamma}^{\mu, M} \frac{(\mu - \lambda_0)(\mu - \mu_0) d\mu}{2M} - \frac{EB_2 - A_2 F}{A_1 B_2 - A_2 B_1} u_1 + \frac{A_1 F - EB_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} u_2 + \frac{\partial \log \theta(u_1, u_2)}{\partial u_1} + \frac{\partial \log \theta(u_1, u_2)}{\partial u_2}.$$

In den Variablen  $v_1, v_2$  geschrieben, wird,

$$S_1 = 2E \frac{v_1}{\pi i} + 2F \frac{v_2}{\pi i} + \frac{\partial \log \vartheta(v_1, v_2)}{\partial u_1} + \frac{\partial \log \vartheta(v_1, v_2)}{\partial u_2}.$$

Um diese Gleichung in die von Herrn WEIERSTRASS a. a. O. erhaltene Form zu setzen, hat man  $\lambda_0$  in  $\circ$ ,  $u_1$  in  $u' - \mu_0 u$ ,  $u_2$  in  $u'$ ,  $v_1$  in  $\pi iv$ ,  $v_2$  in  $\pi iv'$  umzuwandeln; man erhält dann:

$$(15) \quad S_1 = 2Ev + 2Fv' + \frac{\partial \log \vartheta(v, v')}{\partial u'}.$$

§ 4. Um in entsprechender Weise die Formel (10') zu behandeln, geht man wieder von der Gleichung (11) aus, setzt darin einmal  $v = s$  und einmal  $v = -s$  und subtrahirt die entstehenden Gleichungen; man findet mit Rücksicht auf die Relation  $\theta_{13}(s) = \circ$ :

$$(16) \quad \frac{1}{2} \frac{\theta'^{(h)}(u+s)}{\theta(u+s)} - \frac{1}{2} \frac{\theta'^{(h)}(u-s)}{\theta(u-s)} - \frac{\theta'^{(h)}(s)}{\theta_{45}(s)} = \frac{1}{2} \frac{\theta'^{(h)}_{24} \theta_{25}(u) \theta_{24}(s)}{\theta_{45} \theta(u) \theta_{45}(s)} \left( \frac{\theta_{25}(u+s)}{\theta(u+s)} + \frac{\theta_{25}(u-s)}{\theta(u-s)} \right) \\ + \frac{1}{2} \frac{\theta'^{(h)}_{40} \theta_{50}(u) \theta_{40}(s)}{\theta_{45} \theta(u) \theta_{45}(s)} \left( \frac{\theta_{50}(u+s)}{\theta(u+s)} + \frac{\theta_{50}(u-s)}{\theta(u-s)} \right).$$

Es ist aber bei beliebigem  $u_1, u_2$  und  $s_1, s_2$ :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\theta_{25}(u+s)}{\theta(u+s)} + \frac{\theta_{25}(u-s)}{\theta(u-s)} \right) = \frac{\frac{\theta_{45} \theta_{45} \theta_{01}(s) \theta_{43}(s) \theta_{25}(u)}{\theta_{01} \theta_{43} \theta_{45}(s) \theta_{45}(s) \theta(u)} - \frac{\theta_{45} \theta_{45} \theta_{13}(s) \theta_{24}(s) \theta_{03}(u) \theta_{41}(u)}{\theta_{01} \theta_{43} \theta_{45}(s) \theta_{45}(s) \theta(u) \theta(u)}}{1 + \frac{\theta_{40}^2(s) \theta_{50}^2(u)}{\theta_{45}^2(s) \theta^2(u)} + \frac{\theta_{24}^2(s) \theta_{25}^2(u)}{\theta_{45}^2(s) \theta^2(u)} + \frac{\theta_{13}^2(s) \theta_{02}^2(u)}{\theta_{45}^2(s) \theta^2(u)}}, \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\theta_{50}(u+s)}{\theta(u+s)} + \frac{\theta_{50}(u-s)}{\theta(u-s)} \right) = \frac{\frac{\theta_{45} \theta_{45} \theta_{21}(s) \theta_{43}(s) \theta_{50}(u)}{\theta_{21} \theta_{43} \theta_{45}(s) \theta_{45}(s) \theta(u)} + \frac{\theta_{45} \theta_{45} \theta_{13}(s) \theta_{21}(s) \theta_{23}(u) \theta_{41}(u)}{\theta_{21} \theta_{43} \theta_{45}(s) \theta_{45}(s) \theta(u) \theta(u)}}{1 + \frac{\theta_{40}^2(s) \theta_{50}^2(u)}{\theta_{45}^2(s) \theta^2(u)} + \frac{\theta_{24}^2(s) \theta_{25}^2(u)}{\theta_{45}^2(s) \theta^2(u)} + \frac{\theta_{13}^2(s) \theta_{02}^2(u)}{\theta_{45}^2(s) \theta^2(u)}},$$

mit  $\theta_{13}(s) = \circ$  fällt in Zähler und Nenner der rechten Seiten je ein Glied fort. Die entstehenden Ausdrücke substituire man in (16). Nimmt man dann  $h = 1, 2$ , multiplicirt mit  $du_1, du_2$  und addirt, so findet man:

$$\frac{1}{2} d \log \frac{\theta(u+s)}{\theta(u-s)} - \frac{\partial \log \theta_{45}(s)}{\partial s_1} du_1 - \frac{\partial \log \theta_{45}(s)}{\partial s_2} du_2 \\ = \frac{\theta_{01} \theta_{40}^{(1)} \theta_{21}(s) \theta_{24}(s)}{\theta_{45} \theta_{43}(s)} \frac{\theta_{40}^2(s) \theta_{50}^2(u)}{\theta_{45}^2(s) \theta^2(u)} du_1 + \frac{\theta_{21} \theta_{24}^{(2)} \theta_{01}(s) \theta_{41}(s)}{\theta_{45} \theta_{21}(s) \theta_{40}(s) \theta_{24}(s)} \frac{\theta_{24}^2(s) \theta_{25}^2(u)}{\theta_{45}^2(s) \theta^2(u)} du_2.$$

Bei beliebigem  $s_1, s_2$  besteht nun die Relation:

$$\theta \theta_{41} \theta_{43}(s) \theta_{13}(s) + \theta_{05} \theta_{23} \theta_{21}(s) \theta_{24}(s) = \theta_{03} \theta_{25} \theta_{01}(s) \theta_{40}(s),$$

die sich mit  $\theta_{13}(s) = 0$  um ein Glied reducirt und mit Rücksicht auf die vorletzte Formel (9) geschrieben werden kann:

$$\theta_{01} \theta'_{40}(s) \theta_{21}(s) \theta_{24}(s) = \theta_{21} \theta'_{24}(s) \theta_{01}(s) \theta_{40}(s).$$

Hiernach wird:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} d \log \frac{\theta(u+s)}{\theta(u-s)} - \frac{\partial \log \theta_{45}(s)}{\partial s_1} du_1 - \frac{\partial \log \theta_{45}(s)}{\partial s_2} du_2 \\ &= \frac{\theta'_{41}(s) \theta_{45}(s) \theta_{21}(s) \theta_{43}(s)}{\theta_{21} \theta_{43} \theta_{40}(s) \theta_{45}(s)} \frac{\frac{\theta_{40}^2(s) \theta_{50}^2(u)}{\theta_{45}^2(s) \theta^2(u)} du_1 + \frac{\theta_{24}^2(s) \theta_{25}^2(u)}{\theta_{45}^2(s) \theta^2(u)} du_2}{1 + \frac{\theta_{40}^2(s) \theta_{50}^2(u)}{\theta_{45}^2(s) \theta^2(u)} + \frac{\theta_{24}^2(s) \theta_{25}^2(u)}{\theta_{45}^2(s) \theta^2(u)}} \end{aligned}$$

und nach (10'):

$$(12') \quad dS_2 = \frac{1}{2} d \log \frac{\theta(u_1+s_1, u_2+s_2)}{\theta(u_1-s_1, u_2-s_2)} - \frac{\partial \log \theta_{45}(s_1, s_2)}{\partial s_1} du_1 - \frac{\partial \log \theta_{45}(s_1, s_2)}{\partial s_2} du_2.$$

Die Integration giebt wie oben:

$$\begin{aligned} (III') \quad S_2 &= \sqrt{\frac{(\alpha-\omega)(\beta-\omega)(\gamma-\omega)}{(\mu_0-\omega)(\lambda_0-\omega)}} \left| \int_{\beta}^{\nu_1 N} \frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)}{(\nu-\omega) 2N} d\nu - \int_{\gamma}^{\mu_0 M} \frac{(\mu-\lambda_0)(\mu-\mu_0)}{(\mu-\omega) 2M} d\mu \right| \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{\theta(u_1+s_1, u_2+s_2)}{\theta(u_1-s_1, u_2-s_2)} - \frac{\partial \log \theta_{45}(s_1, s_2)}{\partial s_1} u_1 - \frac{\partial \log \theta_{45}(s_1, s_2)}{\partial s_2} u_2. \end{aligned}$$

§ 5. Die in §§ 2—4 angewandte Methode zur Darstellung der Integralsummen 2. und 3. Gattung (II) und (II') durch die Integralsummen 1. Gattung (I) und (I') in der Form (III) und (III') ist nicht an die specielle Beschaffenheit der Formeln (9) gebunden, welche bedingt ist theils<sup>1</sup> (1. und 4. Formel (9)) durch die besondere Wahl der linearen Functionen im Zähler unter den Integralen (I), theils (5. und 6. Formel (9)) durch die Verlegung eines Verzweigungspunktes des hyperelliptischen Gebildes in's Unendliche. Dieselbe Methode kann vielmehr überhaupt zur Darstellung der Integralsummen 2. und 3. Gattung benutzt werden und giebt vermöge ihres Ausgangspunctes zugleich eine an die Theorie der Thetacharak-

<sup>1</sup> Vgl. das Fehlen der einen Variablen im linearen Gliede der auf den Fall  $\rho = 2$  angewandten Entwicklungen (3) bei WEIERSTRASS, CRELLE's Journal, Bd. 47, S. 291.

teristiken anschliessende Gruppierung der Integralsummen 2. und 3. Gattung mit Bezug auf die 6 Verzweigungspunkte des hyperelliptischen Gebildes:

§ 6. Über die geometrische Anwendung der Formel (III) sei noch eine kurze Bemerkung angeschlossen. Um die Bogenlänge der oben erwähnten Curven auf dem Ellipsoid  $\lambda = \lambda_0$  zu bestimmen, mag man die Formel vorerst, durch Verbindung mit der Definitionsgleichung (6), der Grösse  $E$ , in die Gestalt bringen:

$$(IV) \quad \int_{\beta}^{\nu_0 N} \frac{(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0) d\nu}{2N} - \int_{\mu_0}^{\mu_0 M} \frac{(\mu - \lambda_0)(\mu - \mu_0) d\mu}{2M} \\ = \frac{EB_2 - A_2 F}{A_1 B_2 - A_2 B_1} (u_1 + A_1) + \frac{A_1 F - EB_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} (u_2 + A_2) + \frac{\partial \log \theta(u_1, u_2)}{\partial u_1} + \frac{\partial \log \theta(u_1, u_2)}{\partial u_2}.$$

Diese Formel giebt nun, wenn  $u_2 = -A_2$  bleibt,  $u_1$  aber von  $-A_1$  an wächst, die Bogenlänge derjenigen *geodätischen Linie*, welche der in (7) definirte Punct  $(x, y, z)$  bei der gleichen Annahme über  $u_2$  und  $u_1$  beschreibt. Der *Anfangspunct* des gemessenen Bogenstückes befindet sich in einem der 4 Schnittpunkte der  $zx$ -Ebene des Coordinatensystems mit der Krümmungscurve  $\mu = \mu_0$  und ist ein *Berührungsypunct* der *geodätischen Linie mit der Krümmungscurve*. Die Formel giebt aber zugleich die Bogenlänge der *Krümmungscurve*  $\mu = \mu_0$  von demselben Anfangspuncte aus gerechnet, wenn  $u_1, u_2$  von  $-A_1, -A_2$  an beide zusammen sich bewegen, dabei aber immer der Bedingung  $\theta_{25}(u_1, u_2) = 0$  genügen.

In demselben Sinne also, wie die Formeln (7), jenachdem sich  $u_1, u_2$  nach dem Gesetze

$$(17) \quad u_2 = \text{const.} \quad \text{oder} \quad \theta_{25}(u_1, u_2) = 0$$

bewegen, die rechtwinkligen Coordinaten  $x, y, z$  der Punkte der *geodätischen Linie* oder der *Krümmungslinie* darstellen, giebt die Formel (IV) die Bogenlänge entweder der einen oder anderen Curve.

Sie stellt also auch die Bogenlänge eines aus Stücken der Krümmungscurve und geodätischen Linie zusammengesetzten Curvenzuges dar, der bei einer continuirlichen Bewegung des Werthe paares  $u_1, u_2$  durch die Formeln (7) in der Weise construirt wird, dass etwa vom Puncte  $-A_1, -A_2$  aus zuerst das 1. Gesetz (17) befolgt wird bis zu einem Werthe  $u_1 = c_1$ , der die Bedingung  $\theta_{25}(c_1, -A_2) = 0$  erfüllt, von hier ab das 2. Gesetz

(17) eintritt und gilt bis etwa zu einem Werthe paare  $c'_1, c'_2$  [ $\theta_{25}(c'_1, c'_2) = 0$ ], alsdann mit  $u_2 = c'_2$  wieder das 1. Gesetz befolgt wird, u. s. w. Der so construirte Curvenzug auf dem Ellipsoid  $\lambda = \lambda_0$  ist allenthalben stetig gekrümmmt, indem überall, wo geodätische Linie und Krümmungskurve ineinander übergehen, zwischen beiden Berührung stattfindet.

Eine besondere Gruppe solcher Curvenzüge verdient hervorgehoben zu werden. Lässt man nämlich in (7) zuerst bei constantem  $u_2 = -A_2$  die Variable  $u_1$  von  $-A_1$  an wachsen bis zu dem übernächsten Werthe, der mit  $u_2 = -A_2$  zusammen der Gleichung  $\theta_{25}(u_1, u_2) = 0$  genügt, und der, wie sich zeigen lässt,  $< (-A_1 - 4A_1 - 4B_1)$  ist, lässt von hier ab aber  $u_1, u_2$  beide dieser Gleichung entsprechend sich weiter bewegen bis zu dem Werthe paare:  $-A_1 - 4A_1 - 4B_1, -A_2 - 4A_2 - 4B_2$ : so beschreibt der Punct  $(x, y, z)$  einen *geschlossenen Curvenzug*, der zuerst als geodätische Linie von einem Berührungs punkte mit dem einen der beiden Zweige der Krümmungskurve  $\mu = \mu_0$  ausgehend, bis zum nächsten Berührungs punkt mit dem nämlichen Zweige sich fortsetzt, von hier aus aber längs dieses Zweiges selbst fortlaufend sich schliesst. Für die *Bogenlänge dieses geschlossenen Curvenzuges* giebt die Formel (IV) mit

$$u_1 = -A_1 - 4A_1 - 4B_1, \quad u_2 = -A_2 - 4A_2 - 4B_2$$

den (positiven) Werth:  $L = -4E - 4F$ . Hierbei kommt es übrigens auf den Anfangspunct der Construction des geschlossenen Zuges nicht an.

Diese Bemerkung giebt die *geometrische Bedeutung der doppelten Summe der beiden reellen Periodicitätsmoduln  $-2E, -2F$  des hyperelliptischen Integrals 2. Gattung*, welche analog ist der Bedeutung des vierfachen ganzen elliptischen Integrals 2. Gattung als Ausdruckes für den Umfang der Ellipse.

Breslau, im October 1885.

SUR UN THÉORÈME DE M. HERMITE  
RELATIF À LA FONCTION  $E(x)$

PAR

M. A. STERN  
À BERNE.

Une considération très élémentaire conduit à la formule

$$E(x) + E\left(x + \frac{1}{m}\right) + E\left(x + \frac{2}{m}\right) + \dots + E\left(x + \frac{m-1}{m}\right) = E(mx)$$

que M. HERMITE a démontrée dans le T. 5 de ce journal (p. 315).

Soient  $k$  et  $m$  deux nombres entiers,  $k < m$ , et

$$x \geq E(x) + \frac{k}{m}, \quad x < E(x) + \frac{k+1}{m}.$$

On a donc

$$mx \geq mE(x) + k, \quad mx < mE(x) + k + 1$$

et

$$E(mx) = mE(x) + k.$$

D'ailleurs on a

$$x + \frac{m-k-1}{m} < E(x) + \frac{k+1}{m} + \frac{m-k-1}{m}$$

$$x + \frac{m-k}{m} \geq E(x) + \frac{k}{m} + \frac{m-k}{m}$$

c'est à dire

$$x + \frac{m-k-1}{m} < E(x) + 1$$

$$x + \frac{m-k}{m} \geq E(x) + 1.$$

Ainsi on voit que chaque terme de la série

$$E(x), E\left(x + \frac{1}{m}\right), \dots, E\left(x + \frac{m-k-1}{m}\right)$$

a la valeur  $E(x)$ , pendant que chaque terme de la série

$$E\left(x + \frac{m-k}{m}\right), \dots, E\left(x + \frac{m-1}{m}\right)$$

est  $= E(x) + 1$ . La somme de ces deux séries aura donc la valeur

$$(m-k)E(x) + k[E(x) + 1] = mE(x) + k = E(mx).$$

Cette démonstration conduit aussi au théorème suivant:

La valeur de la série

$$S = E\left(x + \frac{1}{m}\right) - E\left(x + \frac{2}{m}\right) + E\left(x + \frac{3}{m}\right) - \dots \pm E\left(x + \frac{m-1}{m}\right)$$

est  $= E(x) - 1$ ,  $E(x) + 1$ , zéro, selon que les nombres  $m$  et  $k$  sont tous deux pairs ou tous deux impairs où  $m$  pair et  $k$  impair ou  $m$  impair et  $k$  pair.

1°. Si  $m$  et  $k$  sont pairs,  $m-k-1$  est impair, alors les  $m-k-1$  premiers termes de la série se réduisent à un seul qui a la valeur  $E(x)$  tandis que les  $k$  termes suivants se détruisent mutuellement.

2°. Si  $m$  et  $k$  sont impairs,  $m-k-1$  est aussi impair, la somme des  $m-k-1$  premiers termes a la valeur  $E(x)$ , tandis que les  $k$  termes suivants se réduisent à un seul doué du signe négatif, ainsi on a  $S = E(x) - [E(x) + 1] = -1$ . On voit de même que

3°. Si  $m$  est pair et  $k$  impair la somme des  $m-k-1$  premiers termes sera = 0 et la somme des  $k$  suivants se réduira à  $E(x) + 1$ . Et

4°. Si  $m$  est impair et  $k$  pair, tant la somme des  $m-k-1$  premiers termes que la somme des  $k$  suivants se réduira à zéro.

En combinant les deux théorèmes par addition et soustraction on trouve les formules suivantes:

Si  $m$  est un nombre pair on aura, selon que  $k$  est pair ou impair

$$E\left(x + \frac{1}{m}\right) + E\left(x + \frac{3}{m}\right) + E\left(x + \frac{5}{m}\right) + \dots + E\left(x + \frac{m-1}{m}\right)$$

$$= \frac{E(mx)}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{E(mx) + 1}{2}$$

$$E\left(x + \frac{2}{m}\right) + E\left(x + \frac{4}{m}\right) + \dots + E\left(x + \frac{m-2}{m}\right)$$

$$= \frac{E(mx) - 1}{2} - E(x) \quad \text{ou} \quad = \frac{E(mx) - 1}{2} - E(x).$$

Si  $m$  est un nombre impair on aura, selon que  $k$  est pair ou impair,

$$E\left(x + \frac{1}{m}\right) + E\left(x + \frac{3}{m}\right) + \dots + E\left(x + \frac{m-2}{m}\right)$$

$$= \frac{E(mx) - E(x)}{2} \quad \text{ou} \quad = \frac{E(mx) - E(x) - 1}{2}$$

$$E\left(x + \frac{2}{m}\right) + E\left(x + \frac{4}{m}\right) + \dots + E\left(x + \frac{m-1}{m}\right)$$

$$= \frac{E(mx) - E(x)}{2} \quad \text{ou} \quad = \frac{E(mx) - E(x) + 1}{2}.$$

Il est évident que,  $m$  étant pair,  $E(mx)$  sera pair si  $k$  est pair et impair si  $k$  est impair, tandis que,  $m$  étant impair,  $E(mx) - E(x)$  sera pair si  $k$  est pair et impair si  $k$  est impair.

Les considérations précédentes montrent aussi qu'on peut exprimer la valeur  $S$  de la série

$$\begin{aligned} & E\left(x + \frac{1}{m}\right) + 2E\left(x + \frac{2}{m}\right) + \dots + (m-k-1)E\left(x + \frac{m-k-1}{m}\right) \\ & + (m-k)E\left(x + \frac{m-k}{m}\right) + \dots + (m-1)E\left(x + \frac{m-1}{m}\right) \end{aligned}$$

au moyen de  $E(x)$  et de  $E(mx)$ .

Car on a

$$\begin{aligned} S &= \frac{(m-k)(m-k-1)}{2} E(x) + \left[ \frac{m(m-1)}{2} - \frac{(m-k)(m-k-1)}{2} \right] (E(x) + 1) \\ &= \frac{m(m-1)}{2} E(x) + \frac{m(m-1)}{2} - \frac{(m-k)(m-k-1)}{2}. \end{aligned}$$

Si, dans cette équation, on substitue  $E(mx) = mE(x)$  au lieu de  $k$ , on trouve

$$S = \frac{(2m-1)E(mx) - m^2 E(x) - [E(mx) - mE(x)]^2}{2}.$$

Soit p. e.  $x = \frac{19}{8}$ ,  $m = 6$ , alors on a  $E(x) = 2$ ,  $E(mx) = 14$ , et

$$S = 39 = \frac{11 \cdot 14 - 2 \cdot 36 - 4}{2}.$$

Il est évident qu'on trouve par la même méthode la valeur de la série beaucoup plus générale

$$\begin{aligned} f(1)E\left(x + \frac{1}{m}\right) + f(2)E\left(x + \frac{2}{m}\right) + \dots + f(k-1)E\left(x + \frac{m-k-1}{m}\right) + \dots \\ + f(m-1)E\left(x + \frac{m-1}{m}\right), \end{aligned}$$

$f(k)$  désignant une fonction de  $k$ , si l'on suppose connue la valeur d'une série de la forme

$$f(1) + f(2) + \dots + f(m).$$

Berné le 7 Janvier 1886.

## ANZAHL-BESTIMMUNGEN FÜR LINEARE RÄUME

BELIEBIGER DIMENSION

VON

H. SCHUBERT

in HAMBURG.

In einer Abhandlung,<sup>1</sup> die im 26<sup>ten</sup> Bande der Mathematischen Annalen (S. 26—51) erschienen ist, habe ich als Funktionen von  $n$  alle diejenigen Anzahlen ausgedrückt, welche angeben, wieviel *Strahlen* in einem  $n$ -dimensionalen linearen Raum gegebene Grundbedingungen erfüllen, wo unter Grundbedingung jede Bedingung zu verstehen ist, welche verlangt, dass ein Strahl in einem gegebenen  $\alpha$ -dimensionalen linearen Raum liegt ( $\alpha \leq n$ ) und dabei einen in diesem Raum liegenden  $a$ -dimensionalen linearen Raum ( $a < \alpha$ ) schneidet, d. h. einpunktig trifft. Zugleich habe ich dort nicht allein für den Strahl sondern auch für die Ebene und überhaupt für jeden  $p$ -dimensionalen linearen Raum diejenigen Bedingungen aufgezählt und auch mit passenden Symbolen bezeichnet, welche man als *Grundbedingungen* zu betrachten hat. Ich wiederhole hier diese auch im Folgenden fortwährend angewandte Bezeichnungsweise:

Die Dimension des linearen Raums, in welchem alle vorkommenden Gebilde gedacht werden sollen, heisse stets  $n$ . Es bedeute ferner jedes Symbol

[ $a$ ],

<sup>1</sup> Die  $n$ -dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raumes. Von dieser Abhandlung, die ich im Folgenden immer kurz *Fund. Anz.* nennen werde, benutze ich hier hauptsächlich nur die dort in § 2 angeführten, zum Theil auch schon von Herrn VERONESE (Mathematische Annalen, Bd. 19) zusammengestellten, sehr naheliegenden allgemeinen Sätze über lineare Räume und ihre Dimensionen.

wo  $a$  irgend eine ganze Zahl oder ein eine ganze Zahl darstellender Buchstaben-Ausdruck ist, einen  $a$ -dimensionalen linearen Raum, z. B. [o] einen Punkt, [1] einen Strahl, [2] eine Ebene, u. s. w., endlich [n] den  $n$ -dimensionalen linearen Raum, der allen Betrachtungen zu Grunde gelegt wird. Man erhält dann die sämtlichen Grundbedingungen, welche einem [p] auferlegbar sind, wenn man sich auf alle mögliche Weise  $p + 1$  Räume  $[a_0], [a_1], [a_2], \dots, [a_p]$  als gegeben denkt, von denen  $[a_0]$  in  $[a_1], [a_1]$  in  $[a_2], [a_2]$  in  $[a_3]$ , u. s. w., liegt, und wenn man dann verlangt, dass der [p] mit dem  $[a_0]$  einen Punkt, mit dem  $[a_1]$  einen Strahl, mit dem  $[a_2]$  eine Ebene, und überhaupt mit dem  $[a_k]$  einen [k] gemeinsam haben soll. Die Bedingung, welche dadurch dem [p] auferlegt ist, bezeichne ich stets mit

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{p-1}, a_p).$$

Es bedeutet hiernach z. B. das Grundbedingungs-Symbol:

(o, 2), dass ein Strahl einem gegebenen Strahlbüschel angehören soll,

(o, n), dass ein Strahl durch einen gegebenen Punkt gehen soll,

(4, 5), dass ein Strahl in einem gegebenen fünfdimensionalen linearen Raum liegen soll (dass er dabei auch einen in dem [5] liegenden [4] schneiden soll, kann bei der Übersetzung des Symbols fortgelassen werden, weil in einem [5] jeder Strahl mit einem [4] einen Punkt gemein hat),

(n - 3, n - 1, n), dass eine Ebene mit einem [n - 3] einen Punkt gemeinsam haben soll,

(a - 2, a - 1, a), dass eine Ebene in einem [a] liegen soll,

(o, 1, 2, 3), dass ein [3] gegeben sein soll,

(o, 1, 4, 5, n), dass ein [4] mit einem gegebenen [5] einen [3] gemeinsam haben soll, und dabei durch einen gegebenen, in dem [5] liegenden Strahl gehen soll.

Aus der Definition des Bedingungssymbols  $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_p)$  geht hervor, dass  $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_p \leq n$  sein muss. Da  $a_0$  nicht kleiner als o sein kann, so kann also auch  $a_k$  nicht kleiner als k sein. Indem man die  $p + 1$  Buchstaben  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p$  allen hiernach zugängigen ganzen Zahlen gleichsetzt, erhält man leicht, dass sich einem [p]

im ganzen<sup>1</sup>  $(n+1)_{p+1} = \frac{[n+1]}{[p+1][n-p]}$  Grundbedingungen auferlegen lassen, wobei die nullfache Grundbedingung  $(n-p, n-p+1, \dots, n-1, n)$  und die Grundbedingung  $(0, 1, 2, \dots, p)$ , welche ausspricht, dass der  $[p]$  gegeben ist, mitgezählt sind. In den *Fund. Anz.* zeigte ich ferner, dass ein  $[p]$  die Konstanten-Zahl  $(p+1)(n-p)$  hat, und dass die Dimension der Grundbedingung  $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_p)$  gleich

$$(p+1)n - \frac{1}{2}p(p+1) - (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_p)$$

ist.

*Fundamentale Anzahlen* eines  $[p]$  mögen nun alle diejenigen Anzahlen heissen, welche angeben, wieviel Gebilde  $[p]$  irgend welche gegebene Grundbedingungen erfüllen, wobei die Dimensionssumme der gegebenen Grundbedingungen natürlich gleich der Konstantenzahl  $(p+1)(n-p)$  des  $[p]$  sein muss.

Was den *Punkt* anbetrifft, so sind für ihn alle fundamentalen Anzahlen selbstverständlich gleich 1. Algebraisch heisst ja dies nichts anderes, als dass, wenn beliebig viele Systeme von zusammen  $n$  Gleichungen ersten Grades zwischen  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  gegeben sind, eine einzige Wertgruppe der  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  existiert, die alle Gleichungssysteme zugleich befriedigt.

Was den *Strahl* anbetrifft, so habe ich für ihn die sämmtlichen fundamentalen Anzahlen in den *Fund. Anz.* bestimmt. Die Mittel hierzu lieferte eine Formel, welche jede aus zwei Grundbedingungen zusammengesetzte Bedingung als Summe von nicht-zusammengesetzten Grundbedingungen ausdrückte.<sup>2</sup> Hierbei ergab sich auch die Anzahl der Strahlen, welche in einem  $[n]$  einen gegebenen  $[a]$  schneiden, dabei in einem durch diesen  $[a]$  gehenden  $[\alpha]$  liegen, und ausserdem  $\alpha + a - 1$  beliebig gegebene  $[n-2]$  schneiden. Die Funktion von  $a$  und  $\alpha$ , welche diese Anzahl ausdrückte,<sup>3</sup> kann folgendermaassen geschrieben werden:

$$\frac{[a+a-1(a-a)]}{[\alpha][a]}.$$

<sup>1</sup> Hier wie im Folgenden bezeichnet  $[a]$  das Produkt aller ganzen Zahlen von 1 bis  $a$ , und  $b_c$  die Kombinationszahl, welche gleich  $\frac{[b]}{[c][b-c]}$  ist.

<sup>2</sup> Vergl. *Mathematische Annalen*, Bd. 26, S. 40.

<sup>3</sup> Vergl. *Mathematische Annalen*, Bd. 26, S. 46 oben.

In der vorliegenden Abhandlung ist nun, als ziemlich allgemeines Beispiel für die Bestimmung der fundamentalen Anzahlen von linearen Räumen höherer Dimension, zunächst für die Ebene und dann auch allgemein für den  $[p]$ , das Analogon bezw. die Verallgemeinerung der eben angegebenen Formel entwickelt. Dem entsprechend zerfällt diese Abhandlung in drei Abschnitte.

Im ersten Abschnitt wird die Formel entwickelt, welche für jeden  $[p]$  die aus einer beliebigen Grundbedingung  $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_p)$  und der einfachen Grundbedingung  $(n-p-1, n-p+1, n-p+2, \dots, n)$  zusammengesetzte Bedingung als Summe von nicht zusammengesetzten Grundbedingungen darstellt.<sup>1</sup> Bei der Ableitung dieser Formel habe ich von keinen andern Hilfsmitteln, als von den folgenden beiden allgemeinen Sätzen Gebrauch gemacht. Erstens: Wenn ein  $[a]$  und ein  $[b]$  so liegen, dass sie einen  $[c]$ , aber nicht unendlich viele  $[c]$ , gemeinsam haben, so giebt es immer einen und nur einen  $[a+b-c]$ , welcher den  $[a]$  und den  $[b]$  zugleich enthält.<sup>2</sup> Zweitens: Wenn man den beiden Gebilden, welche durch zwei einem Gebilde  $\Gamma$  auferlegte algebraische Bedingungen als gegeben vorausgesetzt werden, eine speciellere Lage zu einander erteilt, so wird die Anzahl von Gebilden  $\Gamma$ , welche diese beiden Bedingungen und ausserdem noch irgend welche andere algebraische Bedingungen erfüllen, erhalten oder unendlich gross.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Man erinnere sich aus meinem Bedingungskalkül (§§ 2 und 3 meines *Kalküls der abzählenden Geometrie*, Leipzig 1879), dass erstens das *Produkt* mehrerer Bedingungen die Bedingung bezeichnet, welche ausspricht, dass jene Bedingungen zugleich erfüllt werden sollen, dass zweitens eine einem Gebilde von der Konstantenzahl  $c$  auferlegte  $c$ -fache Bedingung gleich der Anzahl der Gebilde gesetzt wird, die diese Bedingung erfüllen, und dass drittens eine lineare Gleichung zwischen  $d$ -fachen Bedingungen, die einem solchen Gebilde auferlegt sind, aussprechen soll, dass aus ihr eine richtige Zahlengleichung entsteht, wenn man jede dieser  $d$ -fachen Bedingungen mit einer und derselben  $(c-d)$ -fachen Bedingung multipliziert, und für die erhaltenen  $c$ -fachen Bedingungsprodukte die zugehörigen Anzahlen einsetzt.

<sup>2</sup> Dieser Satz, der für  $a = 1, b = 1, c = 0$  das geometrische Axiom giebt, dass zwei sich schneidende Strahlen zugleich in einer und derselben Ebene liegen, ist algebraisch leicht ersichtlich (Vergl. die *Fund. Anz.*, § 2, III).

<sup>3</sup> Dieser Satz ist nichts anderes als eine Form jenes fruchtbaren, der Algebra entlehnten Princips, das ich in meinem *Kalkül d. abzähl. Geom.* (§ 4) Princip der Erhaltung der Anzahl genannt habe. Bei den Anwendungen hier sind die beiden als gegeben vorausgesetzten Gebilde immer lineare Räume.

Im zweiten Abschnitt werde ich, von den kleinsten Werten von  $a_0$  und  $a_1$  ausgehend und allmählich zu den allgemeinen Werten aufsteigend, schliesslich finden, dass die Anzahl der Ebenen, welche die Bedingung  $(a_0, a_1, a_2)$  erfüllen und ausserdem jeden von  $a_0 + a_1 + a_2 - 3$  gegebenen  $(n - 3)$ -dimensionalen linearen Räumen einpunktig treffen, durch den folgenden Ausdruck dargestellt wird:

$$\frac{|a_0 + a_1 + a_2 - 3 \cdot (a_1 - a_0)(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)|}{|a_0| |a_1| |a_2|}.$$

Im dritten Abschnitt wird der Beweis geführt, dass auch die allgemeine Formel, welche aus der Gestalt der eben angeführten Formel und der auf den Strahl bezüglichen analogen Formel für den  $[p]$  vermutet werden kann, wirklich richtig ist. Das allgemeinste Resultat dieser Abhandlung ist also die Bestimmung der Anzahl aller derjenigen  $[p]$ , welche die beliebige Bedingung  $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{p-1}, a_p)$  erfüllen, und mit  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_p - \frac{1}{2} p(p+1)$  beliebig gegebenen  $[n-p-1]$  je einen Punkt gemeinsam haben. Die Funktion der Zahlen  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p$  und  $p$ , welche sich für diese Anzahl ergeben wird, lautet:<sup>1</sup>

$$\frac{|a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_p - \frac{1}{2} p(p+1) \cdot D|}{|a_0| |a_1| |a_2| \dots |a_p|},$$

wo  $D$  das Produkt aller möglichen  $\frac{1}{2} p(p+1)$  positiven Differenzen je zweier der Zahlen  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p$  ist.

<sup>1</sup> Den aus  $a_0 = n - p, a_1 = n - p + 1, a_2 = n - p + 2, \dots, a_p = n$  resultierenden speciellen Fall dieser Formel sprach ich schon in den Mitteilungen der Hamburger Mathematischen Gesellschaft (vom April 1884) aus, ohne aber einen Beweis hinzuzufügen. Ist noch specieller auch  $p = 1$ , so ergiebt sich ein Resultat, zu dem auch Herr FRANZ MEYER in Tübingen (Mathematische Annalen, Bd. 21, S. 132) und Herr STEPHANOS (*Thèse* vom Juli 1884), von invariantentheoretischer Seite her, gelangt sind.

## I.

Die zusammengesetzte Bedingung  $(a_0, a_1)(n-2, n)$  setzt erstens einen  $[a_1]$  und in demselben einen  $[a_0]$ , zweitens einen  $[n-2]$  als gegeben voraus, und verlangt dann die Strahlen, welche, in dem  $[a_1]$  liegend, sowohl den  $[a_0]$  als auch den  $[n-2]$  einpunktig treffen. Damit nun aber ein Strahl sowohl in dem  $[a_1]$  ganz liege wie auch den  $[n-2]$  schneide, muss er den Raum schneiden, der dem  $[a_1]$  und dem  $[n-2]$  gemeinsam ist. Dies ist aber, nach *Fund. Anz.*, §. 2, II, ein Raum von der Dimension  $a_1 + (n-2) - n$ , d. h. ein  $[a_1 - 2]$ . Jeder Strahl, der  $(a_0, a_1)(n-2, n)$  erfüllen soll, muss also in dem  $[a_1]$  liegen, und dabei erstens einen in dem  $[a_1]$  gelegenen  $[a_0]$ , zweitens auch einen gleichfalls in dem  $[a_1]$  gelegenen  $[a_1 - 2]$  schneiden. Im Hinblick auf den zweiten der in der Einleitung ausgesprochenen beiden Sätze denken wir uns nun die Lage des  $[a_0]$  und des  $[a_1 - 2]$  derartig specialisiert, dass sie nicht wie bei allgemeiner Lage einen  $[a_0 - 2]$ , sondern einen  $[a_0 - 1]$  gemeinsam haben. Dann muss nach dem ersten jener beiden Einleitungssätze ein  $[a_1 - 1]$  existieren, der beide, den  $[a_0]$  und den  $[a_1 - 2]$  zugleich enthält. Die gestellte zusammengesetzte Bedingung kann daher jetzt auf zweierlei Weise erfüllt werden, erstens von denjenigen Strahlen in  $[a_1]$ , welche einen auf dem  $[a_0 - 1]$  liegenden Punkt besitzen, zweitens aber auch von denjenigen Strahlen, welche, in dem  $[a_1 - 1]$  liegend, sowohl den  $[a_0]$  als auch den  $[a_1 - 2]$  schneiden. Den  $[a_1 - 2]$  schneidet aber jeder in  $[a_1 - 1]$  liegende Strahl, weil (*Fund. Anz.*, §. 2, II)  $(a_1 - 2) + 1 - (a_1 - 1) = 0$  ist. Wir erhalten also die beiden Bedingungen  $(a_0 - 1, a_1)$  und  $(a_0, a_1 - 1)$ . Da diese Bedingungen von derselben Dimension sind, wie die zusammengesetzte Bedingung  $(a_0, a_1)(n-2, n)$ , so ist durch die Lage-Specialisierung die Anzahl nicht unendlich gross geworden, und wir erhalten deshalb nach dem zweiten der beiden Einleitungssätze, dass die Anzahl der die Bedingung  $(a_0, a_1)(n-2, n)$  und eine sonstige algebraische Bedingung  $Z$  erfüllenden Strahlen gleich der Summe der beiden Anzahlen ist, von denen die erste angibt, wieviel Strahlen  $(a_0 - 1, a_1)$  und  $Z$  erfüllen,

die zweite angiebt, wieviel Strahlen  $(a_0, a_1 - 1)$  und  $Z$  erfüllen. In der Sprache der Bedingungs-Symbolik lautet dieses Resultat:

$$(1) \quad (a_0, a_1)(n-2, n) = (a_0 - 1, a_1) + (a_0, a_1 - 1).$$

Der Gedankengang, welcher zu dieser Formel führte, ist in zwei Fällen zu modifizieren, erstens, wenn  $a_0 = 0$  ist, zweitens, wenn  $a_1 = a_0 + 1$  ist. In diesen Fällen aber erkennt man ohne Weiteres die Richtigkeit der Formeln:

$$(0, a_1)(n-2, n) = (0, a_1 - 1)$$

und

$$(a_0, a_0 + 1)(n-2, n) = (a_0 - 1, a_0 + 1).$$

Daher kann die Formel (1) als allgemeingültig angesehen werden, wenn man die durch ihre Anwendung etwa auftretenden *sinnlosen Bedingungssymbole gleich Null* setzt. Die Sinnlosigkeit entsteht dabei auf zweierlei Weise, erstens dadurch, dass die Anwendung der Formel  $(-1, a_1)$  ergeben würde, zweitens dadurch, dass  $(a_0, a_0)$  kommen würde.

Auf die soeben für den Strahl aufgestellte Formel lässt sich nun die entsprechende Formel für die *Ebene*, d. h. für  $p = 2$ , zurückführen, wie folgende Überlegung zeigt. Jede Ebene, welche die Bedingung  $(a_0, a_1, a_2)$  und die einfache Bedingung  $(n-3, n-1, n)$  zugleich erfüllen soll, muss mit dem Raum, der dem  $[a_2]$  und dem  $[n-3]$  gemeinsam ist, also mit einem  $[a_2 - 3]$ , einen Punkt gemeinsam haben. Man lege nun diesen  $[a_2 - 3]$  und den gegebenen  $[a_1]$  derartig zusammen, dass sie einen  $[a_1 - 2]$  gemeinsam haben. Dann muss es nach dem ersten der beiden Einleitungssätze einen  $[a_2 - 1]$  geben, der beide, den  $[a_2 - 3]$  und den  $[a_1]$ , zugleich enthält. Demnach wird die gestellte zusammen gesetzte Bedingung jetzt in zwei Fällen erfüllt. Erstens erfüllt sie jede Ebene, welche einen Strahl besitzt, der, in dem  $[a_1]$  liegend, sowohl den gegebenen  $[a_0]$ , wie auch den  $[a_1 - 2]$  schneidet. Diese Strahlbedingung kann aber, wie aus Formel (1) hervorgeht, wenn man sich dort unter dem  $[n]$  den  $[a_1]$  vorstellt, gleich  $(a_0 - 1, a_1) + (a_0, a_1 - 1)$  gesetzt werden. Zweitens wird die gestellte Bedingung aber auch von jeder Ebene erfüllt, die, in dem  $[a_2 - 1]$  liegend, einen Strahl besitzt, der in dem  $[a_1]$  gelegen ist, und dabei den  $[a_0]$  schneidet, der also  $(a_0, a_1)$  erfüllt. Unnötig ist es, hinzuzufügen, dass eine solche Ebene auch den  $[a_2 - 3]$  einpunktig

treffen muss, weil dies, da  $(a_2 - 3) + 2 - (a_2 - 1) = 0$  ist, jede Ebene des  $[a_2 - 1]$  thut. Wir erhalten also:

$$(2) \quad (a_0, a_1, a_2)(n - 3, n - 1, n) = (a_0 - 1, a_1, a_2) + (a_0, a_1 - 1, a_2) \\ + (a_0, a_1, a_2 - 1).$$

Ebenso kann man nun wieder auf diese Formel für die Ebene die analoge, auf den dreidimensionalen, linearen Raum bezügliche Formel stützen, indem man, wenn  $(a_0, a_1, a_2, a_3)(n - 4, n - 2, n - 1, n)$  gegeben ist, den  $[a_2]$  und den  $[a_3 - 4]$ , in dem sich der  $[a_3]$  und der  $[n - 4]$  schneiden, so legt, dass sie einen  $[a_2 - 3]$  gemeinsam haben, wodurch dann ein  $[a_3 - 1]$  entsteht, der sowohl den  $[a_2]$  wie auch den  $[a_3 - 4]$  enthält. So erhält man, dass die gestellte Bedingung erstens von jedem  $[3]$  erfüllt wird, der eine Ebene besitzt, welche den Bedingungen  $(a_0, a_1, a_2)$  und  $(a_2 - 3, a_2 - 1, a_2)$  zugleich genügt, zweitens aber auch von jedem  $[3]$  erfüllt wird, der, in dem  $[a_3 - 1]$  liegend, eine Ebene besitzt, die der Bedingung  $(a_0, a_1, a_2)$  genügt. Also kommt:

$$(3) \quad (a_0, a_1, a_2, a_3)(n - 4, n - 2, n - 1, n) = (a_0 - 1, a_1, a_2, a_3) \\ + (a_0, a_1 - 1, a_2, a_3) + (a_0, a_1, a_2 - 1, a_3) \\ + (a_0, a_1, a_2, a_3 - 1).$$

Da die Rekursion von  $p$  auf  $p - 1$  unbehindert bleibt, so erhält man schliesslich die allgemeine Formel:

$$(4) \quad (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_p)(n - p - 1, n - p + 1, n - p + 2, \dots, n - 1, n) \\ = (a_0 - 1, a_1, a_2, a_3, \dots, a_p) + (a_0, a_1 - 1, a_2, a_3, \dots, a_p) \\ + (a_0, a_1, a_2 - 1, a_3, \dots, a_p) + \dots + (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{p-1}, a_p - 1).$$

Was oben beim Strahl über Modificationen der Formel (1) gesagt ist, gilt entsprechend auch für die Ebene, für den  $[3]$  und für den allgemeinen  $[p]$ . Danach ist die Anwendung der Formel (4) ganz unbeschränkt, wenn man die durch die Anwendung etwa auftretenden sinnlosen Bedingungssymbole gleich Null setzt. Sinnlos aber wird ein Bedingungssymbol bei der Anwendung der Formel (4) erstens dadurch, dass  $a_0 - 1$

gleich — 1 wird, weil  $a_0$  Null war, zweitens dadurch, dass zwei durch ein Komma getrennte Zahlen gleich werden, weil vorher  $a_{i+1}$  nur um 1 grösser war als  $a_i$ .

Wir fügen noch zwei Beispiele hinzu, welche einerseits die Anwendung der entwickelten Formel zeigen sollen, andererseits auch erkennen lassen, wie man mittels derselben fundamentale Anzahlen bestimmen kann. Jede Reihe geht bei diesen Beispielen aus der vorhergehenden durch Multiplication mit der Bedingung erster Dimension und durch Anwendungen unserer Formel hervor.

Für  $n = 4$ ,  $p = 2$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 4$  ergiebt sich zuerst:

$$(1, 2, 4)(1, 3, 4) = (0, 2, 4) + (1, 2, 3)$$

und hieraus nach und nach:

$$(1, 2, 4)(1, 3, 4)^2 = (0, 1, 4) + 2 \cdot (0, 2, 3),$$

$$(1, 2, 4)(1, 3, 4)^3 = 3 \cdot (0, 1, 3),$$

$$(1, 2, 4)(1, 3, 4)^4 = 3 \cdot (0, 1, 2).$$

Da  $(0, 1, 2)$  bedeutet, dass die Ebene eine gegebene Lage haben soll, also gleich 1 zu setzen ist, so heisst dieses Resultat in Worten: In einem vierdimensionalen linearen Raum giebt es immer 3 Ebenen, von denen jede eine gegebene Ebene in einer geraden Linie schneidet, und ausserdem vier gegebene Strahlen je einpunktig trifft.

Für  $n = 6$ ,  $p = 3$ ,  $a_0 = 2$ ,  $a_1 = 4$ ,  $a_2 = 5$ ,  $a_3 = 6$  ergiebt sich zuerst:

$$(2, 4, 5, 6)^2 = (1, 4, 5, 6) + (2, 3, 5, 6)$$

und dann nach und nach:

$$(2, 4, 5, 6)^3 = (0, 4, 5, 6) + 2 \cdot (1, 3, 5, 6) + (2, 3, 4, 6),$$

$$(2, 4, 5, 6)^4 = 3 \cdot (0, 3, 5, 6) + 2 \cdot (1, 2, 5, 6) + 3 \cdot (1, 3, 4, 6) \\ + (2, 3, 4, 5),$$

$$(2, 4, 5, 6)^5 = 5 \cdot (0, 2, 5, 6) + 6 \cdot (0, 3, 4, 6) + 5 \cdot (1, 2, 4, 6) \\ + 4 \cdot (1, 3, 4, 5),$$

$$\begin{aligned}
 (2, 4, 5, 6)^6 &= 5 \cdot (0, 1, 5, 6) + 16 \cdot (0, 2, 4, 6) + 10 \cdot (0, 3, 4, 5) \\
 &\quad + 5 \cdot (1, 2, 3, 6) + 9 \cdot (1, 2, 4, 5), \\
 (2, 4, 5, 6)^7 &= 21 \cdot (0, 1, 4, 6) + 21 \cdot (0, 2, 3, 6) + 35 \cdot (0, 2, 4, 5) \\
 &\quad + 14 \cdot (1, 2, 3, 5), \\
 (2, 4, 5, 6)^8 &= 42 \cdot (0, 1, 3, 6) + 56 \cdot (0, 1, 4, 5) + 70 \cdot (0, 2, 3, 5) \\
 &\quad + 14 \cdot (1, 2, 3, 4), \\
 (2, 4, 5, 6)^9 &= 42 \cdot (0, 1, 2, 6) + 168 \cdot (0, 1, 3, 5) + 84 \cdot (0, 2, 3, 4), \\
 (2, 4, 5, 6)^{10} &= 210 \cdot (0, 1, 2, 5) + 252 \cdot (0, 1, 3, 4), \\
 (2, 4, 5, 6)^{11} &= 462 \cdot (0, 1, 2, 4), \\
 (2, 4, 5, 6)^{12} &= 462 \cdot (0, 1, 2, 3).
 \end{aligned}$$

Dieses Resultat ergiebt den Satz: In jedem sechsdimensionalen linearen Raum gibt es 462 dreidimensionale lineare Räume, von denen jeder 12 gegebene Ebenen in je einem Punkte trifft.

## II.

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist die Auffindung der Funktion, welche für die Ebene die Anzahl

$$(a_0, a_1, a_2)(n - 3, n - 1, n)^{a_0 + a_1 + a_2 - 3}$$

durch  $a_0, a_1, a_2$  ausdrückt. Dabei wollen wir von der folgenden Abkürzung Gebrauch machen. Es bezeichne

$$f(a_0, a_1, a_2)$$

stets die Zahl der Ebenen, welche die Bedingung:

$$(a_0, a_1, a_2)(n - 3, n - 1, n)^{a_0 + a_1 + a_2 - 3}$$

erfüllen, wie klein oder wie gross auch die Zahlen  $a_0, a_1, a_2$  sein mögen. Dann ist nach der in I entwickelten Formel:

$$(5) \quad f(a_0, a_1, a_2) = f(a_0 - 1, a_1, a_2) + f(a_0, a_1 - 1, a_2) + f(a_0, a_1, a_2 - 1),$$

wobei jedoch immer die Symbole  $f(-1, b, c)$ ,  $f(a, a, c)$  und  $f(a, b, b)$  zu unterdrücken sind. Bei der Ableitung der gesuchten Funktion werden wir beständig von der folgenden, bekannten, auf Kombinationszahlen bezüglichen Formel Gebrauch machen:

$$(6) \quad b_c + (b+1)_c + (b+2)_c + \dots + (b+d)_c = (b+d+1)_{c+1} - b_{c+1}.$$

Wir wenden zuerst die Formel (5) an, um  $f(0, 1, a_2)$  zu bestimmen. Dann erhalten wir:

$$(7) \quad f(0, 1, a_2) = f(0, 1, a_2 - 1) = f(0, 1, a_2 - 2) = \dots = f(0, 1, 2) = 1.$$

Um weitergehend  $f(0, 2, a_2)$  zu bestimmen, addieren wir die  $a_2 - 2$  Gleichungen:

$$\begin{aligned} f(0, 2, a_2) &= f(0, 1, a_2) + f(0, 2, a_2 - 1) \\ f(0, 2, a_2 - 1) &= f(0, 1, a_2 - 1) + f(0, 2, a_2 - 2) \\ f(0, 2, a_2 - 2) &= f(0, 1, a_2 - 2) + f(0, 2, a_2 - 3) \\ &\vdots \\ f(0, 2, 3) &= f(0, 1, 3) + 0. \end{aligned}$$

Dadurch erhalten wir bei Benutzung von (7):

$$f(0, 2, a_2) = a_2 - 2,$$

wofür wir lieber schreiben:

$$(8) \quad f(0, 2, a_2) = (a_2 - 1)_1 - (a_2 - 1)_0.$$

Um  $f(0, 3, a_2)$  zu bestimmen, addieren wir die  $a_2 - 3$  Gleichungen:

$$\begin{aligned} f(0, 3, a_2) &= f(0, 2, a_2) + f(0, 3, a_2 - 1) \\ f(0, 3, a_2 - 1) &= f(0, 2, a_2 - 1) + f(0, 3, a_2 - 2) \\ &\vdots \\ f(0, 3, 4) &= f(0, 2, 4) + 0, \end{aligned}$$

und erhalten:

$$f(0, 3, a_2) = f(0, 2, 4) + f(0, 2, 5) + \dots + f(0, 2, a_2),$$

woraus sich bei Benutzung von (8) ergiebt:

$$f(0, 3, a_2) = (3_1 - 3_0) + (4_1 - 4_0) + \dots + [(a_2 - 1)_1 - (a_2 - 1)_0],$$

wofür wegen der unter (6) angeführten Kombinationszahl-Formel gesetzt werden kann:

$$(9) \quad \begin{aligned} f(0, 3, a_2) &= (a_2)_2 - (a_2)_1 - (3_2 - 3_1) \\ &= (a_2)_2 - (a_2)_1. \end{aligned}$$

Gerade so erhält man mit Benutzung von (9):

$$f(0, 4, a_2) = (5_2 - 5_1) + (6_2 - 6_1) + \dots + [(a_2)_2 - (a_2)_1]$$

oder wegen (6):

$$(10) \quad f(0, 4, a_2) = (a_2 + 1)_3 - (a_2 + 1)_2,$$

weil  $5_3 - 5_2$  Null ist.

So fortlaufend, gelangt man zu:

$$\begin{aligned} f(0, a_1, a_2) &= [(2a_1 - 3)_{a_1-2} - (2a_1 - 3)_{a_1-3}] + [(2a_1 - 2)_{a_1-2} - (2a_1 - 2)_{a_1-3}] + \dots \\ &\dots + [(a_2 + a_1 - 4)_{a_1-2} - (a_2 + a_1 - 4)_{a_1-3}], \end{aligned}$$

woraus man erhält:

$$f(0, a_1, a_2) = [(a_1 + a_2 - 3)_{a_1-1} - (a_1 + a_2 - 3)_{a_1-2}] - [(2a_1 - 3)_{a_1-1} - (2a_1 - 3)_{a_1-2}].$$

Da die in der letzten Klammer stehenden beiden Kombinationszahlen  $(2a_1 - 3)_{a_1-1}$  und  $(2a_1 - 3)_{a_1-2}$  einander gleich sind, weil

$$(a_1 - 1) + (a_1 - 2) = 2a_1 - 3$$

ist, so kommt:

$$(11) \quad f(0, a_1, a_2) = (a_1 + a_2 - 3)_{a_1-1} - (a_1 + a_2 - 3)_{a_1-2}.$$

Drückt man die Kombinationszahlen durch Fakultäten aus, so erhält diese Formel die Form:

$$(12) \quad f(0, a_1, a_2) = \frac{a_1 + a_2 - 3 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot (a_2 - a_1)}{a_1 \cdot a_2}.$$

In derselben Weise bestimmen wir nun auch  $f(1, a_1, a_2)$ , indem wir von  $f(1, 2, a_2)$  ausgehen. Wir erhalten:

$$f(1, 2, a_2) = f(0, 2, 3) + f(0, 2, 4) + \dots + f(0, 2, a_2),$$

woraus sich bei Benutzung von (8) ergiebt:

$$f(1, 2, a_2) = (2_1 - 2_0) + (3_1 - 3_0) + \dots + [(a_2 - 1)_1 - (a_2 - 1)_0],$$

also:

$$(13) \quad f(1, 2, a_2) = (a_2)_2 - (a_2)_1 + 1.$$

Bei der Bestimmung von  $f(1, 3, a_2)$  sind die folgenden  $a_2 - 3$  Gleichungen zu addieren:

$$\begin{aligned}
 f(1, 3, a_2) &= f(0, 3, a_2) + f(1, 2, a_2) + f(1, 3, a_2 - 1) \\
 f(1, 3, a_2 - 1) &= f(0, 3, a_2 - 1) + f(1, 2, a_2 - 1) + f(1, 3, a_2 - 2) \\
 &\dots \\
 f(1, 3, 4) &= f(0, 3, 4) + f(1, 2, 4) + 0,
 \end{aligned}$$

sodass man erhält:

$$f(1, 3, a_2) = f(0, 3, 4) + f(0, 3, 5) + \dots + f(0, 3, a_2) \\ + f(1, 2, 4) + f(1, 2, 5) + \dots + f(1, 2, a_2).$$

Hieraus ergibt sich dann bei Benutzung von (9) und (13):

$$f(1, 3, a_2) = 2[(a_2 + 1)_3 - (a_2 + 1)_2] + (a_2 + 1)_1,$$

wofür wir lieber schreiben:

$$(14) \quad f(1, 3, a_2) = [3_1 - 3_0][(a_2 + 1)_3 - (a_2 + 1)_2] + 1_0 \cdot (a_2 + 1)_1$$

Bei  $f(1, 4, a_2)$  erhalten wir zunächst:

$$\begin{aligned} f(1, 4, a_2) &= f(0, 4, 5) + f(0, 4, 6) + \dots + f(0, 4, a_2) \\ &\quad + f(1, 3, 5) + f(1, 3, 6) + \dots + f(1, 3, a_2), \end{aligned}$$

und hieraus vermittelst (10) und (14):

$$f(1, 4, a_2) = [4_1 - 4_0][(a_2 + 2)_4 - (a_2 + 2)_3] + 2_0 \cdot (a_2 + 2)_2,$$

also schliesslich:

$$\begin{aligned} (15) \quad f(1, a_1, a_2) &= [(a_1)_1 - (a_1)_0][(a_1 + a_2 - 2)_{a_1} - (a_1 + a_2 - 2)_{a_1-1}] \\ &\quad + (a_1 - 2)_0(a_1 + a_2 - 2)_{a_1-2}. \end{aligned}$$

Auf demselben Wege gelangt man zu:

$$\begin{aligned} (16) \quad f(2, a_1, a_2) &= [(a_1 + 1)_2 - (a_1 + 1)_1][(a_1 + a_2 - 1)_{a_1+1} - (a_1 + a_2 - 1)_{a_1}] \\ &\quad + [(a_1 - 1)_1 - (a_1 - 1)_0][(a_1 + a_2 - 1)_{a_1-1}]. \end{aligned}$$

Entwickelt man nun auch noch die Formel für  $f(3, a_1, a_2)$ , so erkennt man, dass sich dieselbe von der für  $f(2, a_1, a_2)$  nur dadurch unterscheidet, dass sowohl die Basen wie die Indices der Kombinationszahlen um 1 gewachsen sind, und man sieht auch leicht aus dem Bildungsgesetze jener Funktionen, dass diese Eigenschaft erhalten bleibt. Daher ist:

$$\begin{aligned} f(a_0, a_1, a_2) &= [(a_0 + a_1 - 1)_{a_0} - (a_0 + a_1 - 1)_{a_0-1}] \\ &\quad \times [(a_0 + a_1 + a_2 - 3)_{a_0+a_1-1} - (a_0 + a_1 + a_2 - 3)_{a_0+a_1-2}] \\ &\quad + [(a_0 + a_1 - 3)_{a_0-1} - (a_0 + a_1 - 3)_{a_0-2}][(a_0 + a_1 + a_2 - 3)_{a_0+a_1-3}]. \end{aligned}$$

Führt man nun noch statt der Kombinationszahlen Fakultäten ein, so gelangt man nach einiger Umformung zu dem Resultate:

$$(17) \quad f(a_0, a_1, a_2) = \frac{|a_0 + a_1 + a_2 - 3 \cdot (a_1 - a_0)(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)|}{|a_0| |a_1| |a_2|}.$$

*Dies ist also in einem  $[n]$  die Zahl der Ebenen, welche in einem  $[a_2]$  liegen, einen in dem  $[a_2]$  gelegenen  $[a_1]$  in einer geraden Linie schneiden, dabei mit einem in dem  $[a_1]$  gelegenen  $[a_0]$  einen Punkt gemeinsam haben und endlich  $a_0 + a_1 + a_2 - 3$  gegebene  $[n - 3]$  in je einem Punkte treffen.*

## III.

Entsprechend der schon in II eingeführten Bezeichnung  $f(a_0, a_1, a_2)$  bezeichne allgemein für einen  $[p]$

$$f(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{p-1}, a_p)$$

stets die Anzahl derjenigen  $[p]$ , welche die Bedingung  $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{p-1}, a_p)$  erfüllen, und welche ausserdem  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_p = \frac{1}{2}p(p+1)$  gegebene  $[n-p-1]$  einpunktig zu treffen vermögen, d. h. die Anzahl, welche in unserer Symbolik durch die  $[(p+1)(n-p)]$ -fache zusammengesetzte Bedingung

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_p)(n-p-1, n-p+1, \dots, n)^{a_0+a_1+\dots+a_p-\frac{1}{2}p(p+1)}$$

ausgedrückt wird. Wegen der in I bewiesenen Formel (4) kann man dann setzen:

$$\begin{aligned} (18) \quad & f(a_0, a_1, a_2, \dots, a_p) \\ &= f(a_0-1, a_1, a_2, \dots, a_p) + f(a_0, a_1-1, a_2, \dots, a_p) \\ &+ f(a_0, a_1, a_2-1, \dots, a_p) + \dots + f(a_0, a_1, a_2, \dots, a_p-1). \end{aligned}$$

Es handelt sich nun darum, die Zahl  $f(a_0, a_1, a_2, \dots, a_p)$  wirklich als Funktion der Zahlen  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p$  darzustellen. Man kann sich dies, wie auch das zweite Beispiel am Schluss von I zeigt, dadurch bewerkstelligt denken, dass man auf jeden Addenden der rechten Seite von (18) wiederum die Formel (18) anwendet, und so fortfährt, bis schliesslich alle Addenden gleich  $f(0, 1, 2, 3, \dots, p)$  geworden sind, d. h. bis man zu

$$x \cdot f(0, 1, 2, 3, \dots, p)$$

gekommen ist. Dann muss  $x$  die gesuchte Funktion sein, da  $f(0, 1, 2, 3, \dots, p)$  bedeutet, dass der  $[p]$  eine gegebene Lage haben soll, d. h. gleich 1 zu

setzen ist. Die wirkliche Anwendung der eben erwähnten Reduktionsmethode bietet aber, so lange  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p$  allgemein bleiben, desswegen bedeutende Schwierigkeiten, weil man, wie in I ausführlich bemerkt ist, bei der Anwendung der Formel (18) darauf achten muss, dass man Symbole, in denen  $a_0$  gleich — 1 geworden ist, oder in denen zwei aufeinander folgende Zahlen, wie  $a_i$  und  $a_{i+1}$ , gleich geworden sind, vollständig zu unterdrücken hat, und an derartigen Symbolen also nicht von neuem die Reduktion anwenden darf. Da man aber, wenn man nur alle diese Bedingungen genau beachtet, auf dem besprochenen Wege zu der gesuchten Funktion gelangen müsste, so konnte der Verfasser schliessen, dass eine Funktion wirklich die Anzahl  $f(a_0, a_1, \dots, a_p)$  darstellen muss, wenn sie nur die folgenden vier Bedingungen erfüllt:

1. Sie muss der Formel (18) gehorchen;
2. Sie muss für  $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2, \dots, a_p = p$  gleich 1 werden;
3. Sie muss für  $a_0 = -1$  Null werden;
4. Sie muss auch Null werden, wenn zwei aufeinander folgende Zahlen gleich sind, also für  $a_0 = a_1$ , ferner für  $a_1 = a_2$ , u. s. w. bis für  $a_{p-1} = a_p$ .

Nun konnte aber der Verfasser aus der Gestalt der in der Einleitung erwähnten Formel für den Strahl, aus der Gestalt der Formel (17) für die Ebene, und aus der Gestalt der auch noch von ihm, analog wie für die Ebene in II, entwickelten Formel für  $f(a_0, a_1, a_2, a_3)$ , mit Recht vermuten, dass die gesuchte allgemeine Funktion folgendermaassen aussehen muss:

$$(19) \quad \frac{|a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_p - \frac{1}{2}p(p+1).D|}{|a_0| |a_1| |a_2| \dots |a_p|},$$

wo  $D$  das Produkt aller möglichen  $\frac{1}{2}p(p+1)$  positiven Differenzen der Zahlen  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p$ , oder, was dasselbe ist, die Determinante

$$(20) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_p \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_p^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0^p & a_1^p & a_2^p & \dots & a_p^p \end{vmatrix}$$

bedeutet: Man erkennt sofort, dass die Funktion (19) in der That den drei letzten der vier oben genannten Bedingungen genügt. Es handelt sich also nur noch darum, zu beweisen, dass die Funktion auch der in (18) aufgestellten Funktionalgleichung genügt. Um dieses zu beweisen, betrachten wir den Ausdruck:

Dieser Ausdruck ist eine Summe von  $p+1$  Addenden, und jeder Addend ist ein Produkt von  $a_i$  mit einem Produkte von  $p$  Summen, deren erster Addend immer 1, und deren zweiter Addend ein Bruch ist. Denkt man sich nun die angedeuteten Multiplicationen sämtlich ausgeführt, so erhält man, da jeder der  $p+1$  Addenden  $2^p$  Addenden liefert, eine Summe von im ganzen  $2^p(p+1)$  Addenden. In dieser Summe denken wir uns dann alle diejenigen Addenden zusammengefasst, welche gar keinen Bruch enthalten, dann auch alle diejenigen, welche einen Bruch enthalten, dann alle die, welche zwei Brüche als Faktoren enthalten, u. s. w. bis zu denjenigen Addenden, welche  $p$  Brüche als Faktoren enthalten. Indem wir dann die Summe aller solcher Addenden, die  $k$  Brüche enthalten, mit  $y_k$  bezeichnen, erhalten wir, dass der Ausdruck in (21) gleich

$$y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{p-1} + y_p$$

ist, wo jedes  $y_k$  eine Summe von  $p_k \cdot (p+1) - \frac{1}{k} \frac{p+1}{p-k}$  Addenden umfasst. Man erkennt dann unmittelbar, dass

$$(22) \quad y_0 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_p$$

ist. Von den  $p(p+1)$  Addenden, aus denen sich  $y_1$  zusammensetzt, fassen wir immer je zwei, welche dieselben beiden Indices enthalten, zusammen, so dass wir erhalten:

$$\begin{aligned} y_1 = & z_{01} + z_{02} + z_{03} + \dots + z_{0p} \\ & + z_{12} + z_{13} + \dots + z_{1p} \\ & + \dots \dots \dots \\ & + z_{p-1,p}, \end{aligned}$$

wo  $z_{ik}$  gleich  $\frac{a_i}{a_k - a_i} + \frac{a_k}{a_i - a_k}$ , d. h. aber gleich  $-1$  ist. Es ergibt sich also für  $y_1$  eine Summe von  $\frac{1}{2}p(p+1)$  Addenden, deren jeder gleich  $-1$  ist. Daher ist:

$$(23) \quad y_1 = -\frac{1}{2}p(p+1).$$

Um  $y_2$  zu bestimmen, fassen wir von den  $\frac{1}{6}(p+1)p(p-1)$  Addenden, aus denen sich  $y_2$  zusammensetzt, immer je drei, welche dieselben drei Indices enthalten, zusammen, so dass

$$y_2 = \Sigma(z_{ikl})$$

wird, wo das Summenzeichen  $\frac{1}{6}(p+1)p(p-1)$  Addenden umfasst, und

$$z_{ikl} = \frac{a_i}{(a_k - a_i)(a_l - a_i)} + \frac{a_k}{(a_i - a_k)(a_l - a_k)} + \frac{a_l}{(a_i - a_l)(a_k - a_l)}$$

gesetzt ist. Addiert man die drei Brüche, aus denen sich  $z_{ikl}$  zusammensetzt, so erhält man:

$$z_{ikl} = -\frac{a_i(a_k - a_l) - a_k(a_i - a_l) + a_l(a_j - a_k)}{(a_i - a_k)(a_k - a_l)(a_l - a_i)}.$$

Zähler und Nenner dieses Bruches lassen sich leicht in Determinantenform schreiben und ergeben:

$$z_{ikl} = - \left| \begin{array}{ccc} a_i & a_k & a_l \\ a_i & a_k & a_l \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| : \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ a_i & a_k & a_l \\ a_i^2 & a_k^2 & a_l^2 \end{array} \right|,$$

woraus hervorgeht, dass  $z_{ikl}$  gleich Null ist, weil in der den Dividendus bildenden Determinante zwei Horizontalreihen gleich sind. Demnach ist  $y_2$  als eine Summe von  $\frac{1}{6}(p+1)p(p-1)$  Addenden, deren jeder gleich Null ist, *selbst gleich Null*. Gerade so lässt sich erkennen, dass

$$y_3 = \sum(z_{iklm})$$

ist, wo das Summenzeichen  $\frac{1}{24}(p+1)p(p-1)(p-2)$  Addenden umfasst, und

$$\begin{aligned} z_{iklm} &= \frac{a_i}{(a_k - a_i)(a_l - a_i)(a_m - a_i)} + \frac{a_k}{(a_i - a_k)(a_l - a_k)(a_m - a_k)} \\ &\quad + \frac{a_l}{(a_i - a_l)(a_k - a_l)(a_m - a_l)} + \frac{a_m}{(a_i - a_m)(a_k - a_m)(a_l - a_m)} \end{aligned}$$

ist. Hieraus ergiebt sich aber:

$$z_{iklm} = -\frac{\begin{vmatrix} a_i & a_k & a_l & a_m \\ a_i^2 & a_k^2 & a_l^2 & a_m^2 \\ a_i & a_k & a_l & a_m \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_i & a_k & a_l & a_m \\ a_i^2 & a_k^2 & a_l^2 & a_m^2 \\ a_i^3 & a_k^3 & a_l^3 & a_m^3 \end{vmatrix}},$$

also ein Quotient, der gleich Null ist, weil sein Dividendus eine Determinante mit zwei gleichen Horizontalreihen ist. Daraus folgt, dass auch  $y_3 = 0$  ist.

So erkennt man auch allgemein, dass  $y_q$ , wenn nur  $q > 1$  ist, gleich Null ist, weil  $y_q$  als Summe von  $(p+1)_{q+1}$  Addenden aufgefasst werden kann, deren jeder ein verschwindender Determinantenquotient ist. Wir erhalten daher mit Benutzung von (22) und (23), dass der Ausdruck in (21) mit

$$(24) \quad a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_p - \frac{1}{2}p(p+1)$$

identisch ist. Wenn wir daher (24) und (21) mit dem oben bei (19) *D* genannten Produkte multiplizieren, so erhalten wir die Identität:

$$\begin{aligned}
 & (25) \quad \left[ a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_p - \frac{1}{2}p(p+1) \right] \cdot D \\
 = & a_0(a_1 - a_0 + 1)(a_2 - a_0 + 1)(a_3 - a_0 + 1) \dots (a_p - a_0 + 1) \cdot D_0 \\
 & + a_1(a_1 - a_0 - 1)(a_2 - a_1 + 1)(a_3 - a_1 + 1) \dots (a_p - a_1 + 1) \cdot D_1 \\
 & + a_2(a_2 - a_0 - 1)(a_2 - a_1 - 1)(a_3 - a_2 + 1) \dots (a_p - a_2 + 1) \cdot D_2 \\
 & + a_3(a_3 - a_2 - 1)(a_3 - a_1 - 1)(a_3 - a_2 - 1) \dots (a_p - a_3 + 1) \cdot D_3 \\
 & + \dots \\
 & + a_p(a_p - a_0 - 1)(a_p - a_1 - 1)(a_p - a_2 - 1) \dots (a_p - a_{p-1} - 1) \cdot D_p,
 \end{aligned}$$

wo jedes  $D_k$  das Produkt aller möglichen  $\frac{1}{2}(p-1)p$  positiven Differenzen je zweier der Zahlen  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_p$  ist. Multiplizieren wir die Identität (25) nun noch mit

$$\frac{|a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_p - \frac{1}{2}l(p+1) - 1|}{|a_0| |a_1| |a_2| \dots |a_p|},$$

so erhalten wir links die Funktion (19) und rechts eine Summe von  $p+1$  Addenden, von denen der erste aus (19) hervorgeht, wenn man in (19) überall  $a_0$  durch  $a_0 - 1$  ersetzt, und von denen überhaupt der  $(k+1)^{\text{te}}$  aus (19) hervorgeht, wenn man dort überall  $a_k$  durch  $a_k - 1$  ersetzt. Damit ist bewiesen, dass die in (19) aufgestellte Funktion in der That die in (18) angegebene Funktionalgleichung erfüllt, und also die gesuchte Anzahl  $f(a_0, a_1, a_2, \dots, a_p)$  darstellt. Wir können daher den Satz aussprechen:

Es sei gegeben in einem  $[n]$  ein  $[a_p]$ , in ihm liegend ein  $[a_{p-1}]$ , in diesem liegend ein  $[a_{p-2}]$  u. s. w. bis zu einem  $[a_0]$ , der in einem  $[a_1]$  liegt; ferner seien gegeben  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots - \frac{1}{2}p(p+1)$  lineare Räume, sämtlich von der Dimension  $n-p-1$ . Dann giebt es eine endliche Anzahl von  $p$ -dimensionalen linearen Räumen, von denen jeder mit dem  $[a_0]$

einen Punkt, mit dem  $[a_1]$  einen Strahl, überhaupt mit dem  $[a_k]$  einen  $[k]$  gemeinsam hat, und ausserdem jeden der gegebenen  $[n-p-1]$  einpunktig trifft. Diese endliche Anzahl ist gleich

$$(26) \quad \frac{|a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_p - \frac{1}{2}p(p+1).D|}{|a_0| |a_1| |a_2| \dots |a_p|},$$

wo  $D$  das Produkt aller möglichen positiven Differenzen je zweier der Zahlen  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p$  bedeutet. (Jede eckige Klammer bedeutet einen linearen Raum, dessen Dimension gleich der in der eckigen Klammer befindlichen Zahl ist.)

Von diesem allgemeinen Resultate aus kann man zu der von mir in den Mitteilungen der Hamburger Mathematischen Gesellschaft vom Jahre 1884 mitgeteilten Anzahl durch Specialisierung auf zwei Wegen gelangen, erstens, indem man

$$a_0 = n-p, \quad a_1 = n-p+1, \quad a_2 = n-p+2, \dots, a_p = n$$

setzt, zweitens auch, indem man

$$a_0 = n-p-1, \quad a_1 = n-p+1, \quad a_2 = n-p+2, \dots, a_p = n$$

setzt. In beiden Fällen ergiebt sich übereinstimmend:

$$(27) \quad \frac{|(p+1)(n-p)|}{|n| |n-1| |n-2| \dots |n-p|} |1| |2| |3| \dots |p|.$$

Setzt man hier  $p=1$ , so erhält man die Anzahl, zu der auch die Herren FRANZ MEYER und STEPHANOS (vgl. die Anmerkung am Schluss der Einleitung) gelangt sind. Setzt man ferner in (26):

$$a_0 = 0, \quad a_1 = n-p+1, \quad a_2 = n-p+2, \dots, a_p = n,$$

so erhält man:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_p = np + \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}p^2$$

und

$$D = [(n-p+1)(n-p+2) \dots n] \cdot |p-1| |p-2| \dots |1|.$$

also

$$(28) \quad \frac{|p(n-p)|_1|2|_3\ldots|p-1|}{|n-1||n-2|\ldots|n-p|}$$

für die Anzahl aller derjenigen  $p$ -dimensionalen linearen Räume, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und  $p(n-p)$  gegenseitig  $(n-p-1)$ -dimensionale lineare Räume einpunktig treffen. Für  $p=1$  wird diese Anzahl stets gleich 1, wie gross auch  $n$  sein mag, was auch unmittelbar erkennt werden kann.

Setzt man endlich voraus, dass  $p=n-1$  ist, so ergiebt sich aus (26) stets die Zahl 1, welche zulässigen Werte man auch für  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  setzen mag. Auch dieses Resultat kann man voraussehen, wenn man beachtet, dass im  $[n]$  ein  $[n-1]$  einem Punkte dual entspricht, und dass alle fundamentale Anzahlen des Punktes 1 sein müssen.

Hamburg, im August 1885.

EINIGE EIGENSCHAFTEN  
 DER  
 LINEAREN UND HOMOGENEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN  
 VON  
 E. A. STENBERG  
 IN HELSINGFORS.

Der Zweck der vorliegenden Untersuchung ist einen Satz von LAGRANGE zu verallgemeinern.

Dieser Satz sagt erstens, dass jeder integrirende Factor der linken Seite einer linearen und homogenen Differentialgleichung ein particuläres Integral einer anderen linearen und homogenen Differentialgleichung von derselben Ordnung ist, deren Coefficienten rationale algebraische Functionen von denen der ersten und ihren Abgeleiteten sind, und zweitens, dass jeder integrirende Factor der linken Seite dieser neuen Differentialgleichung ein particuläres Integral der ursprünglichen ist. Eine vollständige Entwicklung dieses Satzes befindet sich in einer Abhandlung von FLOQUET: *Sur la théorie des équations différentielles linéaires. Annales scient. de l'école normale supérieure*, Sér. 2, Tome 8, 1879; Suppl.

Es scheint mir dass eine Verallgemeinerung des betreffenden Satzes kaum möglich ist, solange der oben angeführte Wortlaut desselben beibehalten wird, weshalb ich im Folgenden von einem anderen Standpunkte ausgegangen bin, und zwar von demselben, den ich in einem früheren Aufsatze (*En egenskap hos lineära och homogena differentialegrationer. Öfver-sigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens förhandl. 1884, n:o 5*) eingenommen habe.

## I.

1. Es sei

$$L_\nu = y^{(\nu)} + P_{\nu,1}y^{(\nu-1)} + \dots + P_{\nu,n}y, \quad (\nu=\mu, \mu+1, \dots, n)$$

eine Reihe von linearen und homogenen Differentialausdrücken, welche so beschaffen sind; dass es möglich ist ein System von Grössen

$$z_{\mu+1}, z_{\mu+2}, \dots, z_n$$

zu finden, welche

$$(1) \quad z_\nu L_\nu = \frac{d}{dx}(z_\nu L_{\nu-1})$$

machen; dann giebt es immer, wie auch  $\nu$  unter den ganzen Zahlen, die  $> \mu$  sind, gewählt sei, ein System von  $\nu - \mu$  Grössen

$$U_{\nu-\mu,1}, U_{\nu-\mu,2}, \dots, U_{\nu-\mu,\nu-\mu},$$

welche von  $y$  unabhängig sind und der Bedingung genügen, dass in Bezug auf  $y$  die Identität

$$(2) \quad L_\nu \equiv L_\mu^{(\nu-\mu)} + U_{\nu-\mu,1}L_\mu^{(\nu-\mu-1)} + U_{\nu-\mu,2}L_\mu^{(\nu-\mu-2)} + \dots + U_{\nu-\mu,\nu-\mu}L_\mu$$

stattfindet. Hierbei wird  $z_\nu$  ein particuliäres Integral der zu der Gleichung

$$(3) \quad y^{(\nu-\mu)} + U_{\nu-\mu,1}y^{(\nu-\mu-1)} + U_{\nu-\mu,2}y^{(\nu-\mu-2)} + \dots + U_{\nu-\mu,\nu-\mu}y = 0$$

adjungirten Differentialgleichung.

Wenn  $\nu = \mu + 1$  ist, gilt dieser Satz; ich brauche nur

$$U_{11} = \frac{z'_{\mu+1}}{z_{\mu+1}}$$

zu setzen:

Es sei nun angenommen, dass die Gültigkeit des Satzes für  $\nu = n - 1$  festgestellt, d. h. dass

$$L_{n-1} \equiv L_\mu^{(n-1-\mu)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1-\mu} U_{n-1-\mu,\rho} L_\mu^{(n-1-\mu-\rho)}$$

ist. Dann ergibt sich aus der Bedingung

$$L_n = L'_{n-1} + \frac{z'_n}{z_n} L_{n-1}$$

dass auch

$$L_n = L_{\mu}^{(n-\mu)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-\mu} U_{n-\mu, \rho} L_{\mu}^{(n-\mu-\rho)}$$

ist, wenn

$$(4) \quad \begin{cases} U_{n-\mu, 1} = U_{n-1-\mu, 1} + \frac{z'_n}{z_n} \\ U_{n-\mu, \rho} = U_{n-1-\mu, \rho} + U'_{n-1-\mu, \rho-1} + \frac{z'_n}{z_n} U_{n-1-\mu, \rho-1} \\ U_{n-\mu, n-\mu} = U'_{n-1-\mu, n-1-\mu} + \frac{z'_n}{z_n} U_{n-1-\mu, n-1-\mu} \end{cases} \quad (\rho=2, 3, \dots, n-\mu-1)$$

gesetzt werden. Dieses System (4) sagt mir aber, dass  $z_n$  der Gleichung

$$z_n^{(n-\mu)} - \frac{d^{n-\mu-1}}{dx^{n-\mu-1}} (U_{n-\mu, 1} z_n) + \frac{d^{n-\mu-2}}{dx^{n-\mu-2}} (U_{n-\mu, 2} z_n) + \dots + (-1)^{n-\mu} U_{n-\mu, n-\mu} z_n = 0$$

genügt, d. h. dass  $z_n$  ein Integral der zu (3) adjungirten Differentialgleichung ist. Da nun der Satz für  $\nu = \mu + 1$  gilt, so hat er auch im Allgemeinen Gültigkeit.

Aus der ersten Gleichung des Systems (4) finde ich, wenn ich sie als Recursionsformel ansehe, folgende Eigenschaft

$$(4_a) \quad U_{n-\mu, 1} = \frac{z'_n}{z_n} + \frac{z'_{n-1}}{z_{n-1}} + \dots + \frac{z'_{\mu+1}}{z_{\mu+1}} = \frac{d}{dx} \log (z_{\mu+1} z_{\mu+2} \dots z_{n-1} z_n),$$

da ja

$$U_{11} = \frac{z'_{\mu+1}}{z_{\mu+1}}$$

ist.

2. Die Identität (2) giebt mir zur Bestimmung der Grössen  $U_{\nu-\mu, 1}, \dots, U_{\nu-\mu, \nu-\mu}$  das System von  $\nu - \mu$  Gleichungen:

$$(5) \quad P_{\nu, \rho} = S_{\nu-\mu, \rho} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\rho-1} S_{\nu-\mu-\lambda, \rho-\lambda} U_{\nu-\mu, \lambda} + U_{\nu-\mu, \rho} \quad (\rho=1, 2, 3, \dots, \nu-\mu)$$

wo

$$S_{\sigma, \beta} = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\beta-1} \frac{|\alpha|}{|\alpha-\sigma|} P_{\mu, \beta-\sigma}^{(\sigma)},$$

wenn  $\beta \leq \mu$  ist, und

$$S_{\sigma, \beta} = \sum_{\sigma=\beta-n}^{\sigma=\beta-1} \frac{|\alpha|}{|\alpha-\sigma|} P_{\mu, \beta-\sigma}^{(\sigma)},$$

wenn  $\beta > \mu$  ist, gesetzt wird.

Hieraus ergeben sich die Grössen  $U_{\nu-\mu, 1}, U_{\nu-\mu, 2}, \dots, U_{\nu-\mu, \nu-\mu}$  als lineare algebraische Functionen der Coefficienten  $P_{\nu 1}, P_{\nu 2}, \dots, P_{\nu, \nu-\mu}$  und zwar auf folgende Weise

$$(6) \quad U_{\nu-\mu, \rho} = P_{\nu, \rho} + \overset{\nu}{N}_{\rho, 1} P_{\nu, \rho-1} + \overset{\nu}{N}_{\rho, 2} P_{\nu, \rho-2} + \dots + \overset{\nu}{N}_{\rho, \rho-1} P_{\nu, 1} + \overset{\nu}{N}_{\rho, \rho}$$

( $\rho=1, 2, \dots, \nu-\mu$ )

wo die Coefficienten  $\overset{\nu}{N}_{\rho, \sigma}$  ganze algebraische Functionen von  $P_{\mu 1}, P_{\mu 2}, \dots, P_{\mu n}$  und ihren Abgeleiteten sind und sich nach der Recursionsformel

$$\overset{\nu}{N}_{\rho, \sigma} = - \sum_{\tau=1}^{\tau=\sigma-1} \overset{\nu}{N}_{\rho-\tau, \sigma-\tau} S_{\nu-\mu-\rho+\tau, \tau} - S_{\nu-\mu-\rho+\sigma, \sigma} \quad (\sigma=1, 2, 3, \dots, \rho)$$

berechnen lassen. Aus dem System (5) finde ich, dass

$$\overset{\nu+1}{N}_{\rho+1, \sigma} = \overset{\nu}{N}_{\rho, \sigma}$$

und im Allgemeinen

$$\overset{\nu+x}{N}_{\rho+x, \sigma} = \overset{\nu}{N}_{\rho, \sigma}$$

ist, wenn  $\sigma \leq \rho$  ist, und  $x$  eine positive ganze Zahl bedeutet.

Ausser dem System (5) giebt mir die Identität (2) noch  $\mu$  Gleichungen, welche gewisse Relationen enthalten, die zwischen den Coefficienten der Differentialgleichungen  $L_\mu = 0$  und  $L_\nu = 0$  bestehen.

Diese Bedingungsgleichungen sind:

$$(7) \quad P_{\nu, \rho} = T_{\nu-\mu, \rho} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu-\mu} T_{\nu-\mu-\lambda, \rho-\lambda} U_{\nu-\mu, \lambda} \quad (\rho=\nu-\mu+1, \nu-\mu+2, \dots, \nu)$$

wo

$$T_{\sigma, \beta} = \sum_{\alpha=0}^{\sigma-\beta} \frac{\binom{\alpha}{\beta}}{\binom{\alpha-\beta}{\sigma}} P_{\mu, \beta-\alpha}^{(\alpha)}$$

wenn  $\beta \leq \mu$  ist, und

$$T_{\sigma, \beta} = \sum_{\alpha=\beta}^{\sigma-\beta} \frac{\binom{\alpha}{\beta}}{\binom{\alpha-\beta}{\sigma}} P_{\mu, \beta-\alpha}^{(\alpha)}$$

wenn  $\beta > \mu$  ist, gesetzt wird.

Wenn ich in die Gleichungen (7) die in (6) gegebenen Ausdrücke einführe, finde ich die  $\mu$  letzten Coefficienten der Differentialgleichung  $L_y = 0$  als lineare, algebraische Functionen von den ersten Coefficienten  $P_{\nu_1}, P_{\nu_2}, \dots, P_{\nu, \nu-\mu}$ :

$$(8) \quad P_{\nu, \nu-\mu+\rho} = A_{\rho, 0} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu-\mu} A_{\rho, \lambda} P_{\nu, \lambda} \quad (\rho=1, 2, \dots, \mu)$$

wo die  $A_{\rho, \lambda}$  ganze algebraische Functionen von den Coefficienten der Differentialgleichung  $L_\mu = 0$  und ihren Abgeleiteten und nach der Formel

$$A_{\rho, \lambda} = T_{\nu-\mu-\lambda, \nu-\mu+\rho-\lambda} + \sum_{\tau=\lambda+1}^{\tau=\nu-\mu} N_{\tau, \tau-\lambda} T_{\nu-\mu-\tau, \nu-\mu+\rho-\tau}$$

gebildet sind.

Diese Formel sagt mir, dass

$$(9) \quad A_{\rho, \lambda+x} = A_{\rho, \lambda}$$

ist, wenn  $x$  eine positive ganze Zahl bedeutet.

3. Wenn zwei lineare und homogene Differentialausdrücke  $L_n$  von der Ordnung  $\mu$  und  $L_n$  von der Ordnung  $n$  so beschaffen sind, dass es  $n-\mu$  von  $y$  unabhängige Grössen

$$U_{n-\mu, 1}, U_{n-\mu, 2}, \dots, U_{n-\mu, n-\mu}$$

giebt, welche für jeden Werth von  $y$

$$L_n = L_n^{(n-\mu)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-\mu} U_{n-\mu, \rho} L_n^{(n-\mu-\rho)}$$

machen,<sup>1</sup> so ist jedes System

$$z_{\mu+1}, z_{\mu+2}, \dots, z_n,$$

welches den Gleichungen

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_{n-\mu, 1} = U_{n-\mu-1, 1} + \frac{z'_n}{z_n}, \quad U_{n-\mu-1, 1} = U_{n-\mu-2, 1} + \frac{z'_{n-1}}{z_{n-1}}, \dots, \quad U_{11} = \frac{z'_{\mu+1}}{z_{\mu+1}} \\ U_{n-\mu-\sigma, \rho_\sigma} = U_{n-\mu-\sigma-1, \rho_\sigma} + U'_{n-\mu-\sigma-1, \rho_\sigma-1} + U_{n-\mu-\sigma-1, \rho_\sigma-1} \frac{z'_{n-\sigma}}{z_{n-\sigma}} \\ \quad (\sigma=0, 1, 2, \dots, n-\mu-3) \quad (\rho_\sigma=2, 3, \dots, n-\mu-\sigma-1) \\ U_{n-\mu-\sigma, n-\mu-\sigma} = U'_{n-\mu-\sigma-1, n-\mu-\sigma-1} + U_{n-\mu-\sigma-1, n-\mu-\sigma-1} \frac{z'_{n-\sigma}}{z_{n-\sigma}} \\ \quad (\sigma=0, 1, 2, \dots, n-\mu-2) \end{array} \right.$$

genügt, von der Beschaffenheit, dass, wenn eine Reihe von Differentialausdrücken

$$\mathfrak{L}_{\mu+1}, \mathfrak{L}_{\mu+2}, \dots, \mathfrak{L}_n$$

nach dem Gesetze

$$z_{\mu+1} \mathfrak{L}_{\mu+1} = \frac{d}{dx} (z_{\mu+1} L_\mu)$$

$$z_\nu \mathfrak{L}_\nu = \frac{d}{dx} (z_\nu \mathfrak{L}_{\nu-1}) \quad (\nu=\mu+2, \mu+3, \dots, n)$$

gebildet wird, wobei die zur Anwendung kommenden

$$z_{\mu+1}, z_{\mu+2}, \dots, z_n$$

zu demselben System gehören,

$$\mathfrak{L}_n \equiv L_n$$

ist.

Denn nach dem § 1 ist

$$\mathfrak{L}_n \equiv L_\mu^{(n-\mu)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-\mu} U_{n-\mu, \rho} L_\mu^{(n-\mu-\rho)}$$

und hier ist das rechte Glied der Annahme nach  $\equiv L_n$ .

<sup>1</sup> Oder mit anderen Worten: wenn die Bedingungen (7) oder (8) erfüllt sind.

Sämtliche Größen  $z_n$ , wenn überhaupt solche existieren, welche den Gleichungen (10) genügen, integrieren sowohl die Adjungirte der Differentialgleichung

$$L_n = 0$$

wie auch die Adjungirte der Gleichung

$$(11) \quad y^{(n-\mu)} + \sum_{\rho=1}^{\sigma-n+\mu} U_{n-\mu, \rho} y^{(n-\mu-\rho)} = 0,$$

aber andererseits muss auch jedes Integral der letzteren Adjungirten unter denjenigen Größen  $z_n$  vorkommen, welche den Gleichungen (10) genügen, da ja die Veränderliche  $z_n$  nur in der Gruppe des Systems (10) eingeht, in der  $\sigma = 0$  ist, und diese Gruppe durch die genannte Adjungirte der Gleichung (11) vollständig ersetzt wird.

4. Hierdurch erhalte ich das Theorem:

*Wenn zwei lineare und homogene Differentialausdrücke*

$$L_\mu = y^{(\mu)} + P_{\mu,1} y^{(\mu-1)} + \dots + P_{\mu,n} y$$

und

$$L_n = y^{(n)} + P_{n,1} y^{(n-1)} + \dots + P_{n,n} y$$

so von einander abhängen, dass man mittelst einem System von Größen

$$z_{\mu+1}, z_{\mu+2}, \dots, z_n$$

durch eine Reihe von Differentialausdrücken

$$L_{\mu+1}, L_{\mu+2}, \dots, L_{n-1},$$

welche nach dem Gesetze

$$z_\nu L_\nu = \frac{d}{dx} (z_\nu L_{\nu-1}) \quad (\nu = \mu+1, \mu+2, \dots, n-1)$$

gebildet sind, zu der Gleichung

$$z_n L_n = \frac{d}{dx} (z_n L_{n-1})$$

kommen kann, und wenn diejenige Differentialgleichung

$$M_n = 0,$$

deren linke Seite auf folgende Weise mit Hülfe der nach der Formel (6) gebildeten Grössen  $U_{n-\mu, 1}, U_{n-\mu, 2}, \dots, U_{n-\mu, n-\mu}$ :

$$\begin{aligned} M_{n-\mu} = y^{(n-\mu)} - & \frac{d^{n-\mu-1}}{dx^{n-\mu-1}}(U_{n-\mu, 1}y) + \frac{d^{n-\mu-2}}{dx^{n-\mu-2}}(U_{n-\mu, 2}y) + \dots \\ & \dots + (-1)^{n-\mu} U_{n-\mu, n-\mu}y \end{aligned}$$

aufgestellt ist, ein Fundamentalsystem von  $n-\mu$  Integralen besitzt, so giebt es ein System von  $\mu$  Grössen

$$V_{\mu, 1}, V_{\mu, 2}, \dots, V_{\mu, \mu}$$

welche in Bezug auf  $y$

$$M_n \equiv M_{n-\mu}^{(\mu)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=\mu} V_{\mu, \rho} M_{n-\mu}^{(\mu-\rho)}$$

machen.

Wende ich hier die erste Gleichung

$$(5a) \quad P_{\nu, 1} = P_{\mu, 1} + U_{\nu-\mu, 1}$$

des Systems (5) an, indem ich statt  $P_{\nu, 1}$  und  $P_{\mu, 1}$  die entsprechenden Coefficienten der Ausdrücke  $M_n$  und  $M_{n-\mu}$  und statt  $U_{\nu-\mu, 1}, V_{\mu, 1}$  einführe, erhalte ich, da  $M_n$  der zu  $L_n$  adjungirte Ausdruck ist, die Gleichung

$$(12) \quad -P_{\nu, 1} = -U_{n-\mu, 1} + V_{\mu, 1}.$$

5. Bisher habe ich den Differentialausdrücken  $L_\mu, L_{\mu+1}, \dots, L_n$  keine Bedingung hinsichtlich ihres Verschwindens gestellt; diese allgemeine Auffassung der Frage werde ich jetzt einigermaassen einschränken, indem ich den Differentialausdruck  $L_n$  als die linke Seite einer linearen und homogenen Differentialgleichung von der Ordnung  $n$

$$L_n = 0$$

betrachte, welche ein Fundamentalsystem von Integralen

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$$

besitzt.

Diese Voraussetzung genügt, um auch bei jeder der Gleichungen

$$L_\mu = 0, \quad L_{\mu+1} = 0, \quad \dots, \quad L_{n-1} = 0 \quad \text{und} \quad M_n = 0$$

die Existenz eines Fundamentalsystems von Integralen festzustellen, wie aus meinem in der Einleitung genannten Aufsatze ersichtlich ist.

Ausserdem sagt mir diese Voraussetzung, dass auch  $M_{n-n} = 0$  ein Fundamentalsystem von Integralen hat. Denn ist das System

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

so gewählt, dass

$$y_1, y_2, \dots, y_\mu$$

ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung

$$L_n = 0$$

bilden, so kann jede lineare und homogene Differentialgleichung, welche eines der  $n - \mu$  Systeme

$$y_1, y_2, \dots, y_\mu, y_{\mu+1}, \dots, y_{\rho-1}, y_{\rho+1}, \dots, y_n \quad (\rho = \mu+1, \mu+2, \dots, n)$$

als Fundamentalsystem von Integralen hat, die Gleichung

$$L_{n-1} = 0$$

repräsentiren, wodurch nach der ersten Gleichung (5<sup>a</sup>) des Systems (5) die Grösse  $U_{n-1-n,1}$  die  $n - \mu$  Werthe

$$\frac{d}{dx} \log \left| \frac{y_1 y_2 \dots y_\nu}{y_1 y_2 \dots y_\mu y_{\mu+1} \dots y_{\rho-1} y_{\rho+1} \dots y_n} \right| \quad (\rho = \mu+1, \mu+2, \dots, n)$$

annehmen kann, wo ich der Kürze wegen mit

$$\left| y_1 y_2 \dots y_\nu \right|$$

die Functionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_\nu \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_\nu \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(\nu-1)} & y_2^{(\nu-1)} & \dots & y_\nu^{(\nu-1)} \end{vmatrix}$$

bezeichnet habe; folglich wird nach der ersten Gleichung des Systems (4) die Differentialgleichung

$$M_{n-n} = 0$$

von den  $n - \mu$  Functionen

$$z_{n,\rho} = \frac{|y_1 y_2 \dots y_\mu y_{\mu+1} \dots y_{\rho-1} y_{\rho+1} \dots y_n|}{|y_1 y_2 \dots y_n|} \quad (\lambda = \mu+1, \mu+2, \dots, n)$$

integriert, welche von einander linear unabhängig sind.

Jede lineare und homogene Differentialgleichung, welche ein Fundamentalsystem von Integralen besitzt und die in einem nach dem obigen Gesetze gebildeten System von Gleichungen

$$L_\mu = 0, \quad L_{\mu+1} = 0, \quad \dots, \quad L_n = 0$$

vorkommt, werde ich eine »Reducirte derjenigen Differentialgleichung« nennen, welche in dem betreffenden System als die letzte auftritt, d. h. von der höchsten Ordnung ist, und zwar werde ich der Gleichung

$$L_\nu = 0, \quad \mu \leq \nu < n$$

die Benennung: eine » $(n - \nu)$ :reducirte der linearen und homogenen Differentialgleichung

$$L_n = 0$$

beilegen.

6. Nach den Auseinandersetzungen des § 5 kann ich, wenn  $L_n = 0$  eine lineare und homogene Differentialgleichung von der Ordnung  $n$  ist, welche ein Fundamentalsystem von Integralen hat, den im § 4 angeführten Satz folgendermaßen aussprechen:

*Wenn  $L_\mu = 0$  eine  $(n - \mu)$ :reducirte der Differentialgleichung  $L_n = 0$  ist, so ist diejenige Differentialgleichung*

$$M_{n-\mu} = 0,$$

*deren linke Seite auf folgende Weise mit Hilfe der nach der Formel (6) gebildeten Grössen*

$$U_{n-\mu, 1}, U_{n-\mu, 2}, \dots, U_{n-\mu, n-\mu}$$

$$M_{n-\mu} = y^{(n-\mu)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-\mu} (-1)^\rho \frac{d^{n-\mu-\rho}}{dx^{n-\mu-\rho}} (U_{n-\mu, \rho} y)$$

*aufgestellt ist, eine  $\mu$ :reducirte der zu  $L_n = 0$  adjungirten Differentialgleichung*

$$M_n = 0.$$

Nach der Gleichung (5<sub>a</sub>) ist unter Beibehaltung der im § 5 gegebenen Bezeichnungen

$$U_{n-\mu, 1} = \frac{d}{dx} \log \left| \frac{y_1 y_2 \dots y_\mu}{y_1 y_2 \dots y_n} \right|$$

$$V_{\mu, 1} = \frac{d}{dx} \log \left| \frac{z_{n, \mu+1} z_{n, \mu+2} \dots z_{n, n}}{z_{n, 1} z_{n, 2} \dots z_{n, n}} \right| = \frac{d}{dx} \log \left[ \left| z_{n, \mu+1} z_{n, \mu+2} \dots z_{n, n} \right| \left| y_1 y_2 \dots y_n \right| \right]$$

wodurch die Gleichung

$$(12) \quad P_{n, 1} = U_{n-\mu, 1} - V_{\mu, 1}$$

in die folgende übergeht:

$$(12_a) \quad \frac{d}{dx} \log \left| \frac{y_1 y_2 \dots y_\mu}{z_{n, \mu+1} z_{n, \mu+2} \dots z_{n, n}} \right| = \frac{d}{dx} \log \left| y_1 y_2 \dots y_n \right|$$

d. h.

$$(12_b) \quad \frac{\left| y_1 y_2 \dots y_\mu \right|}{\left| z_{n, \mu+1} z_{n, \mu+2} \dots z_{n, n} \right|} = C \left| y_1 y_2 \dots y_n \right|$$

wo  $C$  eine gewisse Constante, und

$$z_{n, \rho} = \frac{\left| y_1 y_2 \dots y_{\rho-1} y_{\rho+1} \dots y_n \right|}{\left| y_1 y_2 \dots y_n \right|}$$

ist.

7. Dem letzten Satze zufolge sind die im § 5 angeführten Grössen

$$V_{\mu, 1}, V_{\mu, 2}, \dots, V_{\mu, \mu},$$

welche der Bedingung

$$M_n \equiv M_{n-\mu}^{(\mu)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=\mu} V_{\mu, \rho} M_{n-\mu}^{(\mu-\rho)}$$

Genüge leisten, so beschaffen, dass die Gleichung

$$\mathcal{L}_\mu = y^{(\mu)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=\mu} (-1)^\rho \frac{d^{\mu-\rho}}{dx^{\mu-\rho}} (V_{\mu, \rho} y) = 0$$

eine  $(n-\mu)$ :reducirte der Differentialgleichung

$$L_n = 0$$

ist.

Der zweite Coefficient der Gleichung  $\mathcal{L}_n = 0$  ist die Grösse

$$-V_{\mu,1}$$

und folglich, nach den Formeln (12) und (5<sup>a</sup>) gleich dem zweiten Coefficienten

$$P_{\mu,1}$$

der Gleichung  $L_n = 0$ .

Nehme ich jetzt an dass die Differentialgleichung  $L_n = 0$  so gewählt ist, dass sämmtliche Functionaldeterminanten

$$|y_1y_2 \dots y_\mu|, |y_1y_2 \dots y_{\mu-1}y_{\mu+1}|, \dots, |y_{n-\mu+1}y_{n-\mu+2} \dots y_n|,$$

welche von  $\mu$  Elementen eines ihrer Fundamentalsysteme von Integralen gebildet werden können, von einander linear unabhängig sind, so folgt aus dem soeben Gesagten, dass in diesem Falle  $L_n = 0$  und  $\mathcal{L}_n = 0$  dasselbe Fundamentalsystem von Integralen haben müssen, d. h. dass

$$L_n \equiv \mathcal{L}_n$$

ist.

Wenn ich jetzt in dem System (6)  $V$  statt  $U$ ,  $n$  statt  $\nu$  und  $n-\mu$  statt  $\mu$  schreibe und an Stelle der Grössen  $P_{n,1}, P_{n,2}, \dots, P_{n,n}$  die entsprechenden Coefficienten der Gleichung  $M_n = 0$  als Functionen der erstgenannten Grössen setze, sowie auch in die Grössen  $N_{\rho,\sigma}$  statt der Coefficienten  $P_{n-\mu,1}, P_{n-\mu,2}, \dots, P_{n-\mu,n-\mu}$  die entsprechenden der Gleichung  $M_{n-\mu} = 0$  als Functionen der Grössen  $P_{n,1}, P_{n,2}, \dots, P_{n,n-\mu}; P_{\mu,1}, P_{\mu,2}, \dots, P_{\mu,\mu}$  einführe, so müssen in dem vorhandenen Falle die Ausdrücke, welche die rechten Seiten der Gleichungen des Systems (6) bilden, in die Coefficienten der zu

$$L_n = 0$$

adjungirten Differentialgleichung übergehen. Da jedoch diese Ausdrücke von der gemachten Bedingungsannahme garnicht abhängig sind, so müssen im Allgemeinen, wie auch die Gleichung  $L_n = 0$  gewählt sei, die genannten Substitutionen das obige Resultat hervorbringen.

Hieraus folgt aber dass im Allgemeinen

$$L_n \equiv \mathcal{L}_n$$

ist.

Wenn also die lineare und homogene Differentialgleichung  $n^{\text{ter}}$  Ordnung

$$L_n = 0$$

ein Fundamentalsystem von Integralen besitzt, und

$$y^{(n)} + V_{\mu,1}y^{(\mu-1)} + V_{\mu,2}y^{(\mu-2)} + \dots + V_{\mu,n}y = 0$$

die Adjungirte einer ihrer  $(n-\mu)$ :reducirten  $L_n = 0$  darstellt, so findet in Beziehung auf  $y$  die Identität

$$M_n \equiv M_{n-\mu}^{(n)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-\mu} V_{\mu,\rho} M_{n-\mu}^{(n-\rho)}$$

statt, wobei  $M_n$  die Adjungirte der Gleichung  $L_n = 0$  und  $M_{n-\mu}$  eine gewisse unter ihren  $\mu$ :reducirten repräsentieren, und umgekehrt ist, wenn ich mit

$$y^{(n-\mu)} + U_{n-\mu,1}y^{(n-\mu-1)} + \dots + U_{n-\mu,n-\mu}y = 0$$

die Adjungirte der Gleichung  $M_{n-\mu} = 0$  bezeichne,

$$L_n \equiv L_{\mu}^{(n-\mu)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-\mu} U_{n-\mu,\rho} L_{\mu}^{(n-\mu-\rho)}.$$

Wenn ich andererseits wieder meinen früheren Standpunkt, denjenigen der §§ 1—4, einnehme, berechtigt mich das angedeutete Verhalten des Systems (6) zur folgenden Aussprache:

Es seien die linearen und homogenen Differentialausdrücke  $L_n$  und  $L_{\mu}$  so von einander abhängig wie im § 4 angegeben ist und  $M_n$  der Adjungirte zu  $L_n$  — dann ist der Adjungirte

$$y^{(n)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n} V_{\mu,\rho} y^{(\mu-\rho)}$$

des Ausdrückes  $L_n$  so beschaffen dass in Beziehung auf  $y$  die Identität

$$M_n \equiv M_{n-\mu}^{(\mu)} + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-\mu} V_{\mu,\rho} M_{n-\mu}^{(\mu-\rho)}$$

stattfindet, wo  $M_{n-\mu}$  der nach Angabe des § 4 gebildete Ausdruck ist.

## II.

8. Bevor ich die Untersuchung über die Eigenschaften der für meine Arbeit wichtigen Functionen

$$U_{n-\mu, 1}, U_{n-\mu, 2}, \dots, U_{n-\mu, n-\mu}$$

weiterführe, sehe ich mich genötigt Einiges über die Herstellung einer solchen linearen und homogenen Differentialgleichung  $L = o$  vorauszuschicken, welche von sämmtlichen Integralen jeder einzigen zu einem System von gegebenen linearen und homogenen Differentialgleichungen derselben Ordnung  $\mu$

$$l_1 = o, \quad l_2 = o, \dots, \quad l_r = o$$

gehörenden Gleichung integriert wird, und deren allgemeines Integral die Form

$$Y_1 + Y_2 + \dots + Y_r$$

hat, wo

$$Y_\rho \quad (\rho=1, 2, \dots, r)$$

das allgemeine Integral der Gleichung

$$l_\rho = o$$

bedeutet.

Es sei also das obige System

$$l_1 = o, \quad l_2 = o, \dots, \quad l_r = o$$

gegeben, wo

$$l_\rho = y^{(\mu)} + p_{\rho, 1}y^{(\mu-1)} + \dots + p_{\rho, \mu}y \quad (\rho=1, 2, \dots, r)$$

ist, und die Gleichung

$$l_\rho = o \quad (\rho=1, 2, \dots, r)$$

das Fundamentalsystem von Integralen

$$y_{\rho, 1}, y_{\rho, 2}, \dots, y_{\rho, \mu}$$

besitzt. Giebt es dann wirklich eine Differentialgleichung

$$L = y^{(v)} + P_1y^{(v-1)} + \dots + P_vy = o$$

von der oben genannten Beschaffenheit, so muss erstens ihre Ordnungszahl  $\nu$  diejenige Zahl sein, welche angibt wie viele unter den Functionen

$$y_{\rho, \sigma} \quad (\rho=1, 2, 3, \dots, r) \\ (\sigma=1, 2, 3, \dots, n)$$

von einander linear unabhängig sind<sup>1</sup> und zweitens jede der gegebenen Gleichungen

$$l_\rho = 0 \quad (\rho=1, 2, 3, \dots, r)$$

eine  $(\nu - \mu)$ -reduzierte der Gleichung  $L = 0$  sein.

Es müssen also die Coefficienten der letztgenannten Gleichung den in der Formel (8) enthaltenen Bedingungen genügen, wenn in dieser Formel die Substitutionen

$$P_{\nu, \lambda} = P_\lambda, \quad P_{\rho, z} = p_{\rho, z} \\ (\lambda=1, 2, \dots, \nu) \quad (z=1, 2, \dots, n)$$

ausgeführt werden. Bezeichne ich mit

$$\check{A}_{\sigma, \lambda}(l_\rho)$$

das Resultat der Substitutionen

$$P_{\rho, z} = p_{\rho, z} \quad (z=1, 2, \dots, n)$$

in die Grösse  $\check{A}_{\sigma, \lambda}$ , so sind die genannten Bedingungen in dem System:

$$(13) \quad P_{\nu-\mu+\sigma} = \check{A}_{\sigma, 0}(l_\rho) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu-\mu} \check{A}_{\sigma, \lambda}(l_\rho) P_\lambda \quad (\rho=1, 2, \dots, r; \sigma=1, 2, \dots, n)$$

enthalten.

Wie aus dem § 2 ersichtlich ist können aber die Grössen  $\check{A}_{\sigma, \lambda}(l_\rho)$  nur dann gebildet werden, wenn die  $\nu - \mu$  ersten Abgeleiteten von den Coefficienten

$$p_{\rho, z} \quad (\rho=1, 2, \dots, r) \\ (z=1, 2, \dots, n)$$

existiren. Dieses ist folglich eine nothwendige Bedingung zur Existenz der Differentialgleichung  $L = 0$ . Ist aber diese Bedingung erfüllt, so können auch die  $\nu$  ersten Abgeleiteten einer jeden der Functionen

$$y_{\rho, \sigma}$$

---

<sup>1</sup> Die Zahl  $\nu$  ist von der Wahl der Fundamentalsysteme unabhängig.

gebildet werden und hierdurch ist das Vorhandensein der Coefficienten  $P_1, P_2, \dots, P_r$  vollständig ausser Zweifel gestellt. Da es außerdem nur eine einzige Differentialgleichung  $L = 0$  geben kann, erhalte ich aus dem Vorhergehenden den Satz:

Wenn ich eine Anzahl von linearen und homogenen Differentialgleichungen

$$l_1 = 0, \quad l_2 = 0, \quad \dots, \quad l_r = 0$$

von derselben Ordnung  $\mu$  habe, von denen eine jede ein Fundamentalsystem von Integralen besitzt, und ich mit  $v$  die Anzahl der von einander linear unabhängigen unter den Elementen sämtlicher dieser Fundamentalsysteme bezeichne, so giebt es immer, sobald von allen Coefficienten der gegebenen Gleichungen die  $v - \mu$  ersten Abgeleiteten gebildet werden können, eine und nur eine einzige Differentialgleichung

$$L = 0,$$

welche so beschaffen ist, dass jedes particuläre Integral einer jeden der Gleichungen  $l_1 = 0, l_2 = 0, \dots, l_r = 0$  der Gleichung  $L = 0$  Genüge leistet, und das allgemeine Integral der letzten Gleichung die Form

$$Y_1 + Y_2 + \dots + Y_r$$

hat, wobei

$$Y_\rho \quad (\rho = 1, 2, \dots, r)$$

das allgemeine Integral der Gleichung

$$l_\rho = 0$$

darstellt.

Dieser Satz giebt mir ein Mittel zu bestimmen wann mehrere lineare und homogene Differentialgleichungen von derselben Ordnung gemeinschaftliche Integrale haben, wie ich im Folgenden zeigen werde.

9. Fürs Erste nehme ich nun an dass es keine Function giebt, die gleichzeitig zwei oder mehrere der gegebenen Differentialgleichungen  $l_1 = 0, l_2 = 0, \dots, l_r = 0$  integriert, d. h. dass

$$v = r\mu = n$$

ist. Ausserdem setze ich voraus dass die im § 8 erwähnte Bedingung erfüllt ist.

Nach dem daselbst ausgesprochenen Satze müssen die  $n - \mu$  Gleichungen des Systems

$$(I 3^a) \quad \left| \begin{array}{l} a_{11}(l_1 l_r) P_1 + a_{12}(l_1 l_r) P_2 + \dots + a_{1,n-\mu}(l_1 l_r) P_{n-\mu} = a_{10}(l_r l_1) \\ a_{21}(l_1 l_r) P_1 + a_{22}(l_1 l_r) P_2 + \dots + a_{2,n-\mu}(l_1 l_r) P_{n-\mu} = a_{20}(l_r l_1) \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{\mu,1}(l_1 l_r) P_1 + a_{\mu,2}(l_1 l_r) P_2 + \dots + a_{\mu,n-\mu}(l_1 l_r) P_{n-\mu} = a_{\mu,0}(l_r l_1) \\ a_{11}(l_2 l_r) P_1 + a_{12}(l_2 l_r) P_2 + \dots + a_{1,n-\mu}(l_2 l_r) P_{n-\mu} = a_{10}(l_r l_2) \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{\mu,1}(l_2 l_r) P_1 + a_{\mu,2}(l_2 l_r) P_2 + \dots + a_{\mu,n-\mu}(l_2 l_r) P_{n-\mu} = a_{\mu,0}(l_r l_2) \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{11}(l_{r-1} l_r) P_1 + a_{12}(l_{r-1} l_r) P_2 + \dots + a_{1,n-\mu}(l_{r-1} l_r) P_{n-\mu} = a_{10}(l_r l_{r-1}) \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{\mu,1}(l_{r-1} l_r) P_1 + a_{\mu,2}(l_{r-1} l_r) P_2 + \dots + a_{\mu,n-\mu}(l_{r-1} l_r) P_{n-\mu} = a_{\mu,0}(l_r l_{r-1}) \end{array} \right.$$

in dem ich

$$a_{\sigma,\lambda}(l_\rho l_\tau) = \hat{A}_{\sigma,\lambda}(l_\rho) - \hat{A}_{\sigma,\lambda}(l_\tau)$$

gesetzt habe, den  $n - \mu$  Coefficienten  $P_1, P_2, \dots, P_{n-\mu}$  eindeutig bestimmte Werthe geben.

Hierzu ist aber erforderlich dass die Determinante

$$D = \left| \begin{array}{cccc} a_{11}(l_1 l_r) & a_{12}(l_1 l_r) & \dots & a_{1,n-\mu}(l_1 l_r) \\ a_{21}(l_1 l_r) & a_{22}(l_1 l_r) & \dots & a_{2,n-\mu}(l_1 l_r) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{\mu,1}(l_1 l_r) & a_{\mu,2}(l_1 l_r) & \dots & a_{\mu,n-\mu}(l_1 l_r) \\ a_{11}(l_2 l_r) & a_{12}(l_2 l_r) & \dots & a_{1,n-\mu}(l_2 l_r) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{\mu,1}(l_2 l_r) & a_{\mu,2}(l_2 l_r) & \dots & a_{\mu,n-\mu}(l_2 l_r) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{11}(l_{r-1} l_r) & a_{12}(l_{r-1} l_r) & \dots & a_{1,n-\mu}(l_{r-1} l_r) \\ a_{\mu,1}(l_{r-1} l_r) & a_{\mu,2}(l_{r-1} l_r) & \dots & a_{\mu,n-\mu}(l_{r-1} l_r) \end{array} \right|$$

nicht verschwindet.

10. Jetzt werde ich annehmen, dass

$$v = r\mu - m = n - m$$

ist, wo  $m$  eine ganze positive Zahl, die  $\leq (r-1)\mu$  ist, darstellt. Es giebt mir in diesem Falle das System (13)  $n$  Gleichungen zur Bestimmung der  $n-m$  Coefficienten  $P_1, P_2, \dots, P_{n-m}$ . Dieses System darf also nur  $n-m$  von einander unabhängige Gleichungen enthalten, oder, wenn ich das System (13) durch ein dem System (13<sup>a</sup>) entsprechendes ersetze, dürfen in diesem nur  $n-m-\mu$  solche Gleichungen vorkommen.

Die im System (13) vorhandenen  $\check{A}_{\sigma,\lambda}(l_\rho)$  kann ich unter Berücksichtigung der Formel (9) gegen

$$A_{\sigma, \lambda+m}(l_\rho) = A_{\sigma, \lambda+m}^n(l_\rho)$$

vertauschen, woher das in diesem Falle dem System (13<sup>a</sup>) entsprechende Gleichungssystem das folgende Aussehen erhält:

$$\begin{array}{l}
 \left| \begin{array}{ccccccccc}
 a_{1,m+1}(l_1 l_r) P_1 & + a_{1,m+2}(l_1 l_r) P_2 & + \dots + a_{1,n-\mu}(l_1 l_r) P_{n-m-\mu} & = a_{1,m}(l_r l_1) \\
 \\ 
 a_{2,m+1}(l_1 l_r) P_1 & + a_{2,m+2}(l_1 l_r) P_2 & + \dots + a_{2,n-\mu}(l_1 l_r) P_{n-m-\mu} & = a_{2,m}(l_r l_1) \\
 \\ 
 \cdot & \cdot \\
 \\ 
 (13b) \quad a_{\mu,m+1}(l_1 l_r) P_1 & + a_{\mu,m+2}(l_1 l_r) P_2 & + \dots + a_{\mu,n-\mu}(l_1 l_r) P_{n-m-\mu} & = a_{\mu,m}(l_r l_1) \\
 \\ 
 a_{1,m+1}(l_2 l_r) P_1 & + a_{1,m+2}(l_2 l_r) P_2 & + \dots + a_{1,n-\mu}(l_2 l_r) P_{n-m-\mu} & = a_{1,m}(l_r l_2) \\
 \\ 
 \cdot & \cdot \\
 \\ 
 a_{\mu,m+1}(l_{r-1} l_r) P_1 & + a_{\mu,m+2}(l_{r-1} l_r) P_2 & + \dots + a_{\mu,n-\mu}(l_{r-1} l_r) P_{n-m-\mu} & = a_{\mu,m}(l_r l_{r-1})
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Bezeichne ich jetzt mit

D<sub>x</sub>

eine von den Subdeterminanten, welche man nachbehält wenn man in der Determinante  $D$  die  $z$  ersten Linien und  $z$  beliebige Reihen auslässt, so müssen folglich alle Determinanten

$$D_{m-1}$$

verschwinden, aber wenigstens eine von den Subdeterminanten

$$D_m$$

von Null verschieden sein.

11. Im § 9 habe ich die nothwendige Bedingung aufgestellt, der die Gleichungen  $l_1 = 0, l_2 = 0, \dots, l_r = 0$  genügen müssen wenn nicht zwei oder mehrere unter ihnen von derselben Function integriert werden, und im § 10 die nothwendige Bedingung, die von den genannten Gleichungen erfüllt werden muss, wenn eine gewisse Anzahl von ihren Integralen linear unabhängig sind. Diese Bedingungen sind aber auch genügend, denn wenn alle Determinanten  $D_{m-1} = 0$  sind, und unter den Determinanten  $D_m$  wenigstens eine nicht  $= 0$  ist, so kann die Anzahl der von einander linear unabhängigen unter den Integralen der Gleichungen  $l_1 = 0, l_2 = 0, \dots, l_r = 0$  weder grösser noch kleiner als  $n - m$  sein, folglich ist sie  $= n - m$ .

Schliesslich will ich noch bemerken, dass die Coefficienten der Gleichung

$$L = 0,$$

wie das System (13) ergiebt, nur von den Coefficienten der gegebenen Gleichungen  $l_1 = 0, l_2 = 0, \dots, l_r = 0$  und ihren  $\nu - \mu$  ersten Abgeleiteten abhängig sind und zwar von den Coefficienten nur derjenigen unter ihnen, deren allgemeine Integrale von einander linear unabhängig sind.

### III.

12. Es sei wieder wie im § 5

$$I_n = 0$$

eine lineare und homogene Differentialgleichung  $n^{\text{ter}}$  Ordnung, von der ich jetzt annehme, dass in einem gewissen Gebiete

1° die Functionen

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

ein Fundamentalsystem von Integralen derselben darstellen, und

2° die  $\lambda - 1$  ersten Abgeleiteten einer jeden der Functionen  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , oder, was dasselbe ist, die  $\lambda - n - 1$  ersten Abgeleiteten des Differentialausdruckes  $L_n$  gebildet werden können, wobei  $\lambda$  die grösste unter den Zahlen

$$n + \frac{|n|}{|\mu| n - \mu} \quad (\mu=1, 2, \dots, n-1)$$

bedeutet.

Hiermit habe ich gesagt, dass in dem in Frage stehenden Gebiete nicht nur sämmtliche Grössen

$$\bar{u}_{n-\mu} = c_{n-\mu} e^{\int U_{n-\mu, 1} dx} \quad (\mu=1, 2, \dots, n-1)$$

$$c_{n-\mu} = \text{Const.}$$

sondern auch ihre

$$\frac{|n|}{|\mu| n - \mu}$$

ersten Abgeleiteten gebildet werden können, da nämlich infolge der Gleichung (5<sup>a</sup>) die Grössen  $u_{n-\mu}$  bei geeigneter Wahl der Constanten  $c_{n-\mu}$  das Aussehen

$$(14) \quad u_{n-\mu, \rho} = \frac{|y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_\mu}|}{|y_1 y_2 \dots y_n|}$$

haben, wobei ich mit dem angehängten Zeichen  $\rho$  andeuten will, dass

$$i_1, i_2, \dots, i_\mu$$

die  $\rho^{\text{te}}$  Combination von je  $\mu$  unter den  $n$  Zahlen  $1, 2, \dots, n$  bedeutet, nachdem ich die genannten Combinationen in eine gewisse Reihenfolge geordnet habe.

Unter Beibehaltung der Bezeichnung  $L_\mu = 0$  für eine  $(n - \mu)$ :reduirte der Differentialgleichung  $L_n = 0$  ist  $L_0 = 0$  die lineare und homogene Differentialgleichung von der Ordnung Null

$$y = 0.$$

Bei der Annahme  $\mu = 0$  verschwinden also sämmtliche Grössen

$$S_{a, \tilde{s}}$$

des § 2, wodurch die Formel (5) in

$$U_{\nu_i \rho} = P_{\nu_i \rho}, \quad (\rho = 1, 2, \dots, \nu)$$

und das System (10) in das folgende übergeht:

$$(15) \quad \begin{aligned} P_{n,1} &= P_{n-1,1} + \frac{z'_n}{z_n}, & P_{n,\rho} &= P_{n-1,\rho} + P'_{n-1,\rho-1} + P_{n,n} &= P'_{n-1,n-1} \\ &&&+ P_{n-1,\rho-1} \frac{z'_n}{z_n}, & &+ P_{n-1,n-1} \frac{z'_n}{z_n}, \\ &&&(\rho = 2, 3, \dots, n-1) && \\ P_{n-1,1} &= P_{n-2,1} + \frac{z'_{n-1}}{z_{n-1}}, & P_{n-1,\rho} &= P_{n-2,\rho} + P'_{n-2,\rho-1} + P_{n-1,n-1} &= P'_{n-2,n-2} \\ &&&+ P_{n-2,\rho-1} \frac{z'_{n-1}}{z_{n-1}}, & &+ P_{n-2,n-2} \frac{z'_{n-1}}{z_{n-1}}, \\ &&&(\rho = 2, 3, \dots, n-2) && \\ &\vdots & &\vdots & &\vdots \\ P_{n-\sigma,1} &= P_{n-\sigma-1,1} + \frac{z'_{n-\sigma}}{z_{n-\sigma}}, & P_{n-\sigma,\rho} &= P_{n-\sigma-1,\rho} + P'_{n-\sigma-1,\rho-1} + P_{n-\sigma,n-\sigma} &= P'_{n-\sigma-1,n-\sigma-1} \\ &&&+ P_{n-\sigma-1,\rho-1} \frac{z'_{n-\sigma}}{z_{n-\sigma}}, & &+ P_{n-\sigma-1,n-\sigma-1} \frac{z'_{n-\sigma}}{z_{n-\sigma}}, \\ &&&(\rho = 2, 3, \dots, n-\sigma-1) && \\ &\vdots & &\vdots & &\vdots \\ P_{3,1} &= P_{2,1} + \frac{z'_3}{z_3}, & P_{3,2} &= P_{2,2} + P'_{2,1} + P_{2,1} \frac{z'_3}{z_3}, & P_{3,3} &= P'_{2,2} + P_{2,2} \frac{z'_3}{z_3}, \\ P_{2,1} &= P_{1,1} + \frac{z'_2}{z_2}, & & & & P_{2,2} &= P'_{1,1} + P_{1,1} \frac{z'_2}{z_2}, \\ P_{1,1} &= \frac{z'_1}{z_1}. & & & & & \end{aligned}$$

13. Betrachte ich in diesem System (15) fürs Erste die Gleichungen, welche in der zweiten Horizontalreihe enthalten sind, so weiss ich dass diese bei der Elimination der Grössen

$$P_{n-2,1}, P_{n-2,2}, \dots, P_{n-2,n-2}$$

eine lineare und homogene Differentialgleichung ( $n - 1$ )<sup>ter</sup> Ordnung geben, welche die Adjungirte der Gleichung

$$L_{n-1} = \circ$$

ist. Betrachte ich aber die zwei ersten Horizontalreihen des Systems (15) und führe ich in die zweite derselben überall (siehe die Formel (4a))

$$z_{n-1} = \frac{u_2}{z_n}$$

ein, so giebt mir die Elimination der Grössen

$$P_{n-2,1}, P_{n-2,2}, \dots, P_{n-2,n-2}$$

$$P_{n-1,1}, P_{n-1,2}, \dots, P_{n-1,n-1}$$

eine in  $u_2$  lineare und homogene Differentialgleichung ( $n - 1$ )<sup>ter</sup> Ordnung

$$l = \circ$$

und zwar dieselbe, die ich durch Substitution der aus der ersten Horizontalreihe des Systems (15) abgeleiteten Ausdrücke für  $P_{n-1,1}, P_{n-1,2}, \dots, P_{n-1,n-1}$  und der Grösse  $\frac{u_2}{z_n}$  statt  $z_{n-1}$  in die Adjungirte der Gleichung  $L_{n-1} = \circ$  erhalten hätte.

Die Coefficienten der so gebildeten Differentialgleichung  $l = \circ$  sind nur von den Grössen  $P_{n1}, P_{n2}, \dots, P_{nn}$  und  $z_n$  abhängig, wobei zu bemerken ist dass  $z_n$  dasjenige particuläre Integral der Differentialgleichung  $M_n = \circ$ , welches der Bedingung  $z_n L_n = \frac{d}{dx}(z_n L_{n-1})$  genügt, darstellt. Um diese Abhängigkeit von dem particulären Integral  $z_n$  anzudeuten werde ich statt  $l = \circ$

$$l(z_n) = \circ$$

schreiben. Unter der Anzahl der Differentialgleichungen  $l(z_n) = \circ$ , die ich erhalte, wenn ich das eine particuläre Integral nach dem andern als  $z_n$  benutze, werde ich diejenigen

$$l(z_{n,1}) = \circ, \quad l(z_{n,2}) = \circ, \quad \dots, \quad l(z_{n,n}) = \circ$$

besonders beachten, welche mit Hilfe der Elementen des Fundamentalsystems

$$z_{n,1}, z_{n,2}, \dots, z_{n,n}$$

von Integralen der Gleichung  $M_n = 0$  gebildet sind, wobei ich die im § 6 gebrauchten Bezeichnung

$$z_{n\rho} = \frac{|y_1 y_2 \dots y_{\rho-1} y_{\rho+1} \dots y_n|}{|y_1 y_2 \dots y_n|} \quad (\rho=1, 2, \dots, n)$$

anwende.

Ich werde ausserdem mit

$$L_{n-1,\rho} = 0$$

diejenige unter den i:reducirten  $L_{n-1} = 0$  der Gleichung  $L_n = 0$  bezeichnen, welche das Fundamentalsystem von Integralen

$$y_1, y_2, \dots, y_{\rho-1}, y_{\rho+1}, \dots, y_n$$

hat und folglich dem Integrale  $z_{n\rho}$  in der Art entspricht, dass

$$z_{n\rho} L_n = \frac{d}{dx} (z_{n\rho} L_{n-1,\rho})$$

ist.

Die Adjungirte der Differentialgleichung

$$L_{n-1,\rho} = 0$$

hat das Fundamentalsystem von Integralen

$$\frac{|y_1 y_2 \dots y_{\sigma-1} y_{\sigma+1} \dots y_{\rho-1} y_{\rho+1} \dots y_n|}{|y_1 y_2 \dots y_{\rho-1} y_{\rho+1} \dots y_n|} \quad (\sigma=1, 2, \dots, \rho-1)$$

$$\frac{|y_1 y_2 \dots y_{\rho-1} y_{\rho+1} \dots y_{\tau-1} y_{\tau+1} \dots y_n|}{|y_1 y_2 \dots y_{\rho-1} y_{\rho+1} \dots y_n|} \quad (\tau=\rho+1, \rho+2, \dots, n)$$

woher, da

$$z_{n\rho} = \frac{|y_1 y_2 \dots y_{\rho-1} y_{\rho+1} \dots y_n|}{|y_1 y_2 \dots y_n|}$$

ist, die Differentialgleichung

$$l(z_{n\rho}) = 0$$

das Fundamentalsystem von Integralen

$$\frac{|y_1 y_2 \dots y_{\sigma-1} y_{\sigma+1} \dots y_{\rho-1} y_{\rho+1} \dots y_n|}{|y_1 y_2 \dots y_n|} \quad (\sigma=1, 2, \dots, \rho-1)$$

$$\frac{|y_1 y_2 \dots y_{\rho-1} y_{\rho+1} \dots y_{\tau-1} y_{\tau+1} \dots y_n|}{|y_1 y_2 \dots y_n|} \quad (\tau=\rho+1, \rho+2, \dots, n)$$

hat.

14. Wie ich im Cap. II gezeigt habe ist es mir möglich eine lineare und homogene Differentialgleichung

$$\mathcal{L}_2 = 0$$

aufzustellen, welche von sämtlichen Integralen der Gleichungen

$$l(\tilde{z}_{n,1}) = 0, \quad l(z_{n,2}) = 0, \quad \dots, \quad l(z_{n,n}) = 0$$

integriert wird und deren allgemeines Integral das Aussehen

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=n} Q_\rho$$

hat, wenn  $Q_\rho$  das allgemeine Integral der Gleichung  $l(z_{n,\rho}) = 0$  ist.

Es wird folglich jede Grösse

$$u_{2,\rho} \quad \left( \rho=1, 2, 3, \dots, n_2; n_2 = \frac{n}{2} \right)$$

(siehe die Formel (14)) der Gleichung

$$\mathcal{L}_2 = 0$$

Genüge leisten, und das allgemeine Integral dieser Gleichung

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=n_2} C_\rho u_{2,\rho}$$

sein, wo die  $C_\rho$  beliebige Constanten sind.

15. Es sagt mir der Satz des § 6, dass jeder Differentialgleichung  $L_{n-2} = 0$  und folglich auch jeder Grösse  $u_{2,\rho}$  zwei von einander linear

unabhängige Integrale  $z_n$  der Gleichung  $M_n = 0$  entsprechen, und zwar sind nach dem § 5

$$z_{ni} \text{ und } z_{nj} \quad (i < j)$$

ein Paar solche Integrale, welche der Grösse

$$u_{2,\rho}$$

entsprechen, wenn  $1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, j-1, j+1, \dots, n$  die  $\rho^{\text{te}}$  Combination zu je  $n-2$  von den Zahlen  $1, 2, \dots, n$  ist. Hieraus folgt, dass jede Grösse  $u_{2,\rho}$  wenigstens zwei von den Differentialgleichungen

$$l(z_{n,1}) = 0, \quad l(z_{n,2}) = 0, \quad \dots, \quad l(z_{n,n}) = 0$$

integriert, und dass sämtliche Integrale einer jeden dieser Differentialgleichungen von den Integralen der übrigen linear abhängig ist. Bei der Aufstellung der Differentialgleichung

$$\mathcal{L}_2 = 0$$

brauche ich folglich nur  $n-1$  unter den genannten Gleichungen zu berücksichtigen, wodurch ihre Coefficienten ausser von den Grössen  $P_{n1}, P_{n2}, \dots, P_{nn}$  von nur  $n-1$  unter den Integralen  $z_{n\rho}$  abhängig werden. Es müssen aber andererseits die Coefficienten der Differentialgleichung  $\mathcal{L}_2 = 0$  in Bezug auf  $y_1, y_2, \dots, y_n$  — und folglich auch in den Grössen  $z_{n1}, z_{n2}, \dots, z_{nn}$  — symmetrisch sein, wie die Beschaffenheit ihrer Integrale lehrt. Eine nothwendige Folge dieser beiden Bedingungen ist die, dass die genannten Coefficienten keine von den Grössen  $z_{n\rho}$  enthalten.<sup>1</sup>

Diejenige Differentialgleichung, welche von sämtlichen Grössen

$$u_{2,\rho}$$

integriert wird, und deren allgemeines Integral die Form

$$\sum c_\rho u_{2,\rho}$$

hat, ist also so beschaffen, dass ihre Coefficienten nur von den Coefficienten der Differentialgleichung

$$L_n = 0$$

abhängig sind.

---

<sup>1</sup> D. h. dass diese Grössen durch die Gleichung  $M_n = 0$  eliminiert werden können.

Durch die Art, in welcher ich die Differentialgleichung

$$\mathcal{L}_2 = 0$$

gebildet habe, ist ersichtlich, dass ihre Coefficienten rationale algebraische Functionen der Coefficienten der Gleichung

$$L_n = 0$$

und ihren Abgeleiteten sind.

Die Ordnungszahl der Differentialgleichung

$$\mathcal{L}_2 = 0,$$

gleich derjenigen Zahl, welche angiebt wie viele unter den Grössen

$$u_{2,\rho}$$

von einander linear unabhängig sind, ist  $\leqq \frac{n(n-1)}{2}$ .

16. Es sei nun angenommen, dass, wenn  $\mu$  eine positive, ganze Zahl, welche  $< n - 1$  ist, bedeutet, zu jeder Gleichung

$$L_{n-1,\rho} = 0$$

eine lineare und homogene Differentialgleichung

$$l_\rho = 0$$

gehört, welche die folgenden Eigenschaften hat:

1° ihre Ordnungszahl ist  $\leqq \frac{|n-1|}{|\mu|^{n-\mu-1}}$ ,

2° ihre Coefficienten sind von keinen anderen Veränderlichen abhängig als von den Coefficienten der Gleichung  $L_{n-1,\rho}$ , und zwar sind sie rationale, algebraische Functionen dieser Coefficienten und ihrer Abgeleiteten,

3° sie wird von jeder Grösse

$$v_{\rho,\sigma} = \frac{|y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_{n-\mu-1}}|}{|y_1 y_2 \dots y_{\rho-1} y_{\rho+1} \dots y_n|} \quad \left( \sigma = 1, 2, \dots, \frac{|n-1|}{|\mu|^{n-\mu-1}} \right)$$

integriert, bei der  $i_1, i_2, \dots, i_{n-\mu-1}$  die  $\sigma^{\text{te}}$  Combination zu je  $n-\mu-1$  von den Zahlen  $1, 2, \dots, \rho-1, \rho+1, \dots, n$  ist, und

4° ihr allgemeines Integral hat die Form

$$\sum_{\sigma} c_{\sigma} v_{\rho, \sigma},$$

wo  $c_{\sigma}$  beliebige Constanten sind.

Dann, behaupte ich, kann auch eine lineare und homogene Differentialgleichung aufgestellt werden, welche den folgenden Bedingungen Genüge leistet:

1° ihre Ordnungszahl ist  $\leq \frac{|n|}{|\mu + 1| |n - \mu - 1|}$ ,

2° ihre Coefficienten sind rationale, algebraische Functionen von den Coefficienten der Gleichung  $L_n = 0$  und ihren Abgeleiteten und von keinen anderen Veränderlichen abhängig,

3° sie wird von jeder Grösse (siehe die Formel (14)),

$$u_{\mu+1, \rho} \quad \left( \rho = 1, 2, \dots, \frac{|n|}{|\mu+1| |n-\mu-1|} \right)$$

integriert, und

4° ihr allgemeines Integral hat die Form

$$\sum_{\rho} C_{\rho} u_{\mu+1, \rho}$$

wobei  $C_{\rho}$  beliebige Constanten sind.

Mit anderen Worten, dann giebt das System der Gleichungen in den  $\mu + 1$  ersten Horizontalreihen des Systems (15) bei der Substitution von

$$z_{n-\mu} = \frac{u}{z_n z_{n-1} \dots z_{n-\mu+1}}$$

und Elimination der Grössen

$$z_{n-\mu+1}, z_{n-\mu+2}, \dots, z_n$$

$$P_{n-\mu-1, 1}, P_{n-\mu-1, 2}, \dots, P_{n-\mu-1, n-\mu-1}$$

$$P_{n-\mu, 1}, P_{n-\mu, 2}, \dots, P_{n-\mu, n-\mu}$$

$$P_{n-\mu+1, 1}, P_{n-\mu+1, 2}, \dots, P_{n-\mu+1, n-\mu+1}$$

$$P_{n-1, 1}, P_{n-1, 2}, \dots, P_{n-1, n-1}$$

eine in  $u$  lineare und homogene Differentialgleichung, die höchstens von der Ordnung  $\frac{n}{|\mu + 1|^{n-\mu-1}}$  ist und die Grösse

$$\sum_{\rho} C_{\rho} u_{\mu+1, \rho},$$

wo  $C_{\rho}$  beliebige Constanten sind, als allgemeines Integral hat.

Um dieses zu beweisen brauche ich nur wie im vorigen Falle, wo  $\mu = 1$  war, in jede der gegebenen Gleichungen

$$l_{\rho} = 0$$

statt der abhängig Veränderlichen

$$\frac{u}{z_{n, \rho}}$$

und statt der Coefficienten der Gleichung

$$L_{n-1, \rho} = 0$$

ihre aus der ersten Reihe des Systems (15) abgeleiteten Ausdrücke in  $P_{n,1}, P_{n,2}, \dots, P_{n,n}$  und  $z_{n,\rho}$  einzuführen, wobei ich ein System von  $n$  in  $u$  lineare und homogene Differentialgleichungen erhalte, deren Coefficienten ausser von den Coefficienten der Gleichung  $L_n = 0$  nur von je einer der Grössen  $z_{n,\rho}$  abhängen. Um dieses anzudeuten gebe ich diesen Differentialgleichungen die Bezeichnung

$$l_{\rho}(z_{n,\rho}) = 0. \quad (\rho=1, 2, \dots, n)$$

Ein Fundamentalsystem von Integralen einer jeden der Gleichungen

$$l_{\rho}(z_{n,\rho}) = 0$$

besteht aus den von einander linear unabhängigen unter denjenigen Grössen

$$u_{\mu+1, \rho},$$

welche dem Werthe  $z_{n,\rho}$  entsprechen. Da aber jedem

$$u_{\mu+1, \rho}$$

$\mu + 1$  unter den Grössen  $z_{n,\rho}$  entsprechen, muss jede Grösse  $u_{\mu+1, \rho}$  wenigstens  $\mu + 1$  der Gleichungen  $l_{\rho}(z_{n,\rho}) = 0$  integrieren, und folglich ist jedes

Integral einer jeden der Gleichungen  $l_\rho(z_{n,\rho}) = 0$  von den Grössen, welche  $n - \mu$  gewisse unter diesen Gleichungen integriren, linear abhängig. Es können somit die Coefficienten derjenigen Differentialgleichung

$$\mathcal{L}_{\mu+1} = 0,$$

welche von sämtlichen Grössen

$$u'_{\mu+1,\rho}$$

integriert wird, und deren allgemeines Integral

$$\sum_\rho c_\rho u_{\mu+1,\rho}$$

ist, ausser von den Coefficienten der Gleichung  $L_n = 0$  von nur  $n - \mu$  der Grössen

$$z_{n,\rho}$$

abhängig sein; andererseits müssen sie aber in den Grössen

$$z_{n,1}, z_{n,2}, \dots, z_{n,n}$$

symmetrisch sein, folglich enthalten sie garnicht diese Grössen und sind nur von den Coefficienten der Gleichung  $L_n = 0$  abhängig, wobei aus der Bildungsart der Gleichung

$$\mathcal{L}_{\mu+1} = 0$$

ersichtlich ist, dass ihre Coefficienten rationale, algebraische Functionen dieser Grössen und ihrer Abgeleiteten sind.

17. Die im § 16 gemachten Voraussetzungen sind erfüllt, wenn  $\mu = 1$  und  $n > 2$  ist, folglich sind sie nach dem soeben Gesagten auch dann erfüllt, wenn  $\mu = 2$  und  $n > 3$  (wie ich auch in den §§ 13—15 besonders dargestellt habe) und überhaupt wenn  $\mu$  eine beliebige, positive ganze Zahl und  $n > \mu + 1$  ist.

Es giebt also immer, wenn  $\mu < n$  ist, eine lineare und homogene Differentialgleichung

$$\mathcal{L}_{n-\mu} = 0,$$

welche in dem im § 12 genannten Gebiete von den Functionen

$$u_{n-\mu,\rho} \quad \left( \rho = 1, 2, 3, \dots, \frac{n}{n-\mu} \right)$$

integriert wird, und deren allgemeines Integral das Aussehen

$$\sum_{\rho} C_{\rho} u_{n-\mu, \rho}$$

hat, wobei  $C_{\rho}$  beliebige Constanten sind, und sind die Coefficienten dieser Differentialgleichung rationale, algebraische Functionen von den Coefficienten der gegebenen Gleichung

$$L_n = 0$$

und ihren Abgeleiteten.

Dass nur eine einzige solche Differentialgleichung existiren kann, und dass sie von der Wahl des Fundamentalsystems

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

unabhängig ist, leuchtet dadurch ein, dass jede Grösse

$$|\eta_{i_1} \eta_{i_2} \cdots \eta_{i_{\mu}}|$$

gleich einer Summe

$$\sum_{\rho} c_{\rho} u_{n-\mu, \rho},$$

wo  $c_{\rho}$  gewisse Constanten sind, gesetzt werden kann, wenn die Grössen

$$\eta_i = c_{i1} y_1 + c_{i2} y_2 + \cdots + c_{in} y_n \quad (i=i_1, i_2, \dots, i_{\mu})$$

sind, wo  $c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in}$  gewisse Constanten bedeuten.

18. Wie aus dem System (15) ersichtlich ist, wird die  $(n-\mu)$ :reducirte  $L_{\mu} = 0$  der Gleichung  $L_n = 0$  durch die Grössen

$$z_n, z_{n-1}, \dots, z_{\mu+1}$$

eindeutig bestimmt. Da aber nach der Formel (4a)

$$u_{\nu} = z_{n-\nu+1} z_{n-\nu+2} \cdots z_n \quad (\nu=1, 2, 3, \dots, \mu)$$

und somit

$$z_{n-\nu+1} = \frac{u_{\nu}}{u_{\nu-1}}$$

ist, bestimmen die Grössen

$$u_1, u_2, \dots, u_{n-\mu}$$

ebenso eindeutig die Coefficienten der  $(n-\mu)$ :reducirten der Gleichung  $L_n = 0$ .

Ich ziehe es vor den letztgenannten Grössen die Benennung »*reducirende Grössen* der linearen und homogenen Differentialgleichung  $L_n = o$ « beizulegen, und zwar werde ich jede Grösse, die aus  $\mu$  beliebigen Elementen

$$\eta_{i_1}, \eta_{i_2}, \dots, \eta_{i_\mu}$$

eines beliebigen Fundamentalsystems

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$$

von Integralen der Gleichung  $L_n = o$  nach der Formel

$$\frac{|\eta_{i_1} \eta_{i_2} \cdots \eta_{i_\mu}|}{|\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_n|}$$

aufgebaut ist, eine » $(n - \mu)$ :*reducirende Grösse* der linearen und homogenen Differentialgleichung  $L_n = o$ « benennen.

Diejenige lineare und homogene Differentialgleichung, welche von sämtlichen  $(n - \mu)$ :reducirenden Grössen der Gleichung  $L_n = o$  und von nur solchen Grössen, die von diesen linear abhängig sind, integriert wird, werde ich eine » $(n - \mu)$ :*reducirende* der linearen und homogenen Differentialgleichung  $L_n = o$ « benennen.

Ist  $\mathfrak{L}_\mu = o$  die  $(n - \mu)$ :reducirende der Gleichung  $L_n = o$ , werde ich sagen, dass die letztere »die zu der  $(n - \mu)$ :reducirenden  $\mathfrak{L}_\mu = o$  gehörende *ursprüngliche* Differentialgleichung« ist.

19. Nach dem § 17 sind die Coefficienten einer  $(n - \mu)$ :reducirenden Differentialgleichung nur von den Coefficienten der zu dieser gehörenden ursprünglichen Gleichung abhängig, und zwar höchstens von den

$$\frac{|n|}{|\mu| |n - \mu|} - 1$$

ersten Abgeleiteten derselben, wie aus dem § 12 ersichtlich ist.

Derselbe § 17 definiert die  $(n - \mu)$ :reducirende  $\mathfrak{L}_\mu = o$  der Gleichung  $L_n = o$  nur für das im § 12 angegebene enge Gebiet. Die Gleichung  $\mathfrak{L}_\mu = o$  kann aber auch ausserhalb dieses Gebietes existiren, nämlich so weit wie die  $n_\mu - 1$  ersten Abgeleiteten der Coefficienten der Gleichung  $L_n = o$  gebildet werden können, wenn  $n_\mu$  die Ordnungszahl der Gleichung  $\mathfrak{L}_\mu = o$  ist. Die angegebene Eigenschaft der Coefficienten der Gleichung  $\mathfrak{L}_\mu = o$  sagt mir aber dass diese Gleichung nicht nur in dem erstgenannten

Gebiete sondern so weit sie überhaupt existirt die Eigenschaft beibehält, eine  $(n - \mu)$ :reducirende der Gleichung  $L_n = o$  zu sein.

Ich kann also den folgenden Satz aussprechen:

*Wenn eine lineare und homogene Differentialgleichung von der Ordnung  $n$  so beschaffen ist, dass in jedem Punkte eines gewissen Gebietes die*

$$\frac{\begin{array}{|c|}\hline n \\ \hline\end{array}}{\begin{array}{|c|c|}\hline \mu & n - \mu \\ \hline\end{array}} = 1$$

*ersten Abgeleiteten ihrer sämtlichen Coefficienten gebildet werden können, so existirt in diesem Gebiete eine lineare und homogene Differentialgleichung, deren Coefficienten rationale, algebraische Functionen von den Coefficienten der ursprünglichen Gleichung und ihren genannten Abgeleiteten sind und von keiner anderen Veränderlichen abhängen, und welche in jedem Punkte dieses Gebietes die  $(n - \mu)$ :reducirende der ursprünglichen ist.*

Ich will mit

$$L_{n,\mu} = o$$

die  $(n - \mu)$ :reducirende der Differentialgleichung

$$L_n = o$$

bezeichnen, wobei ich noch bemerke, das ich mit den Bezeichnungen

$$L_n(y) = o, \quad L_{n,\mu}(y) = o$$

angeben werde, dass in den Differentialgleichungen

$$L_n = o, \quad L_{n,\mu} = o$$

$y$  die abhängig Veränderliche ist.

20. Wenn ich in die  $(n - \mu)$ :reducirende  $L_{n,\mu}(y) = o$  der Differentialgleichung  $L_n(y) = o$  statt der abhängig Veränderlichen  $y$  die Grösse

$$ye^{\int P_{n1} dx}$$

einführe, wo  $P_{n1}$  der zweite Coefficient der Gleichung  $L_n = o$  ist, erhalte ich eine lineare und homogene Differentialgleichung

$$\bar{L}_{n,\mu}(y) = o,$$

deren Coefficienten nur von den Coefficienten der Gleichung  $L_n = 0$  und ihren Abgeleiteten gebildet sind, und deren allgemeines Integral das Aussehen

$$\sum_{\rho} c_{\rho} |y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_{\mu}}|$$

hat, wobei  $i_1, i_2, \dots, i_{\mu}$  die  $\rho^{\text{te}}$  Combination zu je  $\mu$  Elementen von den Zahlen 1, 2, ...,  $n$  repräsentiert und  $c_{\rho}$  beliebige Constanten sind.

Diese Differentialgleichung

$$L_{n,\mu} = 0$$

werde ich die »transformirte  $(n - \mu)$ :reducirende« der Differentialgleichung  $L_n = 0$  benennen.

21. Nach dem § 6 (Formel 12b) ist

$$\frac{|y_1 y_2 \dots y_n|}{|y_1 y_2 \dots y_n|} = C |z_{n,n+1} z_{n,n+2} \dots z_{n,n}|$$

wo  $C$  eine gewisse Constante ist, woraus folgt dass die Differentialgleichungen

$$L_{n,\mu} = 0$$

und

$$\overline{M}_{n,n-\mu} = 0$$

dasselbe allgemeine Integral haben, und somit

$$L_{n,\mu} \equiv \overline{M}_{n,n-\mu}$$

ist.

Da aber auch

$$\frac{|z_{n,n+1} z_{n,n+2} \dots z_{n,n}|}{|z_{n,1} z_{n,2} \dots z_{n,n}|} = c |y_1 y_2 \dots y_n|$$

ist, wo  $c$  eine gewisse Constante ist, so erhalte ich ausserdem die Identität

$$M_{n,n-\mu} \equiv \overline{L}_{n,\mu}.$$

Es ist hier, nach den eingeführten Bezeichnungen  $M_{n,n-\mu}$  die  $\mu$ :reducirende und  $\overline{M}_{n,n-\mu}$  die transformirte  $\mu$ :reducirende der zu  $L_n = 0$  adjungirten Differentialgleichung  $M_n = 0$ .

Die obigen Identitäten geben in Worten ausgesprochen den folgenden Satz:

*Die  $(n - \mu)$ :reducirende der linearen und homogenen Differentialgleichung von der Ordnung  $n$*

$$L_n = 0$$

*ist die transformirte  $\mu$ :reducirende der zu dieser Gleichung adjungirten Differentialgleichung*

$$M_n = 0$$

*und die transformirte  $(n - \mu)$ :reducirende der Gleichung*

$$L_n = 0$$

*ist die  $\mu$ :reducirende der adjungirten Gleichung*

$$M_n = 0,$$

*wie auch  $\mu$  unter den Zahlen 1, 2, ...,  $n - 1$  gewählt sei.*

Da die transformirte  $(n - 1)$ :reducirende einer linearen und homogenen Differentialgleichung von der Ordnung  $n$  nichts anderes als diese Gleichung selbst ist, und die 1:reducirende einer solchen Gleichung ihre Adjungirte ist, so giebt der obige Satz für den Fall  $\mu = 1$  das Theorem von LAGRANGE:

*Eine lineare und homogene Differentialgleichung ist die Adjungirte ihrer eigenen Adjungirten,*

welches Theorem somit ein Specialfall des obigen Satzes ist.

22. Vergleiche ich das System (10) im § 3 mit dem im § 12 aufgestellten System (15), aus dem die Reducirenden der Gleichung  $L_n = 0$  hervorgegangen sind, finde ich dass

*die  $\rho$ :reducirende der Differentialgleichung (11)*

$$y^{(n-\mu)} + U_{n-\mu, 1}y^{(n-\mu-1)} + \dots + U_{n-\mu, n-\mu}y = 0$$

*eine Reducirte der  $\rho$ :reducirenden der Differentialgleichung  $L_n = 0$  ist, wenn die positive ganze Zahl  $\rho < n - \mu$  gesetzt wird.*

Denn jeder  $\rho$ :reducirenden Grösse  $\varphi_\rho$  der Gleichung (11) entspricht wenigstens ein System von  $\rho$  Grössen

$$\tilde{z}_n, \tilde{z}_{n-1}, \tilde{z}_{n-2}, \dots, \tilde{z}_{n-(\rho-1)},$$

deren Product gleich  $\varphi_\rho$  ist, und welche den Gleichungen in den  $\rho$  ersten Verticalreihen des Systems (10) Genüge leisten. Ausserdem ist es immer möglich ein System von  $n - \mu - \rho$  Grössen

$$z_{n-\rho}, z_{n-\rho-1}, \dots, z_{\mu+1},$$

zu finden, welche den übrigen Gleichungen des Systems (10) genügen; zu diesem Zwecke brauche ich nur die Differentialgleichung

$$y^{(n-n-\rho)} + U_{n-\mu-\rho, 1} y^{(n-n-\rho-1)} + \dots + U_{n-\mu-\rho, n-\mu-\rho} y = 0$$

zu reduciren. Hierdurch habe ich aber ein System von Grössen

$$z_n, z_{n-1}, \dots, z_{\mu+1},$$

erhalten, welches dem System (10) Genüge leistet und folglich, nach dem § 3, von der gegebenen Gleichung  $L_n = 0$  ausgeliend eine Reihe von Differentialgleichungen aufbaut, welche sämmtlich Reducirte der Gleichung  $L_n = 0$  sind.  $\varphi_\rho$  ist also eine  $\rho$ :reducirende Grösse der Gleichung  $L_n = 0$ .

Der oben angeführte Satz sagt mir dass die  $\rho$ :reducirende der Gleichung

$$y^{(\mu)} + V_{\mu, 1} y^{(\mu-1)} + \dots + V_{\mu, \mu} y = 0,$$

wobei  $V_{\mu, 1}, \dots, V_{\mu, \mu}$  dieselben Grössen, wie in den §§ 5 und 7 darstellen, eine Reducirte der zur Gleichung  $M_n = 0$   $\rho$ :reducirenden ist, woher durch Berücksichtigung des im § 21 ausgesprochenen Satzes die folgende Thatsache hervorgeht:

*Die transformirte  $(\mu - \rho)$ :reducirende der Gleichung  $L_n = 0$  ist eine Reducirte der transformirten  $(n - \rho)$ :reducirenden der linearen und homogenen Differentialgleichung  $n^{\text{ter}}$  Ordnung  $L_n = 0$ , wobei  $L_n = 0$  eine  $(n - \mu)$ :reducirte der letztgenannten Gleichung, und die positive, ganze Zahl  $\rho < \mu$  ist.*

Dieser Satz sagt mir dass es im Allgemeinen, d. h. wenn die  $\frac{n}{|\rho| |n - \rho|}$  Grössen

$$|y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_\rho}|,$$

in denen

$$i_1, i_2, \dots, i_\rho$$

sämmtliche Combinationen zu je  $\rho$  Elementen von den Zahlen

$$1, 2, \dots, n$$

darstellen, von einander linear unabhängig sind, eine  $\left( \frac{1}{\rho(n-\rho)} - \frac{1}{\rho(\mu-\rho)} \right)$  reducire der Gleichung  $\bar{L}_{n,\rho} = 0$  giebt, deren Coefficienten nur von denjenigen der Gleichung  $L_n = 0$  abhängen.

BEWEIS DES SATZES  
 DASS EINE JEDE  
 ALGEBRAISCHE GLEICHUNG EINE WURZEL HAT  
 VON  
 ELLING HOLST  
 in CHRISTIANIA.

Unserem Zwecke ist offenbar Genüge gethan, wenn wir folgenden Satz beweisen:

Wenn eine jede ganze Function des  $(n - 1)^{\text{ten}}$  Grades sich in  $n - 1$  lineare Factoren auflösen lässt, so hat eine Gleichung des  $n^{\text{ten}}$  Grades wenigstens eine Wurzel.

Die Gleichung, in welcher der Einfachheit wegen dem Coefficienten von  $x^n$  der Werth = 1 beigelegt sein mag, lässt sich immer so schreiben:

$$xf(x) = K,$$

wo  $f(x)$  vom  $(n - 1)^{\text{ten}}$  Grade ist, und also nach unserer Voraussetzung sich in die Factoren  $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_{n-1})$  auflösen lässt. Da mehrere der Grössen  $\alpha_i$  einander gleich sein und einige derselben auch = 0 sein können, so ergiebt sich als allgemeinste Form der Gleichung:

$$(1) \quad x^{m_0}(x - \alpha_1)^{m_1} \dots (x - \alpha_p)^{m_p} = K,$$

wo

$$(2) \quad m_0 + m_1 + \dots + m_p = n.$$

Nun setzen wir:

$$x = r_0 e^{i\varphi_0}, \quad x - \alpha_j = r_j e^{i\varphi_j}, \quad K = R e^{i\psi};$$

dann zerfällt die Gleichung (1) in die beiden Gleichungen: die *Modulgleichung*:

$$(3) \quad r_0^{m_0} r_1^{m_1} \dots r_p^{m_p} = R$$

und die *Argumentgleichung*:

$$(4) \quad m_0\varphi_0 + m_1\varphi_1 + \dots + m_p\varphi_p = \psi + 2k\pi,$$

wo man die  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p$ , so wie die  $\psi \geq 0$  und  $< 2\pi$  annehmen darf, während  $k$  jede beliebige ganze positive oder negative Zahl oder Null vorstellt.

Sei nun ferner  $P$  ein laufender Punkt in der Gaussischen  $(x+iy)$ -Ebene,  $A_0$  der Nullpunkt des letzteren,  $A_1, \dots, A_p$  die den Complexen  $z_1, \dots, z_p$  entsprechenden Punkte, so werden wir zunächst die Grösse

$$PA_0^{2m_0} PA_1^{2m_1} \dots PA_p^{2m_p} - R^2 = \psi(x, y)$$

zu untersuchen haben, wo  $x$  und  $y$  jetzt als gewöhnliche Cartesische Coordinaten aufzufassen sind, und  $\psi(x, y)$  eine ganze Function von  $x$  und  $y$  vom Grade  $2n$  vorstellt.

Verlegt man  $P$  in einen der Punkte  $A_0, A_1, \dots, A_p$ , so wird:

$$\psi(x, y) < 0.$$

Beschreibt man um einen willkürlichen Mittelpunkt  $C$  einen Kreis mit dem Radius  $= m + \sqrt[n]{R} + \varepsilon$ , wo unter  $\varepsilon$  eine willkürliche positive Grösse zu verstehen ist, und  $m$  den grössten unter den Abständen des Punktes  $C$  von einem der Punkte  $A_0, A_1, \dots, A_p$  vorstellt, so liegt jeder der letztgenannten Punkte innerhalb dieses Kreises, und die Abstände aller dieser Punkte von jedem in der Peripherie des Kreises liegenden Punkt  $Q$  sind immer grösser als  $\sqrt[n]{R}$ . Legt man daher  $P$  in irgend welchen derartigen Punkt  $Q$ , so erhält man:

$$\psi(x, y) > 0.$$

Aus diesen beiden Ungleichheiten ergiebt sich, auf Grund der Continuität der ganzen Function  $\psi$  für jede reelle und endliche Variation von  $x$  und  $y$ , der Schluss, dass jede beliebige continuirliche Verbindungskurve zwischen dem laufenden Punkt  $Q$  des Kreises und irgend einem der mehrerwähnten

Punkte, z. B. dem Punkte  $A_0$ , zum mindesten einen Punkt enthalten muss, wo

$$\psi(x, y) = 0.$$

Es besteht demgemäß eine stetige, geschlossene Contour rings um  $A_0$ , in welcher die Modulbedingung (3) überall erfüllt ist.

Wenn die hier gefundene Contour nicht noch andere jener Punkte, ausser allein  $A_0$ , umschliesst, so werden jene übrigen Punkte, jeder für sich allein oder mehrere zusammen, von ähnlichen Contouren umgeben sein. Aus dem Umstände, dass  $A_0$  auf einem endlich und stetig begrenzten Theil der Ebene liegt, folgt nun aber jedenfalls, dass der Vectorradius  $AP$ , wenn  $P$  den ganzen Umfang dieser Begrenzung einmal durchwandert, einen Umlauf von der Grösse  $\pm 2\pi$  ausgeführt hat. Das Zeichen hängt ab von der Richtung, in welcher der Umlauf bewerkstelligt ist, und bleibt dasselbe, wo innerhalb der Contour der Punkt  $A_0$  auch liegen mag.

Wir nehmen an, dass die Punkte:

$$A_0, A_1, \dots, A_q, \quad (0 \leq i < p).$$

innerhalb der gleichen Contour liegen, und dass somit die übrigen  $p - q$  Punkte sich ausserhalb der Contour befinden. Wird nun letztere von einem Anfangspunkt  $P_0$  aus einmal in positiver Richtung durchlaufen, so werden die Argumente, welche den von den inneren Punkten ausgehenden Vectorradien entsprechen, je um  $2\pi$  gewachsen sein, während diejenigen, welche den von den äusseren Punkten ausgehenden Vectorradien entsprechen, nach einem gewissen Oscilliren alle wieder zu ihrem Anfangswert zurückgekehrt sein werden. Werden nun alle diese Argumente, die allen den genannten Vectorradien entsprechen und deren Werthe z. B. beim Anfang des Umlaufs  $\geq 0$  und  $< 2\pi$  angesetzt werden können, in das erste Glied der Argumentgleichung (4) eingesetzt, so wird während des Umlaufes dieses Glied continuirlich wachsen um die Grösse:

$$(m_0 + m_1 + \dots + m_q) 2\pi,$$

d. h. die Contour enthält  $m_0 + m_1 + \dots + m_q$  Punkte, welche der Argumentbedingung genügen. Der kleinste Werth, den diese Zahl annehmen kann, ist 1 (nämlich für  $m_0 = 1, q = 0$ ). Also hat die Gleichung wenigstens eine Wurzel; was zu beweisen war.

Durch Betrachtungen von ganz analoger Art, wie die eben angestellten, wobei man nur noch zu berücksichtigen hat, dass die Anzahl der Wurzeln, oder, genauer gesprochen, die Anzahl der linearen Factoren  $n$  nicht überschreiten kann, wird man noch ohne Schwierigkeit die Richtigkeit folgender Sätze einsehen:

1. Während immerhin innerhalb einer Contour mehr als eine Wurzel liegen kann, kann umgekehrt um einen der Punkte  $A_0, A_1, \dots, A_p$  nicht mehr als eine Contour verlaufen.
2. Die Anzahl der Wurzeln auf jeder Contour ist immer gleich der Summe der Multiplicitäten der eingeschlossenen  $A$ -Punkte.
3. Diese Wurzelpunkte theilen die Contour in Bogen, welche von sämtlichen Wurzelpunkten nach derselben Richtung durchlaufen werden, wenn  $\varphi$ , das Argument von  $K$ , um  $2\pi$  wächst. Unter diesen Umständen findet also nur eine circulare Vertauschung der Wurzeln auf derselben Contour statt.
4. Eine Doppelwurzel hat die Gleichung nur dann, wenn die Modulkurve  $\psi(x, y) = 0$  einen gewöhnlichen Knotenpunkt besitzt, in welchem zwei Contouren zu einer sich selbst schneidenden Contour vereinigt sind. Für einen bestimmten Werth von  $\varphi$  werden dann die beiden Wurzeln der beiden Contouren unter dem gleichartigen Umlauf im Knotenpunkte zusammentreffen.

In ganz ähnlicher Weise hätte die ursprüngliche Gleichung auch folgende Gestalt haben können:

$$x' f(x) = \varphi(x),$$

wo  $f(x)$  vom  $(n-t)^{\text{ten}}$ , und  $\varphi(x)$  vom  $(t-1)^{\text{ten}}$  Grad ist. Nehmen wir an, dass hier die Auflösbarkeit der ganzen Function in lineare Factoren für die grössere der beiden Gradzahlen  $n-t$  und  $t-1$  (somit aber auch für die kleinere) oder, wenn  $n-t=t-1$ , für diese Gradzahl nachgewiesen ist, so lässt die Gleichung sich schreiben:

$$x^{m_0}(x-\alpha_1)^{m_1} \dots (x-\alpha_p)^{m_p} = K(x-\beta_1)^{n_1} \dots (x-\beta_q)^{n_q},$$

wo

$$m_0 + m_1 + \dots + m_p = n \quad \text{und} \quad n_1 + n_2 + \dots + n_q = t-1.$$

Man erhält dann:

$$r_0^{m_0} \cdot r_1^{m_1} \cdots r_p^{m_p} = R s_1^{n_1} \cdots s_q^{n_q}$$

und

$$m_0\varphi_0 + m_1\varphi_1 + \cdots + m_p\varphi_p = \phi + 2k\pi + n_1\psi_1 + \cdots + n_q\psi_q.$$

Die Kurve:

$$PA_0^{2m_0} \cdots PA_p^{2m_p} = R^2 \cdot PB_1^{2n_1} \cdots PB_q^{2n_q},$$

(wo  $A_0, \dots, A_p$ , dieselbe Bedeutung haben, wie oben, während  $B_1, \dots, B_q$  in ähnlicher Weise den Wurzeln  $\beta_0, \dots, \beta_q$  entsprechen) besteht jetzt, wie man alsbald übersieht, aus:

1) einer oder mehreren *A-Contouren*, die sämtliche  $A_i$  umschließen, doch so, dass keiner von mehr als einer Contour umgeben ist, und

2) einer oder mehreren *B-Contouren*, welche in dem Fall, wo irgend ein  $B_i$  von irgend einer *A*-Contour umschlossen wird, Enclaven innerhalb der *A*-Contouren bilden und jenes  $B_i$  in solcher Weise umgeben, dass alle *A*-Punkte von allen *B*-Punkten geschieden sind. Kein *B*-Punkt liegt innerhalb mehr als einer *B*-Contour. Die ausserhalb der *A*-Contouren liegenden Punkte  $B_i$  werden nicht von Contouren umschlossen.

Die gesammte Multiplicität der in den Enclaven eingeschlossenen Punkte  $B_i$  betrage  $t'$ , wo also

$$0 = t' \cup t = 1.$$

Beim Umlauf durch alle Contouren gehören dann  $n - t'$  Wurzeln den *A*-Kurven die übrigen  $t'$  den *B*-Kurven. Das Raisonnement ist ein ganz analoges, wie bei dem vorigen Fall, der ja auch nur einen Unterfall des hier behandelten darstellt, bei welchem  $t = 1$ , d. h.  $t' = 0$  geworden ist.

Besonders beachtenswerth ist der Fall

$$n - t = t - 1, \text{ d. h. } n = 2t - 1.$$

Man schliesst hier, dass der Satz für die Gradzahl  $2t - 1$  gilt, weil er für die Gradzahl  $t - 1$  gilt und erweitert denselben in solcher Weise rasch von dem  $4^{\text{ten}}$  Grad auf den  $9^{\text{ten}}$ , den  $19^{\text{ten}}$ , den  $39^{\text{ten}}$  Grad u. s. w.

Die verschiedenen Systeme der Contouren, auf welchen die Wurzeln nach dem hier gesagten sämmtlich liegen müssen, lassen sich, wenn es sich nicht um den Beweis für die Existenz der Gleichungswurzel handelt, ins Unendliche verniehren.

Christiania, 15 Jan. 1886.

---

## ÜBER DIE REDUCTIBLEN ALGEBRAISCHEN CURVEN

VON

M. NOETHER

in ERLANGEN.

Für eine *irreducible* algebraische ebene Curve

$$F(s, z) = 0,$$

von der Gesamtordnung  $n$  und dem Geschlecht  $p$ , gibt es einige fundamentale Schnittpunktsätze, welche sich auf das Verhalten dieser Curve zu ihren adjungirten Curven  $\varphi$  — d. h. zu den Curven  $(n - 3)^{\text{ter}}$  Ordnung, welche jeden  $i$ -fachen Punkt von  $F = 0$  zum  $(i - 1)$ -fachen Punkt haben — beziehen. Diese Sätze sind nichts anderes, als der geometrische Ausdruck für das Verhalten der zu  $F = 0$  gehörigen algebraischen Functionen, insbesondere bezüglich ihrer Constantenzahlen, also vor Allem der Zahl  $p$  der zugehörigen Integranden erster Gattung, deren Zähler jene Formen  $\varphi$  bilden. Nach den rein algebraischen Beweisen, welche sich in der Abhandlung: *Über die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie* von Herrn BRILL und mir<sup>1</sup> finden, ist die Gültigkeit dieser Sätze durch irgend welche singuläre Stellen von  $F = 0$  in keiner Weise beschränkt, vielmehr an die *einzige* Bedingung gebunden, dass das Gebilde  $F = 0$  *irreductibel* sei.

Lässt man nun auch diese Bedingung fallen, so treten, wie ich im Folgenden unter Zugrundelegung der eben bezeichneten Sätze in Abschnitt I zeigen will, bei denselben nur einfache, ebenfalls fest bestimmbare Modificationen ein. Man erhält so auf der einen Seite geometrisch

<sup>1</sup> *Mathematische Annalen*, Bd. 7, 1873.

interessante verschiedenartige *Erweiterungen* der bisher festbegründeten Schnittpunktsätze, als deren einfachste übrigens der sogen. »CAYLEY'sche Satz« erscheint; anderseits aber in der Zahl der adjungirten Formen  $\varphi$  ein *Kriterium für die Irreductibilität von  $F(s, z) = 0$* , ein algebraisch wichtiges Ergebniss, auf welches bereits Herr CHRISTOFFEL aufmerksam gemacht hat.<sup>1</sup> Man kann, wie in I, n° 7 geschehen ist, jene Zahl unmittelbar ableiten; meine Untersuchungen gehen aber viel weiter, indem sie (n° 9—13) die ganze Structur des Systems linearer Gleichungen erforschen, auf welche die Adjunctionsbedingungen der Formen  $\varphi$  führen.

Die erweiterten Schnittpunktsätze verfolge ich in Abschnitt II ganz analog auch für *reducible Raumcurven*. Der speciellste der sich hierbei ergebenden Sätze ist bereits von Herrn VALENTINER mitgetheilt worden;<sup>2</sup> das allgemeinste Resultat dieser Betrachtung aber lässt sich dahin aussprechen, dass für die Schnittpunktbeziehungen zwei Curven einer Fläche nur dann und immer dann als specieller Fall einer irreductiblen Raumcurve anzusehen sind, wenn sie sich in noch wenigstens *einem* Punkte treffen.

# I.

## *Ebene Curven.*

1. Ich nehme zunächst an, dass die gegebene Curve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung

$$F = 0$$

in zwei Curven

$$F^{(1)} = 0, \quad F^{(2)} = 0,$$

bez. von den Ordnungen  $n_1$  und  $n_2$ , wo  $n_1 + n_2 = n$ , zerfalle, welche sich in  $n_1 n_2$  *einfachen* Punkten treffen.

Die Curve  $F = 0$  hat dann diese  $n_1 n_2$  Punkte zu gewöhnlichen Doppelpunkten; die zu  $F = 0$  adjungirten Curven  $\varphi_{n-3}$ , von der  $(n - 3)^{\text{ten}}$

<sup>1</sup> In seinem Aufsatze: *Algebraischer Beweis des Satzes von der Anzahl der linear-unabhängigen Integrale erster Gattung*, Annali di Matematica, Ser. III, t. IX, p. 95.

<sup>2</sup> Zur Theorie der Raumcurven, dieses Journal, Bd. 2, p. 199.

Ordnung, müssen also durch diesen vollständigen Schnitt von  $F^{(1)}$  und  $F^{(2)}$  einfach hindurchgehen, was bekanntlich<sup>1</sup> zur Relation führt:

$$(1) \quad \varphi_{n-3} \equiv \varphi_{n_2-3} \cdot F^{(1)} + \varphi_{n_1-3} \cdot F^{(2)}.$$

In dieser Relation werden die  $\varphi_{n_1-3}$  zu  $F^{(1)}$  adjungirte Curven  $\varphi$ , von der  $(n_1 - 3)^{\text{ten}}$  Ordnung; die  $\varphi_{n_2-3}$  zu  $F^{(2)}$  adjungirte Curven  $\varphi$ , von der  $(n_2 - 3)^{\text{ten}}$  Ordnung. Es folgt also aus (1):

(A) *dass die zu  $F$  adjungirten Curven  $\varphi$  auch jede der beiden Theilcurven von  $F$  in denselben Punktgruppen schneiden, in welchen dieselben von den zu ihnen selbst adjungirten Curven  $\varphi$  getroffen werden.*

Ferner ergibt sich die Zahl der noch willkürlichen Parameter von  $\varphi_{n-3}$  aus (1). Es mögen die vielfachen Punkte von  $F^{(1)}$  noch  $\delta_1$  Constanten von  $\varphi_{n_1-3}$ , die von  $F^{(2)}$  noch  $\delta_2$  Constanten von  $\varphi_{n_2-3}$  absorbiren; so bleiben in  $\varphi_{n-3}$  noch

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(n_1 - 1)(n_1 - 2) - \delta_1 + \frac{1}{2}(n_2 - 1)(n_2 - 2) - \delta_2 \\ & = \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) - \delta_1 - \delta_2 - (n_1 n_2 - 1) \end{aligned}$$

Constanten, d. h.:

(B) *für die zu  $F$  adjungirten Curven  $\varphi$  stellt die Forderung, durch diejenigen  $n_1 n_2$  Doppelpunkte von  $F$  zu gehen, welche die einfachen Schnittpunkte der beiden Theilcurven von  $F$  sind, nur  $n_1 n_2 - 1$  linear-unabhängige Bedingungen vor.*

Man kann noch hinzufügen:

(C) *dass irgend eine der  $n_1 n_2$  Bedingungen für die  $\varphi$  eine lineare Folge der  $n_1 n_2 - 1$  übrigen Bedingungen wird.*

Denn die Curven  $\varphi_{n-3}$ , welche durch  $n_1 n_2 - 1$  der  $n_1 n_2$  Punkte gelegt werden, schneiden  $F^{(1)} = 0$  in einer Gruppenschaar, unter welchen Gruppen sich nach (1) auch jedenfalls eine solche befindet, die aus dem letzten der  $n_1 n_2$  Punkte,  $a$ , und aus einer von einer  $\varphi_{n_1-3}$  ausgeschnittenen Gruppe besteht. Diese specielle,  $a$  enthaltende Gruppe kann aus  $F^{(1)} = 0$  auch durch eine zu  $F^{(1)}$  adjungirte Curve  $(n_2 - 2)^{\text{ter}}$  Ordnung ausgeschnitten werden, bestehend aus jener  $\varphi_{n_1-3}$  und einer beliebigen Geraden

<sup>1</sup> Vgl. etwa meine Note *Über einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen* in Mathematischen Annalen, Bd. 6.

durch  $a$ , welche  $F^{(1)}$  noch in  $a_1, a_2, \dots, a_{n_1-1}$  treffen möge. Nach dem bekannten »Restsatzes«<sup>1</sup> wird daher die ganze obige Gruppenschaar von den zu  $F^{(1)}$  adjungirten durch  $a_1, \dots, a_{n_1-1}$  gehenden Curven  $(n_1 - 2)^{\text{ter}}$  Ordnung ausgeschnitten. Da diese aber alle die Gerade durch  $a_1, \dots, a_{n_1-1}$ , welche auch durch  $a$  geht, zur Theilcurve haben, ist  $a$  in allen Gruppen der Schaar enthalten, wie zu bewiesen war.

Der Satz (C) ist nichts weiter, als ein specieller Fall des sogenannten »CAYLEY'schen Schnittpunktsatzes« für die durch die  $n_1 n_2$  Punkte gehenden Curven  $r^{\text{ter}}$  Ordnung, nämlich für  $r = n_1 + n_2 - 3$ ; also gerade der einzige *ausnahmslos* gültige Fall dieses Satzes.<sup>2</sup>

2. Die Annahme von  $n^\circ 1$  sei nun dahin erweitert, dass die Schnittpunkte der beiden Theilcurven  $n_1^{\text{ter}}$  und  $n_2^{\text{ter}}$  Ordnung,  $F^{(1)}$  und  $F^{(2)}$ , aus denen die gegebene Curve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung,  $F$ , besteht, auch *vielfache* Punkte der Theilcurven sein können, ohne dass jedoch  $F$  *vielfache* Curven als Theilcurven enthielte; dass nämlich ein solcher Schnittpunkt, der  $\alpha_1$ -facher Punkt von  $F^{(1)}$  ist, zugleich  $\alpha_2$ -facher Punkt von  $F^{(2)}$  sei, wo also

$$\sum \alpha_1 \alpha_2 = n_1 n_2$$

wird.

Da die Curve  $F$  einen solchen Punkt dann zum  $(\alpha_1 + \alpha_2)$ -fachen Punkt hat, werden die zu  $F$  adjungirten Curven denselben zum  $(\alpha_1 + \alpha_2 - 1)$ -fachen Punkt haben müssen. Nach dem oben citirten Satze aus Mathematischen Annalen, Bd. 6, besteht dabei die Relation (1) für die zu  $F$  adjungirten  $\varphi_{n-3}$  noch immer, und es werden die  $\varphi_{n_1-3}$  und  $\varphi_{n_2-3}$  zu Curven, welche auch jenen Schnittpunkt zum  $(\alpha_1 - 1)$ -, bez. zum  $(\alpha_2 - 1)$ -fachen Punkt besitzen, also zu  $F^{(1)}$ , bez. zu  $F^{(2)}$  adjungirte Curven  $\varphi$ . D. h.

(A') der Satz (A),  $n^\circ 1$ , gilt auch hier.

Wenn ferner die *ausserhalb* der Schnittpunkte von  $F^{(1)}$  mit  $F^{(2)}$  liegenden vielfachen Punkte von  $F^{(1)}$  noch  $\delta_1$  Constanten von  $\varphi_{n_1-3}$ , die

<sup>1</sup> Vgl. die in der Einleitung citirte Abhandlung, Mathematische Annalen, Bd. 7, p. 271 etc.

<sup>2</sup> Vgl. für den allgemeineren Satz und dessen Beweis: BACHARACH, Über den Cayley'schen Schnittpunktsatz, Mathematische Annalen, Bd. 26.

von  $F^{(2)}$  noch  $\delta_2$  Constanten von  $\varphi_{n-3}$  absorbiren, bleiben in  $\varphi_{n-3}$  hier noch, wenn zugleich  $F^{(1)}$  und  $F^{(2)}$  irreductibel sind:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(n_1 - 1)(n_1 - 2) - \sum \frac{1}{2}(\alpha_1 - 1)\alpha_1 - \delta_1 \\ & + \frac{1}{2}(n_2 - 1)(n_2 - 2) - \sum \frac{1}{2}(\alpha_2 - 1)\alpha_2 - \delta_2 \\ = & \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) - \delta_1 - \delta_2 - \sum \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - 1)(\alpha_1 + \alpha_2) + 1 \end{aligned}$$

willkürliche Constanten; d. h.

(B') die  $\sum \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - 1)(\alpha_1 + \alpha_2)$  linearen Bedingungsgleichungen, welche aussagen, dass die Curven  $\varphi_{n-3}$  in den Schnittpunkten der beiden irreductiblen Curven  $F^{(1)}$  und  $F^{(2)}$  sich wie zu  $F$  adjungirte Curven verhalten, stellen für die Coefficienten der  $\varphi_{n-3}$  genau

$$\sum \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - 1)(\alpha_1 + \alpha_2) = 1$$

linear-unabhängige Bedingungen vor.

Dagegen gilt hier nicht mehr, dass *irgend* eine dieser Bedingungsgleichungen Folge der übrigen wird; wie in n° 3 untersucht werden wird.

Der Satz (B') soll noch anders ausgesprochen werden. Sei das Geschlecht von  $F^{(1)}$  und  $F^{(2)}$  bez. mit  $p_1$  und  $p_2$  bezeichnet, so ist

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2}(n_1 - 1)(n_1 - 2) - \delta_1 - \sum \frac{1}{2}\alpha_1(\alpha_1 - 1) \\ p_2 &= \frac{1}{2}(n_2 - 1)(n_2 - 2) - \delta_2 - \sum \frac{1}{2}\alpha_2(\alpha_2 - 1), \end{aligned}$$

wo, nach dem Satze über die Anzahl der zu irreductiblen Curven adjungirten Curven  $\varphi$ ,  $\delta_1$ , bez.  $\delta_2$ , auch die Anzahl der ausserhalb der Schnittpunkte von  $F^{(1)}$  mit  $F^{(2)}$  liegenden Doppelpunkte von  $F^{(1)}$ , bez.  $F^{(2)}$ , bedeutet. Definiert man jetzt das *Geschlecht p der reductiblen Curve F* aus der Ordnung und den Zahlen für die vielfachen Punkte von  $F$  mittels der Formel

$$p = \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) - (\delta_1 + \delta_2) - \sum \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2 - 1),$$

so wird die Anzahl der zu  $F$  adjungirten linear-unabhängigen Curven  $\phi_{n-3}$  zu

$$p_1 + p_2 = p + 1.$$

3. Indem ich dieselbe Annahme, wie in n° 2, noch einmal mache, gehe ich zunächst zu einer anderen Erweiterung von n° 1 über.

Ich betrachte hier nicht sogleich die zu  $F$  adjungirten Curven, sondern diejenigen Curven  $\phi_{n-3}$  von der  $(n - 3)^{\text{ten}}$  Ordnung, welche nur die zur Existenz einer Relation

$$(2) \quad \phi_{n-3} \equiv \phi_{n_2-3} \cdot F^{(1)} + \phi_{n_1-3} \cdot F^{(2)}$$

— wo die  $\phi_{n_1-3}$  und  $\phi_{n_2-3}$  ganze Functionen der Coordinaten werden — nothwendigen und hinreichenden Eigenschaften besitzen. Diese Eigenschaften beziehen sich, nach dem allgemeinen Satze, welchen ich in der oben citirten Note, Mathematische Annalen, Bd. 6, aufgestellt habe, allein auf das Verhalten der Curven  $\phi_{n-3}$  in den Schnittpunkten von  $F^{(1)}$  mit  $F^{(2)}$ ; und zwar liefert dieser Satz im Ganzen

$$\sum \alpha_1 \alpha_2 = n_1 n_2$$

lineare Bedingungsgleichungen für die Coefficienten von  $\phi_{n-3}$ , also genau ebensoviele, als ob die Schnittpunkte von  $F^{(1)}$  und  $F^{(2)}$  lauter getrennte einfache wären.

Diese Bedingungsgleichungen sind also nur ein Theil der in n° 2, (B') genannten, und zwar treten in jener Nummer noch

$$\sum \frac{1}{2} \alpha_1 (\alpha_1 - 1) + \sum \frac{1}{2} \alpha_2 (\alpha_2 - 1)$$

Gleichungen hinzu, welche nur aussagen, dass die Curve  $\phi_{n_1-3}$  in einem Schnittpunkt von  $F^{(1)}$ ,  $F^{(2)}$ , der  $\alpha_1$ -facher Punkt von  $F^{(1)}$  ist, weiter einen  $(\alpha_1 - 1)$ -fachen Punkt erhalten soll, und das Analoge für  $\phi_{n_2-3}$ .

Für die Anzahl der in  $\phi_{n-3}$  nach (2) noch willkürlich bleibenden Constanten gilt aber genau die Betrachtang von n° 1, welche zu (B) führte; d. h.

(B'') die  $\sum \alpha_1 \alpha_2 = n_1 n_2$  Bedingungsgleichungen, welche aussagen, dass für

die Curven  $\phi_{n-3}$  die Relation (2) besteht, stellen für die Coefficienten der  $\phi_{n-3}$  nur

$$n_1 n_2 - 1$$

linear-unabhängige Bedingungen vor.

Der Satz (C) kann dagegen hier natürlich nicht mehr ohne Modification erweitert werden. Da aber (C) bei getrennter Lage der Schnittpunkte ausnahmslos gilt, so hat man nur  $n^o 3$  als Grenzfall von  $n^o 1$  aufzufassen, um die eintretende Modification sogleich zu erkennen. Wenn nämlich  $\alpha_1 \alpha_2$  Schnittpunkte von  $F^{(1)}, F^{(2)}$  in einen Punkt  $P$  zusammenrücken, so erhält man für  $\phi_{n-3}$  hiervon herrührend  $\alpha_1 \alpha_2$  Bedingungen, welche sich auf die Coefficienten der Glieder  $\sigma^{\text{ter}}, \tau^{\text{ter}}, \dots, \rho^{\text{ter}}$  Dimension von  $\phi_{n-3}$  in  $P$  vertheilen; und die letzte der so geordneten  $\alpha_1 \alpha_2$  Bedingungen wird immer eine lineare Folge der  $n_1 n_2 - 1$  übrigen Bedingungen.

Der Vergleich der Sätze (B') und (B'') ergibt daher, dass die *eine* in (B') angegebene Beziehung zwischen den dortigen Bedingungsgleichungen nur zwischen dem Theil von  $\sum \alpha_1 \alpha_2$  Gleichungen auftritt, der auch in (B'') eingeht; während die übrigen  $\frac{1}{2} \sum \alpha_1 (\alpha_1 - 1) + \frac{1}{2} \sum \alpha_2 (\alpha_2 - 1)$  Gleichungen in (B') sowohl unter sich, als von den genannten  $\sum \alpha_1 \alpha_2$  Gleichungen linear-unabhängig sind.

4. Wie in  $n^o 3$  der erste Fall des CAYLEY'schen Satzes,  $r = n_1 + n_2 - 3$ , (vgl. den Schluss von  $n^o 1$ ) auf Curven  $F^{(1)}, F^{(2)}$  mit Schnittpunkten von vielfacher Multiplicität erweitert ist, so kann man auch für die Curven der Ordnung  $r = n_1 + n_2 - 2 - h$ ,  $\phi_{n_1+n_2-2-h}$ , überhaupt nach der oben citirten Note, Mathematische Annalen, Bd. 6, den Satz aussprechen:

*Für die Curven  $(n_1 + n_2 - 2 - h)^{\text{ter}}$  Ordnung liefert die Forderung, in der Form*

$$\phi_{n_1+n_2-2-h} \equiv \phi_{n_2-2-h} \cdot F^{(1)} + \phi_{n_1-2-h} \cdot F^{(2)}$$

*darstellbar zu sein, bei beliebiger Multiplicität der Schnittpunkte von  $F^{(1)}$  und  $F^{(2)}$ ,  $n_1 n_2$  Bedingungsgleichungen, von denen aber für*

$$0 \leqq h \leqq n_1 \leqq n_2$$

*mir*

$$n_1 n_2 - \frac{1}{2} h(h+1)$$

*von einander linear-unabhängig sind.*

Da aber schon bei einfachen Schnittpunkten nicht mehr irgend welche  $\frac{1}{2}h(h+1)$  der  $n_1n_2$  Gleichungen Folge der übrigen zu sein brauchen,<sup>1</sup> so wird dies auch hier im Allgemeinen nicht eintreten; es ergibt sich das Verhalten nur wieder als Grenzfall des einfachen Falles.

In n° 3 und n° 4 waren die Theilecurven  $F^{(1)}$  und  $F^{(2)}$  nicht als irreductibel vorausgesetzt. Sollen die Curven  $(n_1 + n_2 - 2 - h)^{\text{ter}}$  Ordnung auch noch die weitere Eigenschaft haben, zur Curve  $F^{(1)}, F^{(2)}$  adjungirt zu sein, so existirt für  $h > 1$  kein immer gültiger Satz mehr, welcher als Erweiterung von n° 2 (B') zu betrachten wäre.

5. In dem Satz (B') von n° 2 war vorausgesetzt, dass die Theilecurven  $F^{(1)}$  und  $F^{(2)}$  der Curve  $F$  irreductibel seien. Wenn man also die Curve  $F^{(2)}$  ersetzt durch zwei Curven  $F^{(2)}, F^{(3)}$  von den Ordnungen  $n_2, n_3$ , so gibt (B') zunächst nur, dass zwischen den Bedingungsgleichungen (B'), die sich auf den Schnitt von  $F^{(1)}$  mit der Curve  $(F^{(2)}F^{(3)})$  beziehen, *mindestens eine* Relation besteht. Man kann aber jetzt die Forderung der n° 2 dahin erweitern, dass die Curven  $\varphi_{n_2+n_3}$  in allen gegenseitigen Schnittpunkten der drei Curven  $F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)}$  sich zu

$$F = (F^{(1)}F^{(2)}F^{(3)})$$

adjungirt verhalten sollen.

Man hat hier nach n° 2:

$$\varphi_{n_2+n_3} \equiv \varphi_{n_2+n_3-3} \cdot F^{(1)} + \varphi_{n_1-3} \cdot F^{(2)}F^{(3)},$$

wo die  $\varphi_{n_2+n_3-3}$  zunächst nur in den Schnittpunkten von  $(F^{(2)}F^{(3)})$  mit  $F^{(1)}$  zu  $(F^{(2)}F^{(3)})$  adjungirt waren. Sollen nun die  $\varphi_{n_2+n_3-3}$  auch im Schnitt von  $F^{(2)}$  mit  $F^{(3)}$  zu  $F$  adjungirt werden, so überträgt sich diese Forderung auf die  $\varphi_{n_2+n_3-3}$ .

Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden. Wenn erstens gar kein weiterer Schnittpunkt von  $F^{(2)}$  mit  $F^{(3)}$  ausserhalb der schon betrachteten Schnittpunkte von  $F^{(1)}$  mit  $(F^{(2)}F^{(3)})$  liegen sollte, so entsteht auch keine weitere Bedingungsgleichung für die  $\varphi_{n_2+n_3-3}$ . Wenn zweitens solche weiteren Schnittpunkte existiren, so liefert dies eine Anzahl weiterer Bedingungsgleichungen für die  $\varphi_{n_2+n_3-3}$ , von denen nach n° 2 und n° 3 wieder

<sup>1</sup> Die genaue Bestimmung findet sich in der oben cit. Abhandlung von H. BACHARACH.

wenigstens eine eine lineare Folge aller für die  $\varphi_{n_1+n_2+n_3-3}$  gegebenen übrigen Bedingungsgleichungen wird.

Nach Erfüllung dieser Bedingungsgleichungen schreibt sich nun, da für  $\varphi_{n_1+n_2+n_3-3}$  in Bezug auf  $I^{(2)}$  und  $I^{(3)}$  die Form gilt

$$\varphi_{n_1+n_2+n_3-3} \equiv \varphi_{n_3-3} \cdot I^{(2)} + \varphi_{n_2-3} \cdot I^{(3)},$$

$\varphi_{n-3}$  in der Form:

$$\varphi_{n-3} \equiv \varphi_{n_1-3} \cdot I^{(2)} I^{(3)} + \varphi_{n_2-3} \cdot I^{(1)} I^{(3)} + \varphi_{n_3-3} \cdot I^{(1)} I^{(2)},$$

wo die  $\varphi_{n_i-3}$  nur die Bedingung zu erfüllen haben, zu  $I^{(i)}$  adjungirt zu sein. Waren also  $I^{(1)}$ ,  $I^{(2)}$ ,  $I^{(3)}$  irreducible Curven, so bleiben in  $\varphi_{n-3}$  noch

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(n_1 - 1)(n_1 - 2) + \frac{1}{2}(n_2 - 1)(n_2 - 2) + \frac{1}{2}(n_3 - 1)(n_3 - 2) \\ & - \frac{1}{2} \sum \alpha_1(\alpha_1 - 1) - \frac{1}{2} \sum \alpha_2(\alpha_2 - 1) - \frac{1}{2} \sum \alpha_3(\alpha_3 - 1) \\ & = \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) - \frac{1}{2} \sum (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1) + 2 \end{aligned}$$

willkürliche Constanten. Dabei beziehen sich die Summen auf alle Punkte der Curven  $I^{(1)}$ ,  $I^{(2)}$ ,  $I^{(3)}$ , die für dieselben zugleich bez.  $\alpha_1$ -,  $\alpha_2$ -,  $\alpha_3$ -fach sind, wo aber eine oder zwei der Zahlen  $\alpha$  auch = 0 sein können; wo also:

$$\sum \alpha_2 \alpha_3 = n_2 n_3, \quad \sum \alpha_1 \alpha_3 = n_1 n_3, \quad \sum \alpha_1 \alpha_2 = n_1 n_2.$$

D. h.

(B'') Die  $\frac{1}{2} \sum (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1)$  Bedingungsgleichungen für die  $\varphi_{n-3}$ , welche aussagen, dass diese Curven zu der aus drei irreduciblen Curven bestehenden Curve  $I$  adjungirt seien, stellen genau

$$\frac{1}{2} \sum (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1) = 2$$

linear-unabhängige Bedingungen für die  $\varphi_{n-3}$  vor.

Da somit nur zwei der Gleichungen lineare Folge der übrigen werden, so bestimmen sich auch die oben unterschiedenen beiden Fälle genauer:

(C'') Die Forderung für die  $\varphi_{n-3}$ , in den Schnittpunkten von  $I^{(1)}$  mit

$(F^{(2)}F^{(3)})$  sich zu  $F = (F^{(1)}F^{(2)}F^{(3)})$  adjungirt zu verhalten, liefert ein System von Gleichungen, zwischen welchen, wenn  $F^{(1)}$ ,  $F^{(2)}$ ,  $F^{(3)}$  irreductibel sind, eine oder zwei lineare Relationen bestehen, je nachdem die Curven  $F^{(2)}$  und  $F^{(3)}$  sich ausserhalb des Schnittes von  $F^{(1)}$  mit  $(F^{(2)}F^{(3)})$  noch weiter schneiden oder nicht. Im ersten Falle besteht zwischen diesen Gleichungen und den Gleichungen, welche aussagen, dass  $\varphi_{n-3}$  auch in dem weiteren Schnitt von  $F^{(2)}$  mit  $F^{(3)}$  zu  $F$  adjungirt sei, noch eine weitere Relation.

Waren  $F^{(1)}$ ,  $F^{(2)}$ ,  $F^{(3)}$  nicht alle irreductibel, so könnten mehr als zwei Relationen zwischen den Bedingungsgleichungen entstehen.

Definiert man wieder das Geschlecht von  $F$  durch

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \frac{1}{2}\sum(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1)$$

so wird, wenn mit  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  das Geschlecht bez. der irreductiblen Curven  $F^{(1)}$ ,  $F^{(2)}$ ,  $F^{(3)}$  bezeichnet wird:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 - 2.$$

6. Ich werde jetzt auch n° 3 auf 3 Curven  $F^{(1)}$ ,  $F^{(2)}$ ,  $F^{(3)}$  der Ordnungen  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$ , erweitern, um zu zeigen, dass die in n° 5 aufgefundenen beiden Relationen auch schon zwischen einem gewissen Theil der Gleichungen von n° 5 bestehen; wodurch sich übrigens nochmals ein Beweis der Sätze von n° 5 ergibt. Hierbei können  $F^{(1)}$ ,  $F^{(2)}$ ,  $F^{(3)}$  zunächst auch reductibel sein.

Wenn man den Curven  $(n-2)^{\text{ter}}$  Ordnung,  $\psi_{n-3}$ , nur die Bedingung auferlegen will, in der Form

$$\psi_{n-3} \equiv \psi_{n_1-3} \cdot F^{(2)}F^{(3)} + \psi_{n_2-3} \cdot F^{(1)}F^{(3)} + \psi_{n_3-3} \cdot F^{(1)}F^{(2)}$$

darstellbar zu sein, wo die  $\psi_{n_i-3}$  beliebige ganze Functionen  $(n_i-3)^{\text{ter}}$  Dimension sein dürfen, so hat man  $\psi_{n-3}$  zunächst in die Form zu setzen

$$\psi_{n-3} \equiv \psi_{n_1-3} \cdot F^{(2)}F^{(3)} + \psi_{n_2+n_3-3} \cdot F^{(1)},$$

was nach n° 3 im Ganzen  $n_1(n_2 + n_3)$  Bedingungsgleichungen liefert, zwischen welchen genau eine lineare Relation besteht. Sodann hat man noch  $\psi_{n_2+n_3-3}$  in die Form zu setzen:

$$\psi_{n_2+n_3-3} \equiv \psi_{n_2-3} \cdot F^{(3)} + \psi_{n_3-3} \cdot F^{(2)},$$

was nach  $n^o\ 3$  wiederum  $n_2 n_3$  Gleichungen mit *einer* linearen Relation liefert.

Um nun von hier den Übergang auf die Forderung von  $n^o\ 5$  zu machen, hat man den Curven  $\phi_{n_1-3}$  nur noch die weiteren Bedingungen aufzuerlegen, bez. zu  $I'$  adjungirt zu sein. Dies letztere führt aber, sobald  $I'^{(1)}, I'^{(2)}, I'^{(3)}$  irreductibel sind, zu ebensovielen linear-unabhängigen Bedingungen, als Bedingungsgleichungen; wodurch der Satz (B''), von  $n^o\ 5$  von Neuem bewiesen ist. Aber während in dieser Nummer die beiden angeführten Schritte zu *je einer* Relation führen, wird, wenn die Schnittpunkte von  $I'^{(2)}$  und  $I'^{(3)}$  *alle* in die Schnittpunkte von  $I'^{(1)}$  mit  $(I'^{(2)} I'^{(3)})$  hineinfallen, der zweite Schritt von  $n^o\ 6$  durch die in  $n^o\ 5$  verlangte Bedingung, dass die  $\phi_{n_2+n_3-3}$  in diesen letzteren Punkten zu  $I'$  adjungirt seien, ersetzt. Dies gibt den Satz (C'').

7. Den Satz (B'') von  $n^o\ 5$  kann man unmittelbar auf den Fall ausdehnen, dass die gegebene Curve  $n^{ter}$  Ordnung,  $I'$ , in  $s$  *irreducible* Curven

$$I'^{(1)}, I'^{(2)}, \dots, I'^{(s)},$$

bez. der Ordnungen  $n_1, n_2, \dots, n_s$ , zerfällt.

Die Ordnungen der Vielfachheit desselben Punktes für die verschiedenen Curven  $I'^{(i)}$  bezeichne ich bez. mit  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ; wobei auch irgend welche dieser Zahlen  $\equiv 0$  sein können. Die Summenzeichen in den nachfolgenden Formeln beziehen sich auf *alle* Punkte von  $I'^{(1)}, \dots, I'^{(s)}$ , so dass

$$\sum \alpha_1 \alpha_2 = n_1 n_2, \dots, \sum \alpha_{s-1} \alpha_s = n_{s-1} n_s.$$

Die Curven  $(n-3)^{ter}$  Ordnung, welche zu

$$I' = (I'^{(1)} I'^{(2)} \dots I'^{(s)})$$

adjungirt sind, also jeden Punkt, der  $\alpha_i$ -facher Punkt von  $I'^{(i)}$  ist ( $i = 1, 2, \dots, s$ ), zum  $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s - 1)$ -fachen Punkt haben, lassen sich in die Form setzen:

$$(3) \quad \varphi_{n-3} \equiv \varphi_{n_1-3} \cdot \frac{I'}{I'_1} + \varphi_{n_2-3} \cdot \frac{I'}{I'_2} + \dots + \varphi_{n_s-3} \cdot \frac{I'}{I'_s},$$

wo  $\varphi_{n_i-3}$  eine zu  $F^{(i)}$  adjungirte Curve  $(n_i - 3)^{\text{ter}}$  Ordnung vorstellt. Denn sie sind zunächst von der Form

$$\varphi_{n_1-3} \cdot \frac{F'}{F'_1} + \varphi_{n_2+n_3+\dots+n_s-3} \cdot F'_1,$$

wo  $\varphi_{n_1-3}$  zu  $F_1$ ,  $\varphi_{n_2+\dots+n_s-3}$  zu  $\frac{F}{F_1} \equiv (F_2 F_3 \dots F_s)$  adjungirt sind; die letzteren wieder von der Form

$$\varphi_{n_2+n_3+\dots+n_s-3} = \varphi_{n_2-3} \cdot \frac{F}{F_1 F_2} + \varphi_{n_3+\dots+n_s-3} \cdot F_2$$

etc., etc.

Nun existieren in (3) noch

$$\frac{1}{2}(n_1 - 1)(n_2 - 2) - \frac{1}{2} \sum \alpha_1(\alpha_1 - 1) + \frac{1}{2}(n_2 - 1)(n_2 - 2) - \frac{1}{2} \sum \alpha_2(\alpha_2 - 1)$$

$$+ \frac{1}{2}(n_s - 1)(n_s - 2) - \frac{1}{2} \sum a_s(a_s - 1)$$

$$= \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \frac{1}{2}\sum(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s)(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s - 1) + s - 1$$

willkürliche Constanten; d. h.

(B<sup>IV</sup>) die

$$k = \frac{1}{2} \sum (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s)(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s - 1)$$

Bedingungsgleichungen für die  $\varphi_{n-3}$ , welche aussagen, dass diese Curven zu der aus  $s$  irreductiblen Curven bestehenden Curve  $F$  adjungirt seien, stellen genau

$$k - s + 1$$

linear-unabhängige Bedingungen für die  $\varphi_{n-3}$  vor.

Oder es wird, wenn man die Geschlechtszahlen von  $I^r$ ,  $F^{(r)}$  durch

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - k,$$

$$p_i = \frac{1}{2}(n_i - 1)(n_i - 2) - \frac{1}{2} \sum \alpha_i(\alpha_i - 1)$$

definiert, die Zahl der zu  $F$  adjungirten linear-unabhängigen Curven  $(n - 3)^{\text{ter}}$  Ordnung<sup>1</sup>

$$= p_1 + p_2 + \dots + p_s = p + s - 1.$$

Würden  $F^{(1)}, \dots, F^{(s)}$  nicht an die Bedingung der Irreductibilität gebunden, so könnte die Zahl der unabhängigen Bedingungen für  $\varphi_{n-3}$ , zu  $F^{(i)}$  adjungirt zu sein, eine kleinere werden, als  $\frac{1}{2} \sum \alpha_i (\alpha_i - 1)$ , also könnten die  $k$  Gleichungen von (B<sup>IV</sup>) dann auch weniger als  $k - s + 1$  linear-unabhängige vorstellen.

8. Der Satz von n° 7, in welchem nur vorausgesetzt ist, dass  $F$  keinen *mehrfaichen* Factor hat, kann als ein Kriterium der Irreductibilität für die gegebene Curve  $F$  dienen. Denn aus der gegebenen Gleichung  $F = \circ$  kann man durch nur rationale Operationen sowohl die oben definirte Zahl  $p$ , als die Zahl  $p + s - 1$  der zu  $F$  adjungirten Curven  $\varphi_{n-3}$  finden;<sup>2</sup> also auch  $s$ . Den Fall mit mehrfachen Factoren kann man aber auf den hier vorausgesetzten einfach zurückführen.

9. Der »RIEMANN-ROCH'sche Satz« für eine irreducible Curve  $F$ , von der Ordnung  $n$  und Geschlecht  $p$  — nach welchem eine auf  $F$  liegende lineare Schaar von Gruppen von je  $Q$  Punkten eine Mannigfaltigkeit  $q = Q - p + r + 1$  hat, wenn  $r + 1$  linear-unabhängige zu  $F$  adjungirte Curven  $(n - 3)^{\text{ter}}$  Ordnung durch jede Gruppe der Schaar gehen (auch für  $r = -1$  gültig) — lässt sich auch auf die reducible Curve  $F \equiv (F^{(1)} \dots F^{(s)})$  von n° 7 erweitern.

Jede der  $\infty^{p+s-2}$  zu  $F$  adjungirten Curven  $\varphi_{n-3}$  schneidet die Curve  $F = \circ$ , wenn man von den unendlich vielen Punkten, nämlich Theilcurven von  $F$ , enthaltenden Gruppen absieht, in einem System von  $s$  Theilgruppen von je  $2p_i - 2$  Punkten, also in einem System von

$$2(p_1 - 1) + 2(p_2 - 1) + \dots + 2(p_s - 1) = 2p - 2$$

Punkten. Aber die ganze Schaar dieser Gruppensysteme erhält man, indem man aus jeder der  $s$  linearen  $\infty^{n-1}$ -Theilschaaren je eine Gruppe

<sup>1</sup> Diesen Satz hat H. CHRISTOFFEL in der in der Einleitung eitirten Arbeit entwickelt.

<sup>2</sup> Siehe meine Abhandlung: *Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen*, Mathematische Annalen, Bd. 23.

nimmt; die Systemschaar selbst ist also *nicht* linear und hat nur die Mannigfaltigkeit

$$(p_1 - 1) + (p_2 - 1) + \dots + (p_s - 1) = p - 1.$$

Es möge eine zu  $F$  adjungirte  $\varphi_{n-3}$  die Curven  $F^{(1)}, \dots, F^{(s)}$  in Punktgruppen von bez.  $2p_1 - 2, \dots, 2p_s - 2$  Punkten treffen, welche man alle in je zwei Theile, von bez.

$$Q_1 \text{ und } R_1, \dots, Q_s \text{ und } R_s$$

Punkten getheilt habe; so dass

$$Q_i + R_i = 2p_i - 2.$$

Die Gesamtheit der Curven  $\varphi_{n-3}$ , an Zahl  $\infty^r$ , welche durch  $R_1, R_2, \dots, R_s$  gelegt werden, mögen ferner  $F^{(i)}$  in einer  $\infty^{r_i}$ -Schaar von Gruppen von je  $Q_i$  Punkten treffen; die Curven  $\varphi_{n-3}$ , an Zahl  $\infty^r$ , welche durch  $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$  gelegt werden, ebenso  $F^{(i)}$  in einer  $\infty^{r_i}$ -Schaar von Gruppen von je  $R_i$  Punkten treffen. Aber die Curven  $\varphi_{n-3}$  treffen, nach Gleichung (3), die Theilcurve  $F^{(i)}$  so wie die zu  $F^{(i)}$  adjungirten Curven  $\varphi_{n-3}$ ; daher gibt der genannte RIEMANN-Roch'sche Satz für die  $F^{(i)}$ :

$$q_i = Q_i - p_i + r_i + 1,$$

oder

$$Q_i - R_i = 2(q_i - r_i).$$

Ferner sind nach (3):

$$q + 1 = (q_1 + 1) + (q_2 + 1) + \dots + (q_s + 1),$$

$$r + 1 = (r_1 + 1) + (r_2 + 1) + \dots + (r_s + 1);$$

somit, indem man

$$Q_1 + Q_2 + \dots + Q_s = Q,$$

$$R_1 + R_2 + \dots + R_s = R$$

also

$$Q + R = 2p - 2$$

setzt:

$$Q - R = 2(q - r)$$

$$q = Q - p + r + 1.$$

Dies ist genau die Form, welche der RIEMANN-Roch'sche Satz auch für  $s = 1$  hat; nur beziehen sich hier  $q$  und  $r$  auf die adjungirten Curven  $\varphi_{n-3}$ , nicht auf die Mannigfaltigkeit der von denselben ausgeschnittenen Punktsysteme. Diese Mannigfaltigkeit ergibt sich, wenn nur die aus einer *endlichen* Zahl von Punkten bestehenden Systeme beachtet werden sollen, bez. zu

$$q - s + 1 = q', \quad r - s + 1 = r',$$

und auch dafür gilt:

$$q' = Q - p + r' + 1.$$

10. Um die gegenseitige Abhängigkeit der  $k$  linearen Gleichungen von (B<sup>IV</sup>), n° 7, vollständiger zu erforschen, mögen nun auch die Betrachtungen von n° 3 und n° 6 auf eine aus  $s$  Curven

$$F^{(1)}, F^{(2)}, \dots, F^{(s)},$$

welche auch reductibel sein dürfen, bestehende Curve  $F$  ausgedehnt werden.

Sollen die Curven  $\psi_{n-3}$ , von der  $(n-3)^{\text{ter}}$  Ordnung, die Form annehmen:

$$\psi_{n-3} \equiv \psi_{n_1-3} \cdot \frac{F}{F^{(1)}} + \psi_{n_2-3} \cdot \frac{F}{F^{(2)}} + \dots + \psi_{n_s-3} \cdot \frac{F}{F^{(s)}},$$

so hat man nur die Bedingungen aufzustellen, dass der Reihe nach die Gleichungen stattfinden:

$$\psi_{n-3} = \psi_{n_1-3} \cdot F^{(2)} F^{(3)} \dots F^{(s)} + \psi_{n_2+n_3+\dots+n_s-3} \cdot F^{(1)},$$

$$\psi_{n_2+\dots+n_s-3} = \psi_{n_2-3} \cdot F^{(3)} F^{(4)} \dots F^{(s)} + \psi_{n_3+n_4+\dots+n_s-3} \cdot F^{(2)}$$

.....

$$\psi_{n_{s-1}+n_s-3} = \psi_{n_{s-3}} \cdot F^{(s)} + \psi_{n_s-3} \cdot F^{(s-1)}.$$

Diese  $s-1$  Schritte führen der Reihe nach zu

$$n_1(n_2 + n_3 + \dots + n_s), n_2(n_3 + n_4 + \dots + n_s), \dots, n_{s-1} n_s$$

Bedingungsgleichungen; und zwischen den Gleichungen *jedes* dieser  $s - 1$  Systeme herrscht immer *eine* Relation. Nach n° 3 sind ferner, wenn man in einem System die auf einen *beliebigen* Schnittpunkt bezüglichen Gleichungen weglässt, die übrigbleibenden Gleichungen des Systems linear-unabhängig.

Die  $s - 1$  Relationen in (B<sup>IV</sup>), n° 7, treten also schon bei den hier angegebenen  $\sum n_i n_k$  ( $k > i$ ) Gleichungen auf; und zwar je eine in jedem der  $s - 1$  Systeme. Die in (B<sup>IV</sup>) noch hinzutretenden Gleichungen, welche aussagen, dass die  $\psi_{n-3}$  bez. zu  $F^{(i)}$  adjungirt seien, führen bei irreductiblen  $F^{(i)}$  keine neuen Relationen zwischen allen Gleichungen ein. Aber die zu einer Reihe von Systemen hinzugesetzten Adjunctionsbedingungen können bewirken, dass die Gleichungen eines *folgenden* Systems schon identisch befriedigt sind; dann nämlich, wenn dieses folgende System sich nur auf Schnittpunkte bezieht, welche in die Schnittpunkte der vorhergehenden Systeme hineinfallen.

Man schliesst hieraus: *zwischen denjenigen Gleichungen von (B<sup>IV</sup>), n° 7, welche aussagen, dass die  $\varphi_{n-3}$  in den Schnittpunkten (S) von*

$$F^{(1)} \text{ mit } (F^{(2)} F^{(3)} \dots F^{(s)}),$$

$$F^{(2)} \text{ mit } (F^{(3)} F^{(4)} \dots F^{(s)}),$$

• • • • • • •

$$F^{(h)} \text{ mit } (F^{(h+1)} F^{(h+2)} \dots F^{(s)})$$

*zu  $F$  adjungirt sein sollen, finden  $h + \alpha$  lineare Relationen statt, wenn es unter den  $s - h - 1$  weiteren Schnittpunktsystemen von*

$$F^{(h+1)} \text{ mit } (F^{(h+2)} \dots F^{(s)}),$$

$$F^{(h+2)} \text{ mit } (F^{(h+3)} \dots F^{(s)}),$$

• • • • • • •

$$F^{(s-1)} \text{ mit } F^{(s)}$$

$\alpha$  Systeme gibt, deren Schnittpunkte alle in die Punkte (S) hineinfallen.

II. Die im Vorhergehenden ermittelte Gruppierung wird noch etwas übersichtlicher, wenn man sich eines einfachen Satzes bedient, den man der *Analysis situs* zurechnen kann.

Ich führe die *Definition* ein: Theilt man ein System  $\Sigma$  von Curven in zwei Systeme  $\Sigma_0$  und  $\Sigma'$ , so soll  $\Sigma'$  nicht zerfallend bezüglich  $\Sigma_0$  genannt werden, wenn  $\Sigma'$  sich nicht selbst wieder in zwei derartige Systeme  $\Sigma'_1$  und  $\Sigma'_2$  zerlegen lässt, dass alle Schnittpunkte von  $\Sigma'_1$  mit  $\Sigma'_2$  in die von  $\Sigma_0$  mit  $\Sigma' = (\Sigma'_1 \Sigma'_2)$  hineinfallen. Existiren aber solche zwei Systeme  $\Sigma'_1$  und  $\Sigma'_2$ , so soll  $\Sigma'$  als *bezüglich*  $\Sigma_0$  *zerfallend*,  $\Sigma'_1$  als *unzusammenhängend* mit  $\Sigma'_2$  bez.  $\Sigma_0$  bezeichnet werden.

Man hat dann den Satz:

Ein System  $\Sigma$  bestehet aus  $t$  Curven, welche man in beliebiger Weise in eine Reihenfolge

$$C_1, C_2, \dots, C_t$$

gebracht hat. Wenn man nun alle diejenigen Systeme nimmt, in welche  $(C_2 C_3 \dots C_t)$  bez.  $C_1$  zerfällt (so dass also diese Systeme unter einander bezüglich  $C_1$  unzusammenhängend sind, jedes für sich aber bez.  $C_1$  nicht mehr zerfällt); sodann alle von den schon erhaltenen verschiedenen Systemen, in welche  $(C_3 C_4 \dots C_t)$  bez.  $(C_1 C_2)$  zerfällt; sodann alle von den vorher schon gezählten verschiedenen Systemen, in welche  $(C_4 C_5 \dots C_t)$  bez.  $(C_1 C_2 C_3)$  zerfällt; etc.; so erhält man im Ganzen immer genau  $t - 1$  von einander verschiedene Systeme aus  $\Sigma$ , oder besser  $t$  solche, wenn man  $\Sigma$  selbst mitzählt.

Zum Beweise braucht man nur zu bemerken, dass diese letzteren Systeme bestehen:

- 1) aus dem *einen* System  $\Sigma$ ;
- 2) aus denjenigen Systemen, in welche  $(C_2 C_3 \dots C_t)$  direkt zerfällt und denen, welche aus  $(C_2 C_3 \dots C_t)$  durch successive Wegnahme von  $C_2, C_3, \dots, C_{t-1}$  nach dem im Satze angegebenen Processe erhalten werden, wenn man die auf  $C_1$  fallenden Schnittpunkte der Curven  $C_2, \dots, C_t$  als gar nicht vorhanden betrachtet.

Diese Systeme 2) bestehen nun wieder:

1') aus *einem* der Systeme, in die  $(C_2 C_3 \dots C_t)$  in 2) direkt zerfiel; nämlich dem, in welchem  $C_2$  vorkommt;

2') aus den Systemen, in welche  $(C_3 C_4 \dots C_t)$  direkt zerfällt und den Systemen, welche aus  $(C_3 C_4 \dots C_t)$  durch successive Wegnahme von

$C_3, C_4, \dots, C_{t-1}$  erhalten werden, wenn man hier die auf  $C_1$  und  $C_2$  fallenden Schnittpunkte der Curven  $C_3, C_4, \dots, C_t$  ganz ausser Acht lässt.

Die Fortsetzung dieses Schlusses auf 2') etc. liefert also unmittelbar den Satz. Man sieht sogar, dass man aus  $\Sigma$  auf die im Satze angegebene Weise immer  $t$  verschiedene Systeme erhält, wenn man in  $\Sigma = (C_1 C_2 \dots C_t)$  irgend einen in festangennommenen Punkten befindlichen Theil der Schnittpunkte von  $C_1, C_2, \dots, C_t$ , z. B. alle auf einer gegebenen Curve  $C_0$  befindlichen, als nicht vorhanden ansieht; nur muss die Definition des »Zerfallens« dementsprechend gegeben und es müssen die verschiedenen Systeme, in die dann  $\Sigma$  direkt zerfallen könnte, mitgezählt werden.

- 12. Mit der Definition von n° 11 spricht sich der Satz von n° 10 so aus:

*Zwischen den Gleichungen, welche aussagen, dass die  $\varphi_{n-3}$  in den gegenseitigen Schnittpunkten der Curven des Systems*

$$(F^{(1)} F^{(2)} \dots F^{(h)})$$

*und in den Schnittpunkten dieses Systems mit den Curven des Systems*

$$(F^{(h+1)} F^{(h+2)} \dots F^{(s)})$$

*zu  $F$  adjungirt sein sollen, finden  $h - 1 + \beta$  lineare Relationen statt, wenn das zweite System bezüglich des ersten in  $\beta$  (gegenseitig unzusammenhängende, für sich aber nicht mehr zerfallende) Systeme zerfällt.*

13. Dieser Satz lässt nun nach n° 7, n° 10 und n° 11 eine Erweiterung zu.

Nach n° 10 leitet man, wenn man in

$$\Sigma = (F^{(1)} F^{(2)} \dots F^{(s)}),$$

erst die Eintheilung

$$\Sigma_1 = (F^{(1)} F^{(2)} \dots F^{(h)}), \quad \Sigma_2 = (F^{(h+1)} F^{(h+2)} \dots F^{(s)})$$

vornimmt, aus  $\Sigma_2$  in Bezug auf  $\Sigma_1$  noch  $s - h$  verschiedene Systeme, und aus  $\Sigma_1$  in Bezug auf  $\Sigma_2$  noch  $h$  verschiedene Systeme ab. Ferner hat man auch, um die Gleichung für die  $\varphi_{n-3}$  in n° 10 herzustellen, zuerst eine Reihe von Gleichungen mit einer Relation, damit  $\varphi_{n-3}$  von der Form wird:

$$\varphi_{n-3} = \psi_{n_{h+1} + \dots + n_s - 3} \cdot I^{(1)} \dots I^{(h)} + \psi_{n_1 + \dots + n_h - 3} \cdot I^{(h+1)} \dots I^{(s)};$$

sodann wieder eine Reihe von Gleichungen mit einer Relation, damit wird:

$$\psi_{n_{h+1}+\dots+n_s-3} = \psi_{n_{h+2}+\dots+n_s-3} \cdot F^{(h+1)} + \psi_{n_{h+1}} \cdot F^{(h+2)} \dots F^{(s)};$$

etc. Nimmt man noch die Gleichungen für die Adjunction der  $\varphi_{n-3}$  hinzu, so ergibt sich genau wie in n° 10 und n° 12 der allgemeinere Satz:

Zwischen dem Theil der Gleichungen von (B<sup>IV</sup>), n° 7, welcher aussagt, dass die  $\varphi_{n-3}$  in den Schnittpunkten der Curven des Systems

$$\Sigma_1 = (F^{(1)} F^{(2)} \dots F^{(h)})$$

mit den Curven des Systems

$$\Sigma_2 = (F^{(h+1)} F^{(h+2)} \dots F^{(s)})$$

zu  $F$  adjungirt sein sollen, finden  $\lambda + \mu - 1$  lineare Relationen statt, wenn  $\Sigma_2$  bezüglich  $\Sigma_1$  direkt in  $\lambda$  und zugleich  $\Sigma_1$  bezüglich  $\Sigma_2$  direkt in  $\mu$  Systeme zerfällt.

14. Vermöge n° 4 kann der erste Theil von n° 10 auch auf die Curven  $\psi_{n-2-h}$ , von einer Ordnung  $n-2-h < n-3$ , erweitert werden:

Sollen die Curven  $(n-2-h)^{tei}$  Ordnung,  $\psi_{n-2-h}$ , die Form annehmen:

$$\psi_{n-2-h} = \psi_{n_1-2-h} \cdot \frac{F}{F^{(1)}} + \psi_{n_2-2-h} \cdot \frac{F}{F^{(2)}} + \dots + \psi_{n_s-2-h} \cdot \frac{F}{F^{(s)}},$$

so erhält man hierfür bei beliebiger Multiplicität der Schnittpunkte der Curven  $F^{(1)}, F^{(2)}, \dots, F^{(s)}$  wie in n° 10  $s-1$  Systeme von bez.

$$n_1(n_2 + \dots + n_s), \quad n_2(n_3 + \dots + n_s), \quad \dots, \quad n_{s-1}n_s$$

Gleichungen, und in jedem dieser Systeme herrschen, für

$$0 \leqq h \leqq n_1 \leqq n_2 \leqq \dots \leqq n_s$$

noch je  $\frac{1}{2}h(h+1)$  lineare Relationen. Auch gibt es noch andere Eintheilungen der Gleichungen in Systeme mit je  $\frac{1}{2}h(h+1)$  Relationen; immer aber erhält man im Ganzen  $\sum_{k>i} n_i n_k$  Gleichungen mit

$$\frac{1}{2}h(h+1)(s-1)$$

linearen Relationen.

Für  $h > n_1$  kann man analoge Sätze, mit modifizirter Anzahl der Relationen, aussprechen.

Auf adjungirte Curven  $(n - 2 - h)^{\text{ter}}$  Ordnung,  $h > 1$ , ist dieser Satz nicht allgemein zu erweitern.

## II.

### Raumcurven.

15. Für eine irreductible Raumcurve  $R_{n_1}$ , von der Ordnung  $n_1$  und dem Geschlecht  $p_1$ , welche immer ohne wirkliche vielfache Punkte gedacht sei, erhält man eine lineare Vollschaar von Punktgruppen bekanntlich<sup>1</sup> auf folgende Weise:

Man lege durch  $R_{n_1}$  zwei Flächen  $\mu^{\text{ter}}$  und  $\nu^{\text{ter}}$  Ordnung,  $F_\mu$  und  $F_\nu$ , welche sich noch in einer einfachen Restcurve  $R_{n_2}$ , von der  $n_2^{\text{ten}}$  Ordnung, wo

$$n_1 + n_2 = \mu\nu,$$

schneiden mögen; die durch  $R_{n_2}$  gehenden Flächen heissen dann »zu  $R_{n_1}$  adjungirt«. Die zu  $R_{n_1}$  adjungirten Flächen einer Ordnung  $\rho$  schneiden aus  $R_{n_1}$  Vollschaaren aus; um also auf  $R_{n_1}$  die ganze zu einer Gruppe  $G_Q$  von  $Q$  Punkten corresiduale lineare Schaar von Gruppen von je  $Q$  Punkten zu erhalten, hat man nur eine zu  $R_{n_1}$  adjungirte Fläche  $\rho^{\text{ter}}$  Ordnung durch  $G_Q$  zu legen, deren Restschnitt  $G_{Q'}$  auf  $R_{n_1}$  zu suchen und  $R_{n_1}$  dann mit allen durch  $G_{Q'}$  gehenden zu  $R_{n_1}$  adjungirten Flächen  $\rho^{\text{ter}}$  Ordnung zu schneiden.

Insbesondere erhält man auf  $R_{n_1}$  die  $\infty^{n-1}$ -Schaar von Gruppen von je  $2p_1 - 2$  Punkten (deren entsprechende Schaar auf einer der  $R_{n_1}$  eindeutig entsprechenden ebenen Curve  $C_n$  von der  $n^{\text{ten}}$  Ordnung, durch die zu  $C_n$  adjungirten Curven  $(n - 3)^{\text{ter}}$  Ordnung,  $\varphi_{n-3}$ , ausgeschnitten wird), indem man  $R_{n_1}$  durch die zu  $R_{n_1}$  adjungirten Flächen  $\varphi_{\mu+\nu-4}$ , von der  $(\mu + \nu - 4)^{\text{ten}}$  Ordnung, schneidet.

<sup>1</sup> S. meine Abhandlung: *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde*. 2<sup>ter</sup> Aufsatz. Mathematische Annalen, Bd. 8.

16. Die in n° 15 definirten Flächen  $\chi_\rho$ , von der  $\rho^{\text{ten}}$  Ordnung, welche zur Raumcurve  $R_{n_1}$  adjungirt sein sollen, kann man bezüglich des beweglichen Schnittes mit  $R_{n_1}$  noch durch andere Flächen ersetzen:

Wenn  $R_{n_1}, R_{n_2}$  zusammen den vollständigen Schnitt der beiden Flächen  $F_n$  und  $F_\nu$  bilden, so treffen die Flächen  $\phi_\rho$ , von der  $\rho^{\text{ten}}$  Ordnung, welche nur der Bedingung genügen, durch die  $t$  Schnittpunkte von  $R_{n_2}$  mit  $R_{n_1}$  zu gehen, die Curve  $R_{n_1}$  in derselben Vollschaar von Punktgruppen, wie die zu  $R_{n_1}$  adjungirten (durch  $R_{n_2}$  gehenden) Flächen  $\chi_\rho$ .

In der That bilden die Flächen  $\chi_\rho$  selbst einen Theil der Flächen  $\phi_\rho$ ; aber da die  $\chi_\rho$  die Curve  $R_{n_1}$  schon in einer Vollschaar schneiden, können die  $\phi_\rho$  die Curve  $R_{n_1}$  nicht in einer beweglichen Gruppenschaar von grösserer Mannigfaltigkeit treffen; es wird nur unter den  $\phi_\rho$  ein grösserer Theil durch die ganze Curve  $R_{n_1}$  selbst gehen, als unter den  $\chi_\rho$ .

Dies lässt sich, nach demselben Schlusse, noch erweitern: Der vollständige Schnitt von  $F_n$  und  $F_\nu$  besthe aus  $s$  Curven  $R_{n_1}, R_{n_2}, \dots, R_{n_s}$ ; alsdann wird die Raumcurve  $R_{n_1}$  von denjenigen Flächen  $\phi_\rho$  der  $\rho^{\text{ten}}$  Ordnung, welche durch die  $t_1$  Schnittpunkte von

$$R_{n_1} \quad \text{mit} \quad (R_{n_2}, R_{n_3} \dots R_{n_s}),$$

und durch irgend einen Theil der weiteren gegenseitigen Schnittpunkte der Curven des Systems

$$(R_{n_2}, R_{n_3} \dots R_{n_s})$$

gehen, in derselben Vollschaar getroffen, wie von den zu  $R_{n_1}$  adjungirten (also durch  $R_{n_2}, R_{n_3} \dots$  und  $R_{n_s}$  gehenden) Flächen  $\rho^{\text{ter}}$  Ordnung.

Wir schliessen noch daraus und aus n° 15:

*Für die Flächen  $\varphi_{\mu+\nu-4}$ , der Ordnung  $\mu + \nu - 4$ , welche durch die  $t_1$  Schnittpunkte von  $R_{n_1}$  mit den Restschnitt  $(R_{n_2} R_{n_3} \dots R_{n_s})$  von  $F_n$  und  $F_\nu$  und durch irgend einen Theil der gegenseitigen Schnittpunkte von  $(R_{n_2} \dots R_{n_s})$  oder durch irgend welche dieser Curven selbst gehen, liefert die Forderung, auch durch  $R_{n_1}$  selbst zu gehen, noch  $p_1$  weitere von den vorhergehenden linear-unabhängige Bedingungen, wenn  $R_{n_1}$  irreductibel ist und das Geschlecht  $p_1$  hat.*

Der einfacheren Ausdrucksweise halber wurde hierbei, woran auch im Folgenden festgehalten werden soll, angenommen, dass die gegenseitigen Schnittpunkte der Curven  $R_{n_1}, R_{n_2}, \dots, R_{n_s}$  nur einfache und getrennte Punkte der Curven sein sollen.

17. Die für eine irreducible Curve bestehende Definition der Geschlechtszahl soll zunächst für eine reductible Curve hier dahin erweitert werden:

Wenn eine Raumcurve  $R_m$ , der Ordnung  $m$ , aus  $k$  Curven  $R^{(1)}, R^{(2)}, \dots, R^{(k)}$ , bez. von der Ordnung  $m_i$  und dem Geschlecht  $p_i$ , besteht, so sei immer noch, wenn  $h$  die Anzahl der *scheinbaren* Doppelpunkte von  $R_m$  bezeichnet, als *Geschlecht von  $R_m$*  die Zahl definiert:

$$p = \frac{1}{2}(m - 1)(m - 2) - h.$$

Hat  $R^{(i)}$  also  $h_i$  scheinbare Doppelpunkte und treffen sich  $R^{(i)}$  und  $R^{(j)}$  in  $t_{ij}$  Punkten, so wird:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{1}{2}(m_i - 1)(m_i - 2) - h_i \\ h &= \sum_i h_i + \sum_{j>i} (m_i m_j - t_{ij}) \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} i=1, 2, \dots, k \\ j=1, 2, \dots, k \end{pmatrix}$$

also:<sup>1</sup>

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_k - (k - 1) + \sum_{\substack{i,j \\ i>j}} t_{ij}.$$

Da die vollständige Schnittcurve zweier Flächen  $F_\mu, F_\nu$  das Geschlecht

$$p = \frac{1}{2}\mu\nu(\mu + \nu - 4) + \text{I}$$

hat, so folgt für den Fall von n° 16, dass diese Curve aus  $s$  Curven  $R_{n_1}, R_{n_2}, \dots, R_{n_s}$ , bez. vom Geschlecht  $p_1, \dots, p_s$ , besteht, wobei sich  $R_{n_i}$  und  $R_{n_j}$  in  $t_{ij}$  Punkten treffen mögen:

die Gesamtzahl der gegenseitigen Schnittpunkte wird

$$t = \sum_{i>j} t_{ij} = \frac{1}{2}\mu\nu(\mu + \nu - 4) - \sum_i p_i + s.$$

Theilt man insbesondere das Gesamtschnittsystem von  $F_\mu$  und  $F_\nu$  in nur zwei Theile  $\Sigma$  und  $\Sigma'$ , wo  $\Sigma$  die Ordnung  $m$  und das Geschlecht

<sup>1</sup> Man hätte auch  $p - \sum t_{ij} = p_1 + p_2 + \dots + p_k - (k - 1)$  als das Geschlecht von  $R_m$  definieren können, in etwas grösserer Übereinstimmung mit dem Abschnitt I. Indessen scheint die obige Definition für Raumcurven hier bequemer.

$p$ ,  $\Sigma$  die Ordnung  $m'$  und das Geschlecht  $p'$  hat, so hat man für die  $\tau$  Schnittpunkte von  $\Sigma$  mit  $\Sigma'$  bekanntlich:

$$\begin{aligned}\tau &= m(\mu + \nu - 4) - 2p + 2 = m'(\mu + \nu - 4) - 2p' + 2 \\ &= \frac{1}{2}m\nu(\mu + \nu - 4) - p - p' + 2.\end{aligned}$$

18. Aus dem Satze von n° 16 und der Definition von n° 17 folgert man sogleich:

Besteht der Schnitt von  $F_\mu$  und  $F_\nu$  aus dem System  $(R_{n_1} R_{n_2} \dots R_{n_s})$  und bezeichnet  $p'$  das Geschlecht des Systems  $(R_{n_2} R_{n_3} \dots R_{n_s})$ , so liefert die Forderung für die Flächen  $\varphi_{\mu+\nu-4}$ , durch dieses System  $(R_{n_2} R_{n_3} \dots R_{n_s})$  zu gehen

$$(n_2 + n_3 + \dots + n_s)(\mu + \nu - 4) - p' + 1$$

linear-unabhängige Bedingungen, sobald  $R_{n_1}$  irreductibel ist.

Denn da vermöge  $p_1$  weiterer Bedingungen die  $\varphi_{\mu+\nu-4}$  durch die ganze Schnittecurve von  $F_\mu$  und  $F_\nu$  gehen, diese Forderung aber

$$\frac{1}{2}m\nu(\mu + \nu - 4) + 1$$

Bedingungen stellt, so wird die Zahl jener Bedingungen zu

$$\frac{1}{2}m\nu(\mu + \nu - 4) + 1 - p_1 = (n_2 + n_3 + \dots + n_s)(\mu + \nu - 4) - p' + 1.$$

19. Ebenso leicht beweist man folgenden, dem Satze von n° 7 des I. Abschnitts analogen Satz:

Wenn der Schnitt von  $F_\mu$  und  $F_\nu$  aus  $s$  irreductiblen Curven  $R_{n_1}, R_{n_2}, \dots, R_{n_s}$  besteht, so ist die Forderung für die Flächen  $\varphi_{\mu+\nu-4}$ , durch alle  $t$  gegenseitigen Schnittpunkte der Curven dieses Systems zu gehen, mit

$$t - s + 1$$

linear-unabhängigen Bedingungen äquivalent.

Denn die Curve  $n_i^{\text{ter}}$  Ordnung,  $R_{n_i}$ , habe das Geschlecht  $p_i$ , und  $R_{n_i}$  treffe  $R_{n_j}$  in  $t_{ij}$  Punkten; dann ist nach n° 17

$$t = \sum_{j>i} t_{ij} = \frac{1}{2}m\nu(\mu + \nu - 4) - \sum_i p_i + s.$$

Sei aber  $A$  die Zahl der im Satze geforderten Bedingungen. Nach ihrer Erfüllung hat man, nach dem Satze von n° 16, noch je  $p_i$  davon unabhängige Bedingungen, wenn die  $\varphi_{\mu+\nu-4}$  noch bez. durch  $R_{n_1}$  gehen sollen; und da es überhaupt  $\frac{1}{2}\mu\nu(\mu+\nu-4)+1$  Bedingungen ausmacht, wenn die  $\varphi_{\mu+\nu-4}$  durch das ganze System der  $s$  Curven gehen sollen, so wird

$$A + \sum_i p_i = \frac{1}{2}\mu\nu(\mu+\nu-4) + 1,$$

also

$$A = t - s + 1$$

(auch für  $s = 1$ ,  $t = 0$  gültig).

20. Sei insbesondere im Satze von n° 19  $s = 2$  angenommen.<sup>1</sup> Zwischen den  $t$  Gleichungen [ $t = n_1(\mu+\nu-4) - 2p_1 + 2$ ], welche aussagen, dass die  $\varphi_{\mu+\nu-4}$  durch die  $t$  Schnittpunkte der beiden irreductiblen Curven  $R_{n_1}$ ,  $R_{n_2}$  gehen, die zusammen den Schnitt von  $F_\mu$  mit  $F_\nu$  bilden, herrscht dann *eine* und *nur eine* Relation. Aber man kann noch genauer sagen:

*Jede der  $t$  Gleichungen wird eine lineare Folge der  $t-1$  übrigen Gleichungen.*

In der That schneiden die Flächen  $\varphi_{\mu+\nu-4}$ , welche durch  $t-1$  der  $t$  Punkte gehen, die Curve  $R_{n_1}$  in einer Schaar von Gruppen von  $2p_1-1$  Punkten. Da aber eine dieser Gruppen besteht aus  $2p_1-2$  Punkten, die auch von einer zu  $R_{n_1}$  adjungirten Fläche  $\varphi_{\mu+\nu-4}$  ausgeschnitten werden können, und aus dem letzten jener  $t$  Punkte, so schliesst man, indem man die  $R_{n_1}$  auf die Ebene projicirt, genau wie beim Satze (C) von n° 1 des I. Abschnitts, dass dieser letzte Punkt in *allen* Gruppen der Schaar enthalten sein muss.

Aus diesem Satze schliesst man weiter:

*die Flächen der  $(\mu+\nu-4)^{ten}$  Ordnung treffen  $R_{n_1}$  in einer Vollschaar von Gruppen von je  $n_1(\mu+\nu-4) = 2p_1-2+t$  Punkten, nämlich mit der Mannigfaltigkeit  $\infty^{p_1-2+t}$ .*

Denn erst nach Erfüllung der  $t-1+p_1$  unabhängigen Bedingungen, zunächst durch die  $t$  Schnittpunkte von  $R_{n_2}$  mit  $R_{n_1}$ , dann durch  $p_1$  will-

<sup>1</sup> Dieser Fall ist schon von Hrn. VALENTINER ausgesprochen, wie in der Einleitung citirt ist.

kürliche Punkte von  $R_{n_1}$  zu gehen, wird die Fläche  $(\mu + \nu - 4)^{\text{ter}}$  Ordnung die ganze Curve  $R_{n_1}$  enthalten. Von den  $p_1$  Punkten, die hier durch die übrigen im Schnitt von  $R_{n_1}$  mit einer Fläche  $(\mu + \nu - 4)^{\text{ter}}$  Ordnung bestimmt sind, ist also einer der durch die übrigen  $t - 1$  Schnittpunkte von  $R_{n_1}, R_{n_2}$  bestimmte letzte Schnittpunkt; die  $p_1 - 1$  weiteren sind als Schnittpunkte einer zu  $R_{n_1}$  adjungirten durch  $p_1 - 1$  Punkte von  $R_{n_1}$  gehenden Fläche  $\varphi_{\mu+\nu-4}$  bestimmt.

Für  $s > 2$  gilt dieser Satz im Allgemeinen nicht mehr.

21. Auch für  $s > 2$  bleibt der Beweis des Satzes bestehen: dass jede der  $t$  Gleichungen, welche aussagen, dass die  $\varphi_{\mu+\nu-4}$  durch alle  $t$  Schnittpunkte der Curven  $R_{n_1}, R_{n_2}, \dots, R_{n_s}$  gehen, eine lineare Folge der  $t - 1$  übrigen wird. Aber da nach n° 19 zwischen diesen  $t$  Gleichungen  $s - 1$  Relationen existieren, so könnte hier jede der Gleichungen auch schon aus weniger als  $t - 1$  der übrigen folgen. Dass dies in der That für  $s > 2$  immer der Fall ist, ersieht man aus folgendem Satze:

*Sobald im Satze von n° 19 die Zahl  $t_{12}$  der Schnittpunkte von  $R_{n_1}$  mit  $R_{n_2} > 0$  ist, gehen alle Flächen  $(\mu + \nu - 4)^{\text{ter}}$  Ordnung, welche durch alle Schnittpunkte von  $R_{n_1}$  mit dem System  $(R_{n_2} R_{n_3} \dots R_{n_s})$  und durch irgend  $t_{12} - 1$  der Schnittpunkte von  $R_{n_1}$  mit  $R_{n_2}$  gelegt werden, auch durch den letzten dieser  $t_{12}$  Punkte. Die Forderung für die  $\varphi_{\mu+\nu-4}$ , durch die*

$$t_1 = t_{12} + t_{13} + \dots + t_{1s}$$

*Schnittpunkte von  $R_{n_1}$  mit  $(R_{n_2} R_{n_3} \dots R_{n_s})$  zu gehen, stellt also höchstens  $t_1 - 1$  unabhängige Bedingungen vor.*

Die Richtigkeit des Satzes folgt genau, wie in n° 20, indem die Flächen  $(\mu + \nu - 4)^{\text{ter}}$  Ordnung durch irgend  $t_1 - 1$  der  $t_1$  Schnittpunkte von  $R_{n_1}$  mit  $(R_{n_2} R_{n_3} \dots R_{n_s})$  die Curve  $R_{n_1}$  wieder in einer  $\infty^{p_1-1}$ -Schaar von Gruppen von je  $2p_1 - 1$  Punkten treffen müssten, wonach der  $t_1^{\text{te}}$  Punkt in allen Gruppen enthalten sein muss.

Schneiden sich nun  $R_{n_2}$  und  $(R_{n_3} R_{n_4} \dots R_{n_s})$ , so kommen die auf diese Schnittpunkte bezüglichen Gleichungen unter den  $t_1$  genannten gar nicht vor; wenn aber  $R_{n_2}$  und  $(R_{n_3} R_{n_4} \dots R_{n_s})$  sich nicht treffen, so muss  $(R_{n_3} R_{n_4} \dots R_{n_s})$  die Curve  $R_{n_1}$  treffen,  $t_{13} + t_{14} + \dots + t_{1s}$  ist also von 0 verschieden, aber schon aus den  $t_{12}$  auf den Schnitt von  $R_{n_1}$  mit  $R_{n_2}$  bezüglichen Gleichungen folgt dann, nach dem obigen auf  $R_{n_2}$  angewandten

Sätze, jede aus den  $t_{12} - 1$  übrigen. Jede der  $t$  Gleichungen von  $n^o 19$  folgt also für  $s > 2$  immer aus weniger als  $t - 1$  der übrigen Gleichungen.

22. Den Satz von  $n^o 21$  kann man zu folgendem erweitern:

*Wenn der Schnitt von  $F_\mu$  und  $F_\nu$  irgend wie in zwei Systeme  $\Sigma$  und  $\Sigma'$  von  $h$  und  $s-h$  Curven getheilt wird, so gehen alle Flächen  $(\mu+\nu-4)^{ter}$  Ordnung,  $\phi_{\mu+\nu-4}$ , welche durch irgend  $\tau-1$  der  $\tau$  Schnittpunkte von  $\Sigma$  mit  $\Sigma'$  gelegt werden, immer auch durch den letzten dieser Schnittpunkte; so dass diese Forderung für die  $\phi_{\mu+\nu-4}$  höchstens  $\tau-1$  unabhängige Bedingungen liefert.*

Man kann diesen Satz einfach auf den von  $n^o 21$  zurückführen. Seien  $m, m'$  bez. die Ordnung von  $\Sigma, \Sigma'$ . Kann man nun durch das System  $\Sigma'$  eine Fläche  $\nu^{ter}$  Ordnung,  $F'_\nu$ , legen, welche die Fläche  $F_\mu$  noch in einer irreductiblen Curve  $R_m$  schneidet, so gilt der Satz von  $n^o 21$  für den Schnitt  $(\Sigma', R_m)$  von  $F_\mu$  mit  $F'_\nu$ ; d. h. alle Flächen  $\phi'_{\mu+\nu-4}$ , welche durch irgend  $\tau-1$  der  $\tau$  Schnittpunkte von  $\Sigma'$  mit  $R_m$  gelegt werden, gehen immer durch den letzten dieser  $\tau$  Punkte. Diese Thatsache, dass jede der  $\tau$  Gleichungen aus den  $\tau-1$  übrigen folgt, bleibt bei Variation der Parameter von  $F'_\nu$  hier fortbestehen; also auch wenn  $F'_\nu$  in  $F_\nu$ , d. h.  $R_m$  in  $\Sigma$ , übergeht.

Wenn aber durch  $\Sigma'$  keine Fläche  $\nu^{ter}$  Ordnung geht, welche  $F_\mu$  weiter in einer irreductiblen Curve schneidet, so lege man durch  $\Sigma'$  eine Fläche  $F'_{\nu+a}$ , von genügend hoher Ordnung  $\nu+a$ , welche  $F_\mu$  ausser in  $\Sigma'$  in einer irreductiblen Curve  $R_{m+a}$  treffe. Dann gehen nach  $n^o 21$  alle Flächen  $\phi_{\mu+\nu+a-4}$ , welche durch irgend  $\tau+a-1$  der  $\tau+a$  Schnittpunkte von  $\Sigma'$  mit  $R_{m+a}$  gelegt werden, auch durch den letzten. Dies bleibt auch bei Variation der Parameter von  $F'_{\nu+a}$  bestehen, und gilt insbesondere dann noch, wenn man  $F'_{\nu+a}$  spezialisiert in  $F_\nu, F_a$ , wo  $F_a$  eine ganze beliebige Fläche  $a^{ter}$  Ordnung vorstellt. Um so mehr gilt dies, wenn die  $\phi_{\mu+\nu+a-4}$  zugleich durch die ganze Schnittecurve von  $F_a$  mit  $F_\mu$  gelegt werden. Für diese ist aber:

$$\phi_{\mu+\nu+a-4} = \phi_{\nu+a-4} \cdot F_\mu + \phi_{\mu+\nu-4} \cdot F_a,$$

woraus folgt, dass auch die Flächen  $F_a \cdot \phi_{\mu+\nu-4}$  jene Eigenschaft haben, d. h. die  $\phi_{\mu+\nu-4}$  in Bezug auf den Schnitt von  $F_\mu$  mit  $F_\nu$ .

23. Um den Satz von  $n^o 22$  in eine bestimmtere Fassung zu bringen, hat man nur wieder die Betrachtung aus der Analysis situs anzuwenden;

welche in n° 11 des ersten Abschnitts angestellt worden ist. Und zwar kann man hier bei den Raumcurven noch einfacher definiren:

Ein System  $\Sigma$  von  $k$  Curven soll *nicht zerfallend* genannt werden, wenn es sich nicht in zwei einander gar nicht schneidende Systeme  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  zerlegen lässt. Im andern Falle heisst  $\Sigma$  ein *zerfallendes* System.

Besteht dann  $\Sigma$  aus  $k$  Curven  $R_1, R_2, \dots, R_k$  und zählt man alle nicht zerfallenden Systeme, in welche  $(R_1 R_2 \dots R_k)$  direkt zerfällt; sodann alle davon verschiedenen nicht zerfallenden Systeme, in welche  $(R_2 R_3 \dots R_k)$  zerfällt; etc.; so erhält man im Ganzen  $k$  von einander verschiedene nicht zerfallende Systeme.

24. Es möge nun zunächst der Schnitt von  $F_\mu$  mit  $F_\nu$  aus zwei Systemen von Curven,  $\Sigma$  und  $\Sigma'$  bestehen, und  $\Sigma$  selbst mag wieder in  $k$  Systeme  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$  zerfallen, die einander nicht treffen.  $\Sigma_i$  soll  $\Sigma'$  in  $\tau_i$  Punkten schneiden. Da das System  $\Sigma_i$  das Restsystem  $(\Sigma', \Sigma_1, \dots, \Sigma_{i-1}, \Sigma_{i+1}, \dots, \Sigma_k)$  in  $\tau_i$  Punkten trifft, gehen nach n° 22 alle  $\phi_{\mu+\nu-4}$ , welche durch  $\tau_i - 1$  dieser Punkte gehen, auch durch den letzten derselben; so dass man hat:

Wenn im Schnittsystem  $\Sigma, \Sigma'$  von  $F_\mu$  mit  $F_\nu$  das System  $\Sigma$  in  $k$ , einander nicht treffende, Systeme zerfällt, so ist die Forderung für die  $\phi_{\mu+\nu-4}$ , durch die  $\tau$  Schnittpunkte von  $\Sigma'$  mit  $\Sigma$  zu gehen, mit höchstens  $\tau - k$  Bedingungen äquivalent.

Jetzt zerlege man das ganze Schnittsystem von  $F_\mu, F_\nu$ , das aus den  $s$  irreductiblen Curven  $R_{n_1}, R_{n_2}, \dots, R_{n_s}$  besteht, in folgender Weise:

Man nehme irgend eine der Curven,  $R_1$ . Die übrigen  $s - 1$  Curven mögen dadurch in die  $k_1$  nicht zerfallenden Systeme  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_{k_1}$  sich zerlegen (wo die  $\Sigma_i$  einander nicht schneiden). Dann herrscht zwischen den  $t_{11}$  Bedingungsgleichungen, welche aussagen, dass die Flächen  $(\mu + \nu - 4)^{\text{ter}}$  Ordnung  $\phi_{\mu+\nu-4}$ , durch die  $t_{11}$  Schnittpunkte von  $R_1$  mit  $\Sigma_1$  gehen sollen, *mindestens eine* Relation, indem alle  $\phi_{\mu+\nu-4}$  durch irgend  $t_{11} - 1$  der  $t_{11}$  Punkte jedenfalls auch durch den letzten derselben gehen.

Sodann nehme man aus  $\Sigma_1$  eine  $R_1$  treffende Curve,  $R_2$ . Dadurch mögen die übrigen Curven von  $\Sigma_1$  sich in  $k_2$  nicht zerfallende Systeme  $\Sigma_{11}, \Sigma_{12}, \dots, \Sigma_{1k_2}$  zerlegen. Dann herrscht zwischen den obigen  $t_{11}$  Gleichungen und den  $t_{21}$  Gleichungen, welche aussagen, dass die  $\phi_{\mu+\nu-4}$  auch durch die  $t_{21}$  Schnittpunkte von  $R_2$  mit  $\Sigma_{11}$  gehen sollen, *mindestens eine weitere* Relation, indem alle  $\phi_{\mu+\nu-4}$  durch die obigen  $t_{11}$  Punkte und

durch irgend  $t_{21} - 1$  der  $t_{21}$  Punkte durch den letzten dieser  $t_{21}$  Punkte gehen müssen.

Nun nimmt man aus  $\Sigma_{11}$  eine  $R_2$  treffende Curve,  $R_3$ , wodurch die übrigen Curven von  $\Sigma_{11}$  sich in  $k_3$  nicht zerfallende Systeme  $\Sigma_{111}, \dots, \Sigma_{11k_3}$  zerlegen. Dann herrscht zwischen den obigen  $t_{11} + t_{21}$  Gleichungen und denjenigen, welche aussagen, dass die  $\phi_{n+v-4}$  auch durch die Schnittpunkte von  $R_3$  mit  $\Sigma_{111}$  gehen sollen, *mindestens eine weitere Relation*.

Indem man so fortfährt, also nach Erschöpfung von  $\Sigma_{11}$  zu  $\Sigma_{12}$ , dann zu  $\Sigma_{13}$ , etc., nach Erschöpfung von  $\Sigma_1$  zu  $\Sigma_2$ ,  $\Sigma_3$  etc. übergeht, ergibt sich sogleich aus dem Satze von n° 23:

*dass die Forderung für die  $\phi_{n+v-4}$ , durch alle  $t$  gegenseitigen Schnittpunkte der  $s$  irreductiblen Curven  $R_{n_1}, R_{n_2}, \dots, R_{n_s}$  zu gehen, auf  $t$  Gleichungen mit mindestens  $t - (s - 1)$  Relationen führt.*

Aber nach n° 19 existieren zwischen diesen  $t$  Gleichungen genau  $t - s + 1$  Relationen. Daraus folgt, dass keiner der in obiger Entwicklung genannten  $s - 1$  Schritte mehr als eine Relation mit sich führen kann.

Dasselbe Schlussverfahren kann man auf eine noch allgemeinere Zerlegung anwenden. Den Schnitt von  $F_n$  und  $F_v$  zerlege man erst in zwei Theile  $\Sigma$  und  $\Sigma'$ , von bez.  $h$  und  $s - h$  Curven; wobei  $\Sigma$  in  $k$ ,  $\Sigma'$  in  $k'$  nicht zerfallende Systeme

$$(\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k) \text{ und } (\Sigma'_1, \Sigma'_2, \dots, \Sigma'_{k'})$$

zerfallen mögen. Für die  $\phi_{n+v-4}$  stelle es  $\tau - \alpha$  unabhängige Bedingungen vor, durch die  $\tau$  Schnittpunkte von  $\Sigma$  mit  $\Sigma'$  zu gehen, wo

$$\alpha \geq k + k' - 1.$$

Man lege nun weiter nach dem vorhergehenden Verfahren die  $\phi_{n+v-4}$  successive durch die Schnittpunkte, in welchen sich die  $h_1$  Curven von  $\Sigma_1$  treffen; dann durch die Schnittpunkte der  $h_2$  Curven von  $\Sigma_2$ ; etc. dann durch die der  $h'_1$  Curven von  $\Sigma'_1, \dots$ , endlich durch die der  $h'_{k'}$  Curven von  $\Sigma'_{k'}$ . So erhält man noch eine Reihe weiterer Gleichungen mit mindestens

$$(h_1 - 1) + (h_2 - 1) + \dots + (h_k - 1) + (h'_1 - 1) + (h'_2 - 1) + \dots + (h'_{k'} - 1) \\ = (h - k) + (s - h - k') = s - k - k'$$

weiteren Relationen. Die  $t$  Gleichungen für die  $\phi_{\mu+\nu-4}$  enthalten hiernach mindestens  $\alpha + s - k - k'$  Relationen, so dass also nach n° 19  $\alpha$  auch nicht grösser als  $k + k' - 1$  werden kann.

25. Nach n° 24 hat man somit die Sätze:

Theilt man den Schnitt von  $F_\mu$  und  $F_\nu$  irgend wie in zwei nicht zerfallende Systeme  $\Sigma$  und  $\Sigma'$ , so gehen alle Flächen  $(\mu + \nu - 4)^{ter}$  Ordnung,  $\phi_{\mu+\nu-4}$ , welche durch irgend  $\tau - 1$  der  $\tau$  Schnittpunkte von  $\Sigma$  mit  $\Sigma'$  gelegt werden, auch durch den letzten der  $\tau$  Punkte; und diese Forderung liefert für die  $\phi_{\mu+\nu-4}$  genau  $\tau - 1$  linear-unabhängige Bedingungen.

War ferner  $\Sigma'$  ein nicht zerfallendes,  $\Sigma$  aber ein in  $k$  nicht zerfallende Systeme  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$  sich zerlegendes System (wo die  $\Sigma_i$  einander nicht treffen), so liefert die Forderung für die  $\phi_{\mu+\nu-4}$ , durch die  $\tau$  Schnittpunkte von  $\Sigma$  mit  $\Sigma'$  zu gehen,  $\tau - k$  unabhängige Bedingungen; nämlich je  $\tau_i - 1$  Bedingungen für die  $\tau_i$  Schnittpunkte von  $\Sigma_i$  mit  $\Sigma'$ .

Besteht sowohl  $\Sigma$  aus  $k$ , als  $\Sigma'$  aus  $k'$  nicht zerfallenden Systemen, so liefert die Forderung für die  $\phi_{\mu+\nu-4}$ , durch die  $\tau$  Schnittpunkte von  $\Sigma$  mit  $\Sigma'$  zu gehen,  $\tau - k - k' + 1$  linear-unabhängige Bedingungen.

26. Mit Hülfe des Satzes von n° 25 kann man auch den Satz von n° 18 und den zweiten von n° 20 erweitern:

Der Schnitt von  $F_\mu$  und  $F_\nu$  bestehe aus einer irreductiblen Curve  $R_{n_1}$ , von der Ordnung  $n_1$  und dem Geschlecht  $p_1$ , und aus einem Restsystem  $\Sigma$ , das in  $k$  nicht zerfallende Systeme  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$  sich zerlege; dann liefert die Forderung für die Flächen  $(\mu + \nu - 4)^{ter}$  Ordnung,  $\phi_{\mu+\nu-4}$ , durch die Curve  $R_{n_1}$  zu gehen:

$$n_1(\mu + \nu - 4) + 1 - (p_1 + k - 1)$$

unabhängige Bedingungen. Die Flächen  $(\mu + \nu - 4)^{ter}$  Ordnung treffen  $R_{n_1}$  für  $k > 1$  in keiner Vollschaar, wohl aber für  $k = 1$  (und auch für  $k = 0$ , wobei  $R_{n_1}$  die vollständige Schnittcurve von  $F_\mu$  und  $F_\nu$  wird und alle Flächen  $(\mu + \nu - 4)^{ter}$  Ordnung schon zu  $R_{n_1}$  adjungirt sind); dagegen treffen für  $k > 1$  die  $\phi_{\mu+\nu-4}$ , welche durch die Schnittpunkte von  $k - 1$  der  $k$  Systeme  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$  mit  $R_{n_1}$  gehen, diese Curve in einer Vollschaar.

Denn für die  $\phi_{\mu+\nu-4}$  stellt es nach n° 25 noch  $t_1 - k$  Bedingungen vor, durch die  $t_1$  Schnittpunkte von  $R_{n_1}$  mit  $\Sigma$  zu gehen, wo

$$t_1 = n_1(\mu + \nu - 4) - 2p_1 + 2;$$

sodann, nach n° 16 noch  $p_1$  weitere Bedingungen, um durch die ganze Curve  $R_{n_1}$  zu gehen; im Ganzen also  $t_1 - k + p_1$ , wie es der Satz aussagt. Daraus folgt weiter, dass die Flächen  $(\mu + \nu - 4)^{\text{ter}}$  Ordnung die Curve  $R_{n_1}$  in einer  $\infty^{t_1-k+p_1-1}$ -Schaar von Gruppen von je  $2p_1 - 2 + t_1$  Punkten treffen; also in *keiner* Vollschaar für  $k > 1$ , weil eine solche  $t_1 + p_1 - 2$  Parameter hat. Dagegen treffen die  $\phi_{\mu+\nu-4}$ , welche durch  $\Sigma_2, \Sigma_3, \dots, \Sigma_k$  gelegt werden, die Curve  $R_{n_1}$  in einer  $\infty^{t_1+p_1-2}$ -Schaar von Gruppen von je  $2p_1 - 2 + t_{11}$  Punkten, wenn  $t_{11}$  die Zahl der Schnittpunkte von  $R_{n_1}$  mit  $\Sigma_1$  bezeichnet; also in einer Vollschaar.

27. Den Satz von n° 26 kann man endlich noch dahin erweitern:

*Der Schnitt von  $F_\mu$  und  $F_\nu$  bestehe aus zwei beliebigen Systemen  $\Sigma$  und  $\Sigma'$ ;  $\Sigma$  zerlege sich in  $k$  nicht zerfallende Systeme,  $\Sigma'$  in  $k'$  solche.  $\Sigma$  sei von der Ordnung  $m$  und dem Geschlecht  $p$ ,  $\Sigma'$  von der Ordnung  $m'$  und dem Geschlecht  $p'$  (nach der Definition von n° 17). Dann liefert die Forderung für die Flächen  $\phi_{\mu+\nu-4}$ , durch das System  $\Sigma$  zu gehen,*

$$m(\mu + \nu - 4) - p - k' + 2$$

*unabhängige Bedingungen; und ebenso die Forderung, durch  $\Sigma'$  zu gehen,*

$$m'(\mu + \nu - 4) - p' - k + 2$$

*Bedingungen.*

Man kann diesen Satz durch einen Schluss, wie in n° 22, auf den vorigen von n° 26 zurückführen; oder auch so:

Man hat für die  $\phi_{\mu+\nu-4}$  zunächst  $\tau - k - k' + 1$  Bedingungen, durch die  $\tau$  Schnittpunkte von  $\Sigma$  mit  $\Sigma'$  zu gehen, wo

$$\tau = m(\mu + \nu - 4) - 2p + 2.$$

Sodann nehme man an, dass es noch  $p_1 + p_2 + \dots + p_k$  weitere Bedingungen ausmacht, durch  $\Sigma$  selbst zu gehen, wenn  $p_1, p_2, \dots, p_k$  bez. das Geschlecht der  $k$  Theilsysteme  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$  von  $\Sigma$  bezeichnet; so ergeben sich im Ganzen  $\tau - k - k' + 1 + \sum p_i$  Bedingungen. Aber nach n° 17 ist hier

$$\sum p_i = p + k - 1,$$

so dass man hier in der That  $m(\mu + \nu - 4) - p - k' + 2$  Bedingungen erhält.

Man hat also nur noch zu zeigen, dass es nach dem Durchlegen durch die  $\tau$  Schnittpunkte von  $\Sigma'$  mit  $\Sigma$  für die  $\phi_{n+y-4}$  noch  $p_1$  Bedingungen ausmachte, durch das nicht zerfallende System  $\Sigma_1$  zu gehen.

Nun bestehet  $\Sigma_1$  aus einer irreductiblen Curve  $R_0$  und den übrigen Curven von  $\Sigma_1$ , die sich dann in  $k_1$  nicht zerfallende Systeme  $\Sigma_{11}, \dots, \Sigma_{1k_1}$  zertheilen mögen. Das Geschlecht von  $R_0$ ,  $\Sigma_{11}, \dots, \Sigma_{1k_1}$  sei bezüglich  $p_{10}, p_{11}, \dots, p_{1k_1}$ . Ferner habe  $R_0$  mit  $\Sigma_{1i}$  bez.  $\tau_{1i}$  Schnittpunkte. Da die Systeme  $\Sigma_{1i}$  alle aus weniger Curven bestehen, als  $\Sigma_1$ , so kann man den Satz für diese Systeme  $\Sigma_{1i}$  als bewiesen ansehen; dann folgt aber, dass die Zahl der unabhängigen Bedingungen, damit die  $\phi_{n+y-4}$  durch die  $\tau$  Schnittpunkte von  $\Sigma'$  mit  $\Sigma$  und durch die

$$\tau_{11} + \tau_{12} + \dots + \tau_{1k_1}$$

Schnittpunkte von  $R_0$  mit  $\Sigma_{11}, \Sigma_{12}, \dots, \Sigma_{1k_1}$  gehen, wird zu

$$(\tau - k - k' + 1) + (\tau_{11} + \tau_{12} + \dots + \tau_{1k_1} - k_1) + p_{10} + p_{11} + \dots + p_{1k_1},$$

also nach n° 17 zu

$$(\tau - k - k' + 1) + p_1,$$

womit der Satz vollständig bewiesen ist.

### *Nachschrift.*

Ich benutze diese Gelegenheit zu einer Bemerkung über die o. c. wertvolle Arbeit von Herrn VALENTINER *Zur Theorie der Raumcurven*, dieses Journal, Bd. 2, p. 136. Einige der meinem vorstehenden Aufsätze zu Grunde liegenden algebraischen Sätze finden sich auch in jener Arbeit. Aber während ich hier, wie in meiner Abhandlung *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven*, Abhandl. der Berliner Akad. vom Jahre 1882, mich überall auf meinen o. c. Satz *Über einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen*, Mathematische Annalen, Bd. 6, stütze, um ausnahmslos gültige oder genau zu begrenzende Resultate zu erhalten, geht Herr VALENTINER in seinen Beweisen von der

*Constantenzählung* aus, welche zahlreiche, im Voraus nicht zu erkennende Ausnahmefälle zulässt, zu deren Ergründung eben jener Satz in Bd. 6 der Mathematischen Annalen von mir aufgestellt worden ist. So untersucht er in keiner Weise, ob die  $\Sigma st$  linearen Bedingungsgleichungen, welchen er in n° 4 seine  $\varphi_n$  unterwirft, von einander unabhängig sind, was doch wesentliche Voraussetzung für seine Schlüsse wäre. Seine in der Einleitung gegebenen Resultate sind also nur desshalb als richtig anzusehen, weil sie von anderer Seite her bewiesen sind.

Dagegen habe ich das Bedenken, welches ich in meiner oben genannten Abhandlung gegen den Beweis von Herrn VALENTINER's Dissertation über die Minimalzahl der scheinbaren Doppelpunkte einer Raumcurve geäussert, nach der Ausführung in seiner Arbeit, n° 26, zurückzunehmen.

Erlangen, Januar 1886.

---

## THEORIE DER ABEL'SCHEN ZAHLKÖRPER

VON

H. WEBER

in MARBURG.

## I. ABEL'SCHE KÖRPER UND KREISKÖRPER.

In der Folge beabsichtige ich eine Reihe von Untersuchungen über Abel'sche Zahlkörper zu veröffentlichen, deren letztes Ziel es ist, alle diese Körper vollständig zu bestimmen und darzustellen. Den Satz, welcher dies ermöglicht, hat KRONECKER zuerst in einer Mitteilung in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom 20<sup>ten</sup> Juni 1853, welche auch in SERRET's *Cours d'algèbre supérieure* abgedruckt ist, ausgesprochen, den Satz nämlich, dass die Wurzeln aller Abel'scher Gleichungen im Gebiete der rationalen Zahlen sich aus Einheitswurzeln rational zusammensetzen lassen, dass also mit andern Worten alle Abel'schen Körper zugleich Kreiskörper sind. Nach dieser ersten Mitteilung KRONECKER's machten aber damals die Gleichungen, deren Grad eine Potenz von 2 ist, noch Schwierigkeiten. In späteren Mitteilungen (Monatsberichte der Berliner Akademie vom 14 Apr. 1856, 16 Apr. 1877, 7 Dec. 1882) ist KRONECKER wiederholt auf den Gegenstand zurückgekommen, ohne über den Beweis des Satzes wesentlich mehr als die Andeutung zu geben, dass die KUMMER'sche Zerlegung gewisser in der Kreisteilung vorkommender complexer Zahlen in ihre idealen Primfactoren dabei gebraucht wird. Eben dies ergiebt sich auch aus einer Bemerkung von KUMMER im Eingang der Abhandlung: *Theorie der idealen Primfactoren etc.* (Abhandlungen der Berliner Akademie 1856). Dieser schöne und merkwürdige Kronecker'sche Satz gehört ohne Zweifel zu den zukunftsreichsten der Algebra,

da er auf die Wege weist, auf welchen allein ein tieferer Einblick in das Wesen der algebraischen Zahlgrössen zu hoffen ist. Der Satz aber, obwohl vor mehr als dreissig Jahren entdeckt, ist noch lange nicht in dem Maasse wie er es verdient, gekannt und verstanden, und ich glaube daher der Sache zu dienen, wenn es mir gelingt, durch die Mitteilung eines alle Fälle umfassenden Beweises das Verständniss desselben zu erleichtern und zu fördern. Das Hilfsmittel, dessen ich mich bei diesem Beweise bediene ist die von DEDEKIND entwickelte Theorie der algebraischen Zahlen, deren Terminologie und Hauptsätze ich als bekannt voraussetze. Der Leser findet dieselben in einfacher und klarer Darstellung vorgetragen im XI. Supplement zu der dritten Auflage der DIRICHLET'schen Vorlesungen über Zahlentheorie. Die in der vorliegenden Arbeit mit *D.* bezeichneten Citate beziehen sich auf dieses Werk. Auch in mündlichem und schriftlichem Verkehr habe ich mit meinem Freunde DEDEKIND vielfach über den Gegenstand dieser Untersuchungen verhandelt, und verdanke ihm nützlichen Rath und Anregung, besonders in Beziehung auf die elegante Formulierung des Problems in der ersten Abhandlung.

Der besseren Übersicht wegen habe ich die Untersuchung in drei getrennte Abhandlungen geteilt, deren jede so viel als möglich ein für sich abgeschlossenes Ganze bildet.

Die erste dieser Abhandlungen behandelt die allgemeine Theorie der Abel'schen Zahlkörper und insbesondere die Kreiskörper und ihre Darstellung. Es wird darin der meines Wissens früher noch nicht vollständig erbrachte Beweis geführt, dass durch die directe Verallgemeinerung der GAUSS'schen Perioden *alle* Kreiskörper, und jeder nur einmal, dargestellt werden. KRONECKER berührt diesen Gegenstand in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom 14<sup>ten</sup> Apr. 1856; jedoch bezieht sich die dortige Mitteilung nur auf die regulären Kreiskörper.

Diejenigen Abel'schen Körper, deren Grad eine Potenz von 2 ist, bieten eine eigentümliche Schwierigkeit, und erfordern (wenigstens bis jetzt noch) die Zuziehung eines fremdartigen Hilfsmittels. Es war daher notwendig, in einer zweiten Abhandlung eine Untersuchung durchzuführen über die Anzahl der Idealklassen und die Einheiten in den Kreiskörpern, deren Ordnung eine Potenz von 2 ist.

Die dritte Abhandlung endlich soll den vollständigen Beweis des KRONECKER'schen Satzes liefern.

### § 1. Allgemeines über algebraische Zahlkörper und Körperpermutationen.

Unter einem algebraischen Zahlkörper  $n^{\text{ten}}$  Grades verstehen wir den Inbegriff  $R(x)$  aller rationalen Functionen (mit rationalen Coefficienten) von  $x$ , wenn  $x$  eine Wurzel einer irreducibeln Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades

$$(1) \quad f(x) = 0$$

ist, deren Coefficienten rationale Zahlen sind.

1. Jede Zahl eines solchen Körpers ist wieder die Wurzel einer Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades, welche entweder irreducibel oder eine ganze Potenz einer irreducibeln Gleichung ist. Es giebt unendlich viele Zahlen im Körper  $R(x)$ , welche irreducibeln' Gleichungen  $n^{\text{ten}}$  Grades genügen, und wenn  $y$  eine solche ist, so ist der Körper  $R(y)$  mit dem Körper  $R(x)$  identisch, (weil alsdann sowohl  $y$  rational durch  $x$  als auch  $x$  rational durch  $y$  ausdrückbar ist). Solche Zahlen  $y$  können *primitive* Zahlen des Körpers  $R(x)$  genannt werden, weil sie nicht zugleich in einem zweiten Körper von gleichem oder niedrigerem Grad enthalten sind.

2. Sind die Zahlen eines Körpers  $R(y)$  sämmtlich in dem Körper  $R(x)$  enthalten, so heisst  $R(y)$  ein Teiler von  $R(x)$ ;  $y$  ist eine Zahl in  $R(x)$  welche einer irreducibeln Gleichung vom Grade des Körpers  $R(y)$  genügt; und darnach ergiebt sich aus (1) dass der Grad von  $R(y)$  ein Teiler des Grades von  $R(x)$  ist.

3. Unter dem Product zweier Körper  $R(x_1)$ ,  $R(x_2)$  versteht man den Inbegriff  $R(x_1, x_2)$  aller rationalen Functionen von  $x_1$  und  $x_2$ ; dies Product hat (nach n° 2) sowohl  $R(x_1)$  als  $R(x_2)$  zum Teiler. Es ergiebt sich hieraus sofort die Definition des Productes von mehreren Factoren.

4. Sind  $x_1, x_2, \dots, x_n$  die  $n$  Wurzeln der Gleichung (1) so heissen die Körper  $R(x_1)$ ,  $R(x_2)$ ,  $\dots$ ,  $R(x_n)$  (die auch alle oder teilweise identisch sein können) *conjugierte Körper*. Der Übergang von einem Körper zu einem seiner conjugirten heisst eine *Permutation*, das Ersetzen der Zahlen des einen Körpers durch die entsprechenden des andern eine *Substitution*. Das Product aller mit einander conjugirten Körper heisst die *Norm* eines jeden dieser Körper. Bezeichnen wir mit  $z$  eine rationale

Function von  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , welche bei allen Vertauschungen dieser Grössen  $\Pi(n)$  verschiedene Werte annimmt, so ist  $R(z)$  die Norm von  $R(x_1)$  (deren Grad niedriger sein kann als  $\Pi(n)$ ). Ein Körper, der mit allen seinen conjugirten identisch ist, und der mithin seine eigene Norm ist, heisst ein *Normalkörper* oder ein *Galois'scher Körper*. Jede Norm ist ein solcher Normalkörper, und der Normalkörper kann auch dadurch charakterisiert werden, dass er mit seiner Norm gleichen Grad hat. (D. § 163.)

5. Die Permutationen von  $R(z)$  bilden unter sich eine *Gruppe*, deren Grad gleich dem Grade von  $R$  ist. Denn die conjugirten Werte  $z, z', z'', \dots$  sind alle in  $R(z)$  enthalten und werden also in bestimmter Weise unter einander vertauscht, wenn  $z$  durch eine Substitution  $S'$  durch  $z'$  ersetzt wird. Ersetzt man hierauf mittelst einer zweiten Substitution  $S''$   $z'$  durch  $z''$ , so geht dadurch  $z'$  in  $z'''$  über; und die Substitution, durch welche  $z$  direct in  $z'''$  übergeht ist also aus den beiden Substitutionen  $S'S''$  zusammengesetzt; hierbei darf im Allgemeinen die Reihenfolge nicht vertauscht werden. Diese Substitutionsgruppe heisst die *Gruppe*, nicht nur des Körpers  $R(z)$ , sondern eines jeden der Körper  $R(x_1), R(x_2), \dots$ . Jede Zahl des Körpers  $R(x_1)$  kann durch die Substitutionen dieser Gruppe in jede der mit ihr conjugirten Zahlen übergeführt werden. Denn nehmen wir an, dass dies für irgend eine solche Zahl  $x$  nicht der Fall sei, so würde eine gewisse Gruppe der conjugirten Werte von  $x$  nur unter sich vertauscht. Diese würden also schon für sich die Wurzeln einer Gleichung mit rationalen Coëfficienten sein, entgegen dem Satze n° 1.

6. Da die Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  alle dem Körper  $R(z)$  angehören, so werden sie durch jede der Substitutionen  $S$  in gewisser Weise unter einander vertauscht. Es entsteht so eine gewisse Gruppe von Substitutionen der Grössen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , welche keine andere ist als die Galois'sche Gruppe der Gleichung (1), da jede rationale Function dieser Grössen, welche einen rationalen Wert hat durch die Permutationen des Körpers  $R(z)$  ungeändert bleibt und umgekehrt.

7. Aus diesen Begriffsbestimmungen ergiebt sich, dass die Norm eines Divisors eines Körpers ein Divisor der Norm ist, und dass die Norm eines Productes zweier oder mehrerer Körper gleich dem Producte der Normen ist. Also ist auch das Product zweier oder mehrerer Normalkörper selbst ein Normalkörper.

### § 2. Abel'sche Körper.

Wir nennen einen algebraischen Zahlkörper einen *Abel'schen*, wenn seine Substitutionsgruppe eine Abel'sche Gruppe ist, d. h. wenn ihre Substitutionen alle unter einander vertauschbar sind. Daraus folgt:

1. *Jeder Abel'sche Körper ist ein Normalkörper.* Es sei nämlich  $R(x)$  ein solcher Körper vom Grade  $n$  und  $x$  irgend eine primitive Zahl des Körpers, deren conjugierte Werte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sind. In der Gruppe des Körpers existiert gewiss wenigstens eine Substitution  $S_k$ , durch welche  $x_1$  in einen beliebigen der conjugierten Werte,  $x_k$ , übergeht. (§ 1, n° 5.) Ist dann  $S$  irgend eine Substitution, durch welche  $x_1$  in  $x_k$  übergeht, so bleibt durch die Substitution

$$(1) \quad S_h^{-1} S_k S^{-1} S_h$$

das Element  $x_h$  ungeändert; wegen der vorausgesetzten Vertauschbarkeit ist aber die Substitution  $(1) = S_k S^{-1}$ , und diese Substitution lässt daher alle  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ungeändert. Sie ist also die identische Substitution und folglich ist

$$(2) \quad S = S_k.$$

Demnach ist der Grad der Norm von  $R(x)$  gleich dem Grade dieses Körpers und daher  $R(x)$  ein Normalkörper.<sup>1</sup> Man kann also die Substitutionen  $S_k$  in eindeutiger Weise durch das Symbol  $(x_1, x_k)$  bezeichnen, wobei noch das eine Glied der Bezeichnung,  $x_1$ , beliebig genommen werden kann, wenn das zweite passend bestimmt wird. Man kann etwa setzen

$$S_a = (x_1, x_{a_1}) = (x_b, x_{a_b})$$

und erhält

$$(3) \quad S_a S_b = (x_1, x_{b_{a_1}}), \quad S_b S_a = (x_1, x_{a_{b_1}})$$

also

$$(4) \quad x_{b_{a_1}} = x_{a_{b_1}}.$$

---

<sup>1</sup> Vgl. über diesen Satz KRONECKER, Berliner Monatsberichte, 16 Apr. 1877.

2. Eine einfache Folgerung dieser Definition, ist es, dass alle Teiler Abel'scher Körper selbst Abel'sche Körper sind.

3. Ein Abel'scher Körper heisst *regulär* wenn die Gruppe seiner Substitutionen durch Wiederholung einer einzigen unter ihnen erschöpft werden kann. In diesem Fall lassen sich die conjugierten Werte einer Zahl des Körpers derart in einen einzigen Cyklus  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  ordnen, dass dieselben durch die Substitutionen der Gruppe cyklisch vertauscht werden. Dieser Fall muss eintreten, wenn  $n$  eine Primzahl ist.

4. Unter dem Grad einer Abel'schen Gruppe versteht man die Anzahl der Elemente, welche sie enthält. Der Grad eines einzelnen Elementes ist der Exponent der niedrigsten Potenz dieses Elementes, welche gleich dem Hauptelement (gleich »1», in unserem Falle gleich der identischen Substitution) wird. Ist  $p$  irgend eine im Grade der Gruppe aufgehende Primzahl, so existieren in der Gruppe Elemente vom Grade  $p$ .<sup>1</sup>

5. Wenn in der Gruppe  $G$  unseres Körpers  $R(x)$  irgend eine andere Gruppe  $G_1$  vom Grade  $n_1$  als Teiler enthalten ist, so giebt es in  $R(x)$  Zahlen, welche durch die Substitutionen von  $G_1$  ungeändert bleiben, dagegen durch jede andere Substitution von  $G$  sich ändern. Eine solche Zahl ist z. B. bei passender Bestimmung der rationalen Zahl  $t$

$$y = (t - x_1)(t - x_2) \dots (t - x_{n_1})$$

wenn  $x_1, x_2, \dots, x_{n_1}$  die Werte sind, in welche  $x$  durch die Substitutionen  $G_1$  übergeht. Von einer solchen Zahl sagt man, sie gehöre zu der Gruppe  $G_1$ . Aus ihr entspringt ein Körper  $R(y)$  vom Grade  $n:n_1$ , ein Teiler von  $R(x)$ , der ebenfalls als zur Gruppe  $G_1$  gehörig bezeichnet sein soll. Wenn umgekehrt  $y$  eine Zahl in  $R(x)$  ist, so bilden diejenigen Substitutionen in  $G$ , durch welche  $y$  ungeändert bleibt, eine Gruppe  $G_1$ , welche ein Teiler von  $G$  ist, und der Körper  $R(y)$  gehört zur Gruppe  $G_1$ .

<sup>1</sup> Die Hauptsätze über Abel'sche Gruppen findet man in des Verfassers Arbeit *Über die Darstellung von Primzahlen durch quadratische Formen*, Mathematische Annalen, Bd. 20, S. 301 (1882), ferner: SCHERING, *Die Fundamentalklassen der zusammensetzbaren arithmetischen Formen*, Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. 14 (1868); KRONECKER, Monatsberichte der Berliner Akademie I Dec. 1870; FROBENIUS und STICKELBERGER, *Gruppen von vertauschbaren Elementen*, Journal für Mathematik, Bd. 86, 1878.

Jeder Teiler  $R(y)$  von  $R(x)$  gehört also zu einem bestimmten Teiler  $G_1$  von  $G$  und umgekehrt.

Gehört  $y_1$  zu  $G_1$ ,  $y_2$  zu  $G_2$ , und ist  $G_2$  in  $G_1$  enthalten, so ist der Körper  $R(y_1)$  in  $R(y_2)$  enthalten. Sind  $R(y_1)$ ,  $R(y_2)$  zwei Divisoren von  $R(x)$ , welche zu den Gruppen  $G_1$ ,  $G_2$  gehören, so gehört das Product  $R(y_1, y_2)$  zu dem grössten gemeinschaftlichen Teiler von  $G_1$  und  $G_2$  und der grösste gemeinschaftliche Teiler von  $R(y_1)$ ,  $R(y_2)$ , d. h. der Inbegriff aller in beiden Körpern zugleich enthaltenen Zahlen, zum kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der beiden Gruppen  $G_1$ ,  $G_2$ .

6. Ein Abel'scher Körper wird *zerlegbar* genannt, wenn er (im Sinne von § 1, n° 3) das Product zweier anderer Abel'scher Körper ist. Im entgegengesetzten Fall heisst er *einfach*. Daraus ergiebt sich unmittelbar, dass ein zerlegbarer Abel'scher Körper in eine *endliche* Anzahl einfacher zerlegt werden kann.

Hierbei sei zur Vermeidung von Irrtümern bemerkt, dass die Zerlegbarkeit keineswegs aus dem Vorhandensein eines Teilers folgt, und dass die Zerlegung in einfache Körper nicht nur auf *eine* Art geschehen kann.

7. Ein Abel'scher Körper ist stets zerlegbar, wenn in seinem Grad zwei verschiedene Primzahlen  $p$ ,  $q$  aufgehen. Bezeichnen nämlich  $S_1$ ,  $S_2$  zwei Substitutionen der Gruppe  $G$  von den Graden  $p$ ,  $q$ , deren es nach n° 4 immer giebt, und  $y_1$ ,  $y_2$  zwei Zahlen des Körpers, die zu den aus den Potenzen von  $S_1$ ,  $S_2$  gebildeten Gruppen  $p^{\text{ten}}$  und  $q^{\text{ten}}$  Grades gehören, so sind  $R(y_1)$ ,  $R(y_2)$  zwei Teiler von  $R(x)$  von den Graden  $n:p$ ;  $n:q$ . Der aus beiden zusammengesetzte Körper  $R(y_1, y_2)$  ist gleichfalls ein Teiler von  $R(x)$ ; sein Grad ist aber sowohl durch  $n:p$  als durch  $n:q$  teilbar und muss also  $= n$  sein. Hiernach ist  $R(y_1, y_2)$  mit  $R(x)$  identisch. Darnach lassen sich alle Abel'schen Körper aus solchen zusammensetzen, deren Grad eine Primzahlpotenz ist.

8. Ein nicht regulärer Abel'scher Körper, dessen Grad eine Primzahlpotenz  $p^r$  ist, ist zerlegbar. Sei nämlich  $S$  eine Substitution in  $G$  vom Grade  $p$ , und  $S_1$  eine zweite, welche nicht unter den Potenzen von  $S$  enthalten ist. Dass bei irregulären Gruppen solche vorhanden sind, ist leicht einzusehen. Die Zahlen  $y$ ,  $y_1$  mögen zu den durch die Potenzen dieser beiden Substitutionen gebildeten Gruppen gehören. Dann ist  $y_1$  nicht im Körper  $R(y)$  vom Grade  $n:p$  enthalten, da es ja sonst durch die Substitu-

tion  $S$  ungeändert bleiben müsste. Der Grad des Körpers  $R(y, y_1)$  ist dann durch  $n:p$  teilbar, kann aber nicht  $= n:p$  sein, weil sonst  $R(y, y_1)$  mit  $R(y)$  identisch wäre; andererseits ist dieser Grad ein Teiler von  $n$  und muss mithin  $= n$  sein. Es ist also wieder  $R(y, y_1)$  mit  $R(x)$  identisch. *Es lassen sich also alle Abel'schen Körper aus regulären Abel'schen Körpern zusammensetzen, deren Grad eine Primzahlpotenz ist.*

Ein regulärer Körper, dessen Grad eine Primzahlpotenz ist, ist dagegen unzerlegbar, weil jeder Teiler eines solchen Körpers jeden anderen Teiler von gleichem oder niedrigerem Grade wieder als Teiler enthält.

### § 3. Abel'sche Gruppen und Gruppencharaktere.

Für die spätere Anwendung sollen zunächst einige der Hauptsätze über Abel'sche Gruppen zusammengestellt werden, die im Wesentlichen bekannt sind. Die Beweise findet man in der oben citierten Abhandlung des Verfassers.

1. Es sei  $G$  eine Abel'sche Gruppe vom Grade  $n$ , und  $S$  seien ihre Elemente. Diese Elemente lassen sich durch eine Basis darstellen, in der Weise

$$(1) \quad S = S_1^{s_1} S_2^{s_2} \dots S_\nu^{s_\nu},$$

so dass man jedes Element  $S$  von  $G$  ein und nur einmal erhält, wenn  $s_1 \pmod{n_1}$ ,  $s_2 \pmod{n_2}$ , ...,  $s_\nu \pmod{n_\nu}$  je ein vollständiges Restsystem durchläuft. Es ist alsdann

$$(2) \quad n = n_1 n_2 \dots n_\nu.$$

2. Wählt man die Grössen  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu$  unter den Wurzeln der Gleichungen

$$\omega_1^{n_1} = 1, \quad \omega_2^{n_2} = 1, \quad \dots, \quad \omega_\nu^{n_\nu} = 1$$

beliebig aus, und setzt (nach (1))

$$(3) \quad \chi(S) = \omega_1^{s_1} \omega_2^{s_2} \dots \omega_\nu^{s_\nu},$$

so erhält man die  $n$  Charaktere der Gruppe  $G$ . Für irgend zwei Elemente  $S, S'$  von  $G$  ist dann stets

$$(4) \quad \chi(S)\chi(S') = \chi(SS').$$

Wenn umgekehrt eine Function  $\chi(S)$  der Bedingung (4) genügt, so ist sie unter den  $n$  Charakteren enthalten.

Die Charaktere bilden unter sich eine Abel'sche Gruppe vom Grade  $n$ , wenn man unter  $\chi\chi'(S)$  den Charakter

$$(\omega_1 \omega'_1)^{s_1} (\omega_2 \omega'_2)^{s_2} \dots (\omega_v \omega'_v)^{s_v}$$

versteht.

3. Auf Grund dieses Satzes lassen sich die Divisoren der Gruppe  $G$  genauer charakterisieren. Es sei

$$g = S, S', S'', \dots$$

eine in  $G$  enthaltene Gruppe (ein Divisor von  $G$ ). Ist  $G$  durch die Elemente  $g$  nicht erschöpft, so wähle man ein in  $g$  nicht enthaltenes Element  $S_1$  und bilde die Reihe der Elemente

$$g_1 = S_1 S, S_1 S', S_1 S'', \dots$$

welche lauter von einander und von  $g$  verschiedene Elemente enthält. Ist  $G$  noch nicht erschöpft, so wähle man  $S_2$  so dass es weder in  $g$  noch in  $g_1$  enthalten ist, und bilden die dritte Reihe

$$g_2 = S_2 S, S_2 S', S_2 S'', \dots$$

und fahre so fort, bis die Gruppe  $G$  erschöpft ist. Diese Reihen  $g, g_1, g_2, \dots$  bilden unter sich eine Abel'sche Gruppe  $H$ , wenn wir die Composition derselben in dem Sinne erklären, dass  $g_1 g_2$  die Reihe

$$g_1 g_2 = S_1 S_2 S, S_1 S_2 S', S_1 S_2 S'', \dots$$

bedeutet.

Wir betrachten die Charaktere  $\xi(g)$  dieser Gruppe  $H$  und setzen, wenn  $S_i, S'_i, S''_i, \dots$  in  $g_i$  enthalten sind

$$\xi(g_i) = \xi(S_i) = \xi(S'_i) = \xi(S''_i) = \dots$$

Hierdurch ist eine Reihe von Functionen  $\xi(S)$  bestimmt, welche der Bedingung

$$\xi(S)\xi(S') = \xi(SS')$$

genügen, und die daher unter den Charakteren  $\chi(S)$  enthalten sind. Für die Elemente  $S, S', S'', \dots$ , die in der Gruppe  $g$  vorkommen, und nur für diese,

haben alle diese Functionen den Wert + 1. Daraus folgt der Satz: Alle Elemente einer Abel'schen Gruppe  $G$ , für welche ein oder mehrere Charaktere den Wert + 1 haben, bilden einen Divisor von  $G$ , und umgekehrt erhält man alle Divisoren von  $G$ , wenn man alle diejenigen Elemente sucht, welche einem einzelnen oder einer beliebigen Anzahl von Charakteren den Wert + 1 erteilen.

Der Inbegriff derjenigen Charaktere  $\xi(S)$ , welche für die sämtlichen Elemente der Gruppe  $g$  den Wert + 1 haben, bildet unter sich eine Abel'sche Gruppe deren Grad =  $n:n_1$  ist, wenn  $n_1$  den Grad von  $g$  bedeutet, und die Gruppe  $G$  ist durch diese vollständig bestimmt. Wir sagen, die Gruppe  $g$  gehöre zu dieser Gruppe von Charakteren (oder umgekehrt diese Charakterengruppe zur Gruppe  $g$ ).

#### § 4. Die Kreiskörper.

Unter einem Kreiskörper versteht man jeden aus rationalen Zahlen und Einheitswurzeln zusammengesetzten Zahlkörper. Ist  $r$  eine primitive  $m^{\text{te}}$  Einheitswurzel, so soll der Körper  $R(r)$ , welcher aus sämtlichen rationalen Functionen von  $r$  besteht, der *vollständige Kreiskörper der Ordnung  $m$*  heißen, und mit  $\Omega_m$  bezeichnet werden.

Da man beliebig viele Einheitswurzeln immer als Potenzen einer und derselben Einheitswurzel darstellen kann, so folgt, dass jeder Kreiskörper ein Divisor eines vollständigen Kreiskörpers ist. Man erhält daher jeden Kreiskörper und jeden nur einmal, wenn man alle diejenigen Divisoren eines vollständigen Kreiskörpers  $m^{\text{ter}}$  Ordnung aufsucht, die nicht zugleich in Kreiskörpern niedrigerer Ordnung enthalten sind..

Da  $r$  die Wurzel einer irreducibeln Gleichung vom Grade  $\varphi(m)$  ist, so ist  $\varphi(m)$  auch der Grad des Körpers  $\Omega_m$ . Die Gruppe des Körpers besteht aus sämtlichen Substitutionen

$$(r, r^n)$$

wenn  $n$  die sämtlichen relativen Primzahlen zu  $m \pmod m$  durchläuft; diese Gruppe, die wir mit  $N$  bezeichnen wollen, kann dargestellt werden durch die sämtlichen nach dem Modul  $m$  reduzierten zu  $m$  teilerfremden

Zahlen. Diese Gruppe ist eine Abel'sche, und folglich ist *jeder Kreiskörper ein Abel'scher Körper*.

Um die sämtlichen Divisoren eines vollständigen Kreiskörpers zu ermitteln, hat man nach § 2, n° 5 die sämtlichen Teiler der Gruppe  $N$  aufzusuchen, d. h. die sämtlichen nach dem Modul  $m$  genommenen Zahlsysteme

$$(\mathfrak{A}) \quad k_0, k_1, k_2, \dots$$

die sich bei der Multiplication unter einander reproducieren. Zu jeder solchen Gruppe gehört ein Teiler von  $\mathcal{Q}_m$  und umgekehrt, zu jedem Teiler von  $\mathcal{Q}_m$  eine solche Gruppe.

1. Ist  $m_1$  ein Teiler von  $m$ , so ist auch der vollständige Kreiskörper  $\mathcal{Q}_{m_1}$  ein Teiler von  $\mathcal{Q}_m$ . Die Gruppe, zu welcher dieser Teiler gehört besteht aus allen denjenigen Zahlen  $k$ , welche der Bedingung genügen

$$k \equiv 1 \pmod{m_1}.$$

Sind  $m_1, m_2$  zwei Divisoren von  $m$ , deren grösster gemeinschaftlicher Teiler  $d$  ist, so gehört (nach § 2, n° 5) der grösste gemeinschaftliche Teiler von  $\mathcal{Q}_{m_1}, \mathcal{Q}_{m_2}$  zu der Gruppe

$$k \equiv 1 \pmod{d}$$

und ist also der vollständige Kreiskörper  $\mathcal{Q}_d$ .

2. Nun sollen unter den Divisoren von  $\mathcal{Q}_m$  diejenigen aufgesucht werden, welche nicht zugleich in vollständigen Kreiskörpern niedrigerer Ordnung enthalten sind. Nach n° 1 sind also solche und nur solche Divisoren von  $\mathcal{Q}_m$  auszuscheiden, die zugleich Divisoren von  $\mathcal{Q}_{m_1}$  sind, wenn  $m_1$  in  $m$  enthalten ist.

Auszuscheiden sind also alle diejenigen Divisoren von  $\mathcal{Q}_m$  und nur diese, welche zugleich Divisoren von einem der Körper  $\mathcal{Q}_{\frac{m}{q}}$  sind, wenn  $q$  irgend eine der in  $m$  aufgehenden Primzahlen bedeutet. Das heisst, man hat von den Divisoren  $\mathfrak{A}$  der Gruppe  $N$  diejenigen auszuscheiden, welche eine der Gruppen

$$(\mathfrak{A}_q) \quad k \equiv 1 \pmod{\frac{m}{q}}$$

als Teiler enthalten. Die übrig bleibenden Gruppen  $\mathfrak{K}$ , und nur diese liefern primitive Divisoren von  $\mathcal{Q}_m$ , und man erhält also auf diese Weise alle Kreiskörper und jeden nur einmal.

### § 5. Darstellung der Kreiskörper durch die Perioden.

Um die primitiven Divisoren  $\mathcal{Q}$  von  $\mathcal{Q}_m$  auf die einfachste Weise darzustellen, hat man eine möglichst einfache Function von  $r$  zu suchen, welche zu der Gruppe  $\mathfrak{K}$  von  $\mathcal{Q}$  gehört. Dass diesen Zweck die Perioden (im GAUSS'schen Sinne)

$$\eta = \sum r^k$$

erfüllen, wird dann bewiesen sein, wenn gezeigt werden kann, dass unter den conjugierten Werten  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$  dieser Perioden nicht zwei einander gleiche vorkommen. Um dies zu beweisen, ist es nötig, auf die Charaktere der Gruppe  $N$  etwas genauer einzugehen.

I. Es sei

$$(1) \quad m = 2^\lambda q_1^{x_1} q_2^{x_2} \dots$$

$\lambda = 0$  oder  $\geq 2$ ,  $q_1, q_2, \dots$  die von einander verschiedenen in  $m$  aufgehenden ungeraden Primzahlen. Man setze

$$(2) \quad a = b = 1 \text{ für } \lambda = 0; \quad a = 2, \quad b = \frac{1}{2}\varphi(2^\lambda) = 2^{\lambda-2} \text{ für } \lambda \geq 2$$

$$c_1 = \varphi(q_1^{x_1}) = q_1^{x_1-1}(q_1 - 1), \quad c_2 = \varphi(q_2^{x_2}), \dots$$

und verstehe unter  $g_1, g_2, \dots$  primitive Wurzeln von  $q_1^2, q_2^2, \dots$ . Dann lässt sich für jede zu  $m$  teilerfremde Zahl  $n$  ein System von Indices  $\alpha, \beta, r_1, r_2, \dots$  nach den Moduln  $a, b, c_1, c_2, \dots$  aus den Congruenzen bestimmen

$$(3) \quad n \equiv (-1)^\alpha 5^\beta \pmod{2^\lambda}; \quad n \equiv g_1^{r_1} \pmod{q_1^{x_1}}, \quad n \equiv g_2^{r_2} \pmod{q_2^{x_2}}, \dots$$

Versteht man dann unter  $\varepsilon, \theta, \omega_1, \omega_2, \dots$  primitive Wurzeln der Gleichungen

$$(4) \quad \varepsilon^\alpha = 1, \quad \theta^\beta = 1, \quad \omega_1^{c_1} = 1, \quad \omega_2^{c_2} = 1, \dots$$

und bezeichnet mit  $\alpha', \beta', \gamma'_1, \gamma'_2, \dots$  die Indices einer Zahl  $n'$ , so erhält man die Charaktere der Gruppe  $N$  in der Form

$$(5) \quad \chi_{n'}(n) = \varepsilon^{\alpha' n} \theta^{\beta' n} \omega_1^{\gamma'_1 n} \omega_2^{\gamma'_2 n} \dots$$

2. Die Charakterengruppe, zu welcher eine der in n° 2, § 4 ausgeschlossenen Gruppen  $\mathfrak{A}_{q_1}$  gehört, erhält man falls  $q_1$  nur einmal in  $m$  aufgeht indem man  $\omega_1^{q_1} = 1$  setzt, und wenn  $q_1$  mehrmals in  $m$  aufgeht, indem man  $\gamma'_1$  durch  $q_1$  teilbar annimmt. Um die Charakterengruppe zu welcher  $\mathfrak{A}_2$  gehört, zu bilden, hat man, falls  $\lambda = 2$  ist,  $\alpha'$ , falls  $\lambda > 2$  ist  $\beta'$  durch 2 teilbar anzunehmen. Die auf diese Weise definierten Charakterengruppen sollen mit  $\mathfrak{C}_{q_1}, \mathfrak{C}_{q_2}, \dots, \mathfrak{C}_2$  bezeichnet werden.

3. Ist nun  $\mathfrak{R}$  ein Divisor der Gruppe  $N$ ,  $h_1$  eine Zahl in  $N$ , die nicht in  $\mathfrak{R}$  enthalten ist,  $h_2$  eine Zahl in  $N$ , die weder in  $\mathfrak{R}$  noch in  $h_1\mathfrak{R}$  vorkommt, u. s. f., so zerfällt  $N$  in die Reihen

$$\begin{aligned} (\mathfrak{R}) & k_0, \quad k_1, \quad k_2, \dots \\ (h_1\mathfrak{R}) & h_1 k_0, \quad h_1 k_1, \quad h_1 k_2, \dots \\ (h_2\mathfrak{R}) & h_2 k_0, \quad h_2 k_1, \quad h_2 k_2, \dots \\ & \ddots \quad \ddots \quad \ddots \end{aligned}$$

Diese Reihen bilden im Sinne von § 3, n° 2, eine Gruppe  $H$ . Wir bezeichnen mit  $\xi(n)$  diejenigen unter den Charakteren  $\chi(n)$ , zu welchen die Gruppe  $\mathfrak{R}$  gehört und mit  $\mathfrak{C}$  die Gruppe derselben. Da hiernach

$$(6) \quad \xi(k_0) = \xi(k_1) = \xi(k_2) = \dots = 1$$

ist, so erhält man für die Charaktere der Gruppe  $H$  die Ausdrücke  $\xi(h_0), \xi(h_1), \xi(h_2), \dots$

Hieraus ergibt sich, wenn wir

$$(7) \quad \eta_h = \sum_k r^{hk}$$

setzen,

$$(8) \quad \sum_h \xi(h) \eta_h = \sum_n \xi(n) r^n.$$

4. Es sollen nun die Bedingungen gesucht werden, unter welchen mehrere der  $\eta_h$  einander gleich sind. Ist

$$\eta_1 = \eta_h = \eta_k = \dots$$

so bilden diese in dem Sinne eine Gruppe, dass auch

$$\eta_1 = \eta_{hh'}$$

ist, und diese Gruppe ist ein Divisor von  $H$ , den wir mit  $H'$  bezeichnen. Die Perioden  $\eta_h$  zerfallen in Reihen von gleich vielen unter einander gleichen.

Die Gruppe  $H'$  ist wieder dadurch charakterisiert, dass sie aus allen denjenigen  $h'$  besteht, für welche eine gewisse Gruppe unter den Charakteren  $\xi$ , die wir mit  $\xi'$  bezeichnen wollen, den Wert 1 hat. Die übrigen unter den Charakteren  $\xi$ , welche also für einige Elemente der Gruppe  $H'$  von 1 verschieden sind, bezeichnen wir mit  $\xi''$ . *Solche Charaktere  $\xi''$  existieren immer, wenn  $H'$  mehr als ein Element enthält, wenn also wirklich mehrere der Perioden  $\eta$  einander gleich sind.*

5. Ist nun  $h'$  irgend eine zu  $m$  teilerfremde Zahl, so lässt sich die Summe (8) so schreiben:

$$\sum \xi(n)r^n = \sum \xi(h'n)r^{hn} = \xi(h') \sum \xi(n)r^{hn} = \xi(h') \sum \xi(h)\eta_{hh'}.$$

Wir nehmen nun an, es sei  $\eta_1 = \eta_h$ , und folglich auch

$$\eta_h = \eta_{hh'}$$

dann folgt aus der letzten Gleichung wegen (8)

$$\sum \xi(n)r^n = \xi(h') \sum \xi(n)r^n.$$

Findet sich nun der Charakter  $\xi$  unter den  $\xi'$ , so kann man  $h'$  so wählen, dass  $\xi(h')$  von 1 verschieden ist, und daraus folgt:

$$(9) \quad \sum \xi'(n)r^n = 0.$$

Diese Bedingung lässt sich nun in folgender Weise umformen. Bezeichnen wir mit  $r_0, r_1, r_2, \dots$  primitive Einheitswurzeln der Ordnung  $2^k$ ,  $q_1^{\frac{m}{2}}, q_2^{\frac{m}{2}}, \dots$  so kann man jede primitive  $m^{\text{te}}$  Einheitswurzel in der Form annehmen

$$(10) \quad r = r_0 r_1 r_2 \dots$$

Ist dann (nach (5))

$$(11) \quad \xi''(n) = \varepsilon^{\alpha''\alpha} \theta^{\beta''\beta} \omega_1^{\gamma_1''\gamma_1} \omega_2^{\gamma_2''\gamma_2} \dots,$$

so zerfällt die linke Seite von (9) in Factoren:

$$(12) \quad \sum_{\alpha''\alpha} \varepsilon^{\alpha''\alpha} \theta^{\beta''\beta} r_0^{(-1)^{\alpha''\beta''}} \sum_{\gamma_1}^{\gamma_1} \omega_1^{\gamma_1''\gamma_1} r_1^{q_1\gamma_1} \sum_{\gamma_2}^{\gamma_2} \omega_2^{\gamma_2''\gamma_2} r_2^{q_2\gamma_2} \dots = 0,$$

woraus folgt, dass wenigstens einer dieser Factoren verschwinden muss.

6. Wir wollen nun, um die Kette der Schlüsse nicht zu unterbrechen die folgenden, im nächsten § zu beweisenden Sätze voraussetzen.

a) Die Summe

$$\sum_{\gamma_1}^{\gamma_1} \omega_1^{\gamma_1''\gamma_1} r_1^{q_1\gamma_1}$$

kann nicht verschwinden, wenn  $z_1 = 1$ , also  $q_1$  ein einfacher Factor von  $m$  ist; ist  $z_1 > 1$  so verschwindet dieser Ausdruck dann und nur dann, wenn

$$r_1'' \equiv 0 \pmod{q_1}.$$

b) Die Summe

$$\sum_{\alpha''\alpha} \varepsilon^{\alpha''\alpha} \theta^{\beta''\beta} r_0^{(-1)^{\alpha''\beta''}}$$

verschwindet, wenn  $\lambda = 2$  ist, dann und nur dann, wenn

$$\alpha'' \equiv 0 \pmod{2}$$

und wenn  $\lambda \geq 3$ , dann und nur dann, wenn

$$\beta'' \equiv 0 \pmod{2}.$$

7. Hieraus schliessen wir zunächst, dass die Gleichung (9), (12) auch dann noch befriedigt sein muss, wenn  $\xi'$  durch einen der Charaktere  $\xi$  ersetzt wird. Denn setzen wir

$$\xi'(n) = \varepsilon^{\alpha'\alpha} \theta^{\beta'\beta} \omega_1^{\gamma_1'\gamma_1} \omega_2^{\gamma_2'\gamma_2} \dots$$

und nehmen an es sei, falls  $m$  durch eine höhere als die erste Potenz von  $q_1, q_2, \dots$  teilbar ist,  $r'_1, r'_2, \dots$  nicht durch  $q_1, q_2, \dots$  teilbar, ebenso falls  $m$  durch 4 aber nicht durch 8 teilbar ist,  $\alpha'$ , und falls  $m$  durch 8 teilbar ist  $\beta'$  ungerade, wie es nach n° 6 sein muss, wenn  $\sum \xi'(n)r^n$  von Null verschieden ist, so kann man in dem zusammengesetzten Charakter

$$\xi' \xi''(n) = \varepsilon^{(\alpha'\beta'+\alpha''\beta'')n} \theta^{(\beta'\beta+\beta''\beta'')} \omega_1^{(\gamma_1'\gamma_1+\gamma_1''\gamma_1)n} \omega_2^{(\gamma_2'\gamma_2+\gamma_2''\gamma_2)n} \dots,$$

der offenbar zu den Charakteren  $\xi''$  gehört, die ganze Zahl  $s$  so bestimmen, dass  $r'_1 s + r''_1$  nicht durch  $q_1$ ,  $r'_2 s + r''_2$  nicht durch  $q_2$ , u. s. f. und, eventuell,  $\alpha's + \alpha''$  oder  $\beta's + \beta''$  nicht durch 2 teilbar wird. Dadurch aber kommt man zu einem Widerspruch mit der Gleichung (9).

8. Nach n° 2 und n° 6 kann man dem hiermit Bewiesenen den folgenden Ausdruck geben. *Wenn unter den zur Gruppe  $\mathfrak{K}$  gehörigen Perioden  $\eta_h$  mehrere gleiche vorkommen, so muss jeder der Charaktere  $\xi$ , der Gruppe  $\mathfrak{C}$  in einer der Gruppen  $\mathfrak{C}_{q_1}, \mathfrak{C}_{q_2}, \dots, \mathfrak{C}_2$  enthalten sein, (wobei nur diejenigen Primzahlen  $q_1, q_2, \dots$  in Betracht kommen, welche mehrfache Faktoren von  $m$  sind und  $\mathfrak{C}_2$  nur falls  $m$  durch 4 teilbar ist).*

9. Daraus kann nun weiter gefolgert werden, dass unter den Gruppen  $\mathfrak{C}_{q_1}, \mathfrak{C}_{q_2}, \dots, \mathfrak{C}_2$  mindestens eine durch die Gruppe  $\mathfrak{C}$  teilbar ist, und dass folglich  $\mathfrak{K}$  durch eine der Gruppen  $\mathfrak{K}_{q_1}, \mathfrak{K}_{q_2}, \dots, \mathfrak{K}_2$  teilbar ist. Es ist nämlich, wenn  $\chi$  ein beliebiger der Charaktere von  $N$  ist,  $\chi^{q_1}$  in  $\mathfrak{C}_{q_1}$ ,  $\chi^{q_2}$  in  $\mathfrak{C}_{q_2}, \dots, \chi^2$  in  $\mathfrak{C}_2$  enthalten. Nehmen wir nun an, es sei keine der Gruppen  $\mathfrak{C}_{q_1}, \mathfrak{C}_{q_2}, \dots, \mathfrak{C}_2$  durch  $\mathfrak{C}$  teilbar, so kann man die Charaktere  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$  in  $\mathfrak{C}$  so wählen, dass  $\xi_0$  nicht in  $\mathfrak{C}_2$ ,  $\xi_1$  nicht in  $\mathfrak{C}_{q_1}$ ,  $\xi_2$  nicht in  $\mathfrak{C}_{q_2}, \dots$  enthalten ist; dann wäre aber der zusammengesetzte Charakter

$$\xi_0^{q_1 q_2 \dots} \xi_1^{2 q_2 \dots} \xi_2^{2 q_1 \dots} \dots$$

war in  $\mathfrak{C}$ , aber weder in  $\mathfrak{C}_{q_1}$  noch in  $\mathfrak{C}_{q_2} \dots$  noch in  $\mathfrak{C}_2$  enthalten, entgegen dem in n° 8 Bewiesenen.

10. Hieraus folgt nun, dass, wenn man die in § 4, n° 2 charakterisierten Gruppen ausgeschieden hat, unter den conjugierten Perioden niemals mehrere gleiche vorkommen, und dass man also sämtliche Kreiskörper rational durch diese Perioden darstellen kann. Man kann dieselben sogar in einem gewissen Sinne linear durch die Perioden ausdrücken. Denn setzt man allgemein, auch wenn  $a$  nicht relativ prim zu  $m$  ist

$$\eta_a = \sum^k r^{ak}$$

so erhält man, wenn  $k, k'$  von einander unabhängig die Gruppe  $\mathfrak{K}$  durchlaufen, für beliebige  $a, b$ :

$$\eta_a \eta_b = \sum^{k, k'} r^{ak+bk'} = \sum^{k, k'} r^{(ak+b)k'} = \sum \eta_{ak+b}.$$

### § 6. Beweis des Lemma n° 6.

Zur Vervollständigung bleibt uns noch übrig die in n° 6 angeführten Hilfssätze zu beweisen.

I. Ist zunächst  $p$  eine ungerade Primzahl,  $r$  eine primitive Einheitswurzel der Ordnung  $p^{\pi}$ ,  $\omega$  eine solche der Ordnung  $\varphi(p^{\pi})$ ,  $g$  eine primitive Wurzel von  $p^2$ , und für jede durch  $p$  nicht teilbare Zahl  $n$

$$(1) \quad g^n \equiv n \pmod{p^{\pi}}$$

so setzen wir, indem wir  $n$  ein vollständiges System modulo  $p^{\pi}$  in congruenter durch  $p$  nicht teilbarer Zahlen durchlaufen lassen,

$$(2) \quad (\omega^h, r) = \sum_{n=0}^{p-1} \omega^{hn} r^n$$

$$(3) \quad (\omega^h, r^{n'}) = \omega^{-hn'} \sum_{n=0}^{p-1} \omega^{hn} r^n = \omega^{-hn'} (\omega^h, r),$$

und wenn man mit  $r^{n'}$  multipliziert und die Summe nimmt:

$$(4) \quad (\omega^{-h}, r)(\omega^h, r) = \sum_{n=0}^{p-1} \omega^{hn} r^{n'(n+1)}.$$

a) Ist  $n = 1$ , so ist die nach  $n'$  genommene Summe

$$\sum_{n'=0}^{p-1} r^{n'(n+1)} = -1, \quad n < p-1$$

$$= p-1, \quad n = p-1,$$

und da

$$g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p},$$

also für

$$n = p-1, \quad r = \frac{p-1}{2},$$

so folgt

$$(5) \quad (\omega^h, r)(\omega^{-h}, r) = (-1)^h p.$$

Es kann also in diesem Fall  $(\omega^h, r)$  nicht verschwinden.

b) Ist  $n > 1$ , so ist

$$\sum_{n'=0}^{p-1} r^{n'(n+1)}$$

immer dann  $= 0$ , wenn  $n + 1$  nicht durch  $p^{\pi-1}$  teilbar ist, und es ist

$$\text{für } n + 1 = p^\pi, \quad \sum_{r=0}^{p^\pi} r^{n(n+1)} = p^{\pi-1}(p - 1), \quad r = \frac{1}{2}\varphi(p^\pi)$$

$$\text{für } n + 1 = \lambda p^{\pi-1}, \quad \sum_{r=0}^{p^\pi} r^{n(n+1)} = -p^{\pi-1}, \quad r = \frac{1}{2}\varphi(p^\pi) + \nu\varphi(p^{\pi-1}),$$

worin  $\lambda$  und  $\nu$  gleichzeitig ein vollständiges Restsystem modulo  $p$  durchlaufen (mit Ausschluss von 0).

Hier nach wird also

$$(\omega^h, r)(\omega^{-h}, r) = (-1)^h p^\pi - (-1)^h p^{\pi-1} \sum_{\lambda=0, p-1}^{\nu} \omega^{\lambda h} \varphi(p^{\pi-1}),$$

also wenn  $h$  nicht durch  $p$  teilbar ist

$$(6) \quad (\omega^h, r)(\omega^{-h}, r) = (-1)^h p^\pi.$$

Ist aber  $h$  durch  $p$  teilbar, so folgt aus (3)

$$(\omega^h, r^{1+\lambda p^{\pi-1}}) = (\omega^h, r), \quad (\lambda = 0, 1, \dots, p-1)$$

und wenn man die Summe über alle  $\lambda$  bildet,

$$(7) \quad (\omega^h, r) = 0, \quad h \equiv 0 \pmod{p},$$

womit  $\text{n}^o$  6 a) des vorigen § bewiesen ist.

2. Es seien jetzt  $r, \theta$  primitive Einheitswurzeln der Ordnung  $2^\lambda$ ,  $2^{\lambda-2}$ , und für jedes ungerade  $n$

$$(8) \quad (-1)^\alpha 5^\beta \equiv n \pmod{2^\lambda},$$

worin  $\alpha, \beta$  wie in § 5, (1) nach den Moduln  $a, b$  genommen sind. Setzen wir nun

$$(9) \quad [(-1)^h, \theta^k, r] = \sum_{n=0}^{\lambda} (-1)^{ha} \theta^{kb} r^n,$$

dann ergibt sich zunächst direct:

a) Ist  $\lambda = 2$ , so verschwindet  $[(-1)^h, \theta^k, r]$  dann und nur dann wenn  $h \equiv 0 \pmod{2}$ .

b) Ist  $\lambda \geq 3$ , so folgt wie oben

$$(10) \quad [(-1)^h, \theta^k, r^{n'}] = (-1)^{-ha'} \theta^{-kb'} [(-1)^h, \theta^k, r],$$

also:

$$[(-1)^h, \theta^k, r][(-1)^{-h}, \theta^{-k}, r] = \sum_{n,n'}^{n,n'} (-1)^{h\alpha} \theta^{k\beta} r^{n'(1+n)}.$$

Die nach  $n'$  genommene Summe ist nun

$$\begin{aligned} \sum_{n'}^{n'} r^{n'(n+1)} &= 0, \text{ wenn } n+1 \text{ nicht durch } 2^{\lambda-1} \text{ teilbar ist,} \\ &= 2^{\lambda-1} \quad \text{für } n+1 = 2^\lambda, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0 \\ &= -2^{\lambda-1} \quad \text{für } n+1 = 2^{\lambda-1}, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 2^{\lambda-3}, \end{aligned}$$

woraus sich, falls  $k$  ungerade ist,

$$(11) \quad [(-1)^h, \theta^k, r][(-1)^{-h}, \theta^{-k}, r] = (-1)^h 2^\lambda, \quad k \equiv 1 \pmod{2}$$

ergiebt.

Setzt man aber in (10)

$$n' = 1 + 2^{\lambda-1},$$

also

$$r^{n'} = -r, \quad \alpha' = 0, \quad \beta' = 2^{\lambda-3},$$

so folgt

$$[(-1)^h, \theta^k, -r] = (-1)^k [(-1)^h, \theta^k, r],$$

woraus unmittelbar hervorgeht, dass im Falle eines geraden  $k$

$$(12) \quad [(-1)^h, \theta^k, r] = 0, \quad k \equiv 0 \pmod{2},$$

womit also auch n° 6 b) des vorigen § bewiesen ist.

### § 7. Die Ideale der vollständigen Kreiskörper.

Die Primideale oder idealen Primfactoren in den vollständigen Kreiskörpern beliebiger Ordnung hat KUMMER aufgestellt in der Abhandlung: *Theorie der idealen Primfactoren der complexen Zahlen, welche aus Wurzeln der Gleichung  $\omega^n = 1$  gebildet sind, wenn  $n$  eine zusammengesetzte Zahl ist.* (Abh. der Berliner Akademie, 1856.) Das Resultat findet man in anderer Form bei D. § 179 und zwar vollständig abgeleitet für den Fall, dass die Ordnung eine Primzahl ist; man gelangt aber auf wesentlich dem-

selben Weg auch zu den allgemeinen Resultaten, von welchen hier, soviel in der Folge gebraucht wird, zusammengestellt werden soll.

1. Die Potenzen von  $r$ :  $1, r, r^2, \dots, r^{\varphi(m)-1}$  bilden im Körper  $\Omega_m$  eine Basis von  $\mathfrak{o}$ , d. h. es lässt sich jede *ganze* Zahl des Körpers  $\Omega_m$  als ganze rationale Function, höchstens vom Grade  $\varphi(m) - 1$  mit *ganzen rationalen* Zahleoefficienten darstellen.

2. Ein beliebiges Ideal  $\mathfrak{a}$  oder eine Zahl  $\alpha$  des Körpers  $\Omega_m$  geht durch die Substitution  $(r, r^n)$  in ein *conjugiertes* Ideal oder eine conjugierte Zahl über, welche wir mit  $\mathfrak{a}_n, \alpha_n$  bezeichnen, worin  $n$  relativ prim zu  $m$  ist. Die zu einem Primideal conjugierten Ideale sind ebenfalls Primideale und wenn eine ganze rationale Zahl durch irgend ein Ideal teilbar ist, so ist sie auch durch die sämtlichen conjugierten Ideale teilbar.

Ist  $\mathfrak{p}$  ein in der rationalen Primzahl  $p$  aufgehendes Primideal und

$$N(\mathfrak{p}) = p^f$$

so heisst  $\mathfrak{p}$  ein *Primideal  $f^{ten}$  Grades*.

3. Ist  $p'$  die höchste in  $m$  aufgehende Potenz von  $p$ ,  $m = p'm'$ , und gehört  $p$  zum Exponenten  $f \pmod{m'}$ , so ist  $\varphi(m') = ef$ , und  $\mathfrak{op}$  ist die  $\varphi(p')^{te}$  Potenz eines Products von  $e$  von einander verschiedenen Primidealen  $f^{ten}$  Grades.

4. Ist ins Besondere  $p' = 1$ , also  $p$  in  $m$  nicht enthalten, und gehört  $p$  zum Exponenten  $f \pmod{m}$  so zerfällt  $p$  in  $e$  verschiedene Primideale  $f^{ten}$  Grades. Unter den conjugierten Idealen  $\mathfrak{p}_n$  sind

$$\mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_{np}, \mathfrak{p}_{np^2}, \dots, \mathfrak{p}_{np^{f-1}}$$

und nur diese mit einander identisch, woraus hervorgeht dass die  $e$  in  $p$  aufgehenden Primideale conjugiert sind.

5. Die Primideale  $\mathfrak{p}$  sind dann und nur dann vom ersten Grade, wenn

$$p \equiv 1 \pmod{m}.$$

In diesem Falle ist jede ganze Zahl des Körpers  $\Omega_m$  mit einer *ganzen rationalen* Zahl nach  $\mathfrak{p}$  congruent, und wenn  $r$  mit  $a$  congruent ist, so muss  $a$  zum Exponenten  $m$  nach dem Modul  $p$  gehören.<sup>1</sup> Ist daher  $g$  eine primitive Wurzel von  $p$ , so können wir setzen

<sup>1</sup> Ist nämlich  $r \equiv a \pmod{\mathfrak{p}}$ , so folgt  $a^m \equiv 1 \pmod{p}$  und diese Congruenz kann für

$$(1) \quad r \equiv g^{\frac{t-1}{m}} \pmod{\mathfrak{p}_1},$$

woraus folgt:

$$(2) \quad r^n \equiv g^{\frac{p-1}{m}} \pmod{\mathfrak{p}_n}$$

oder, wenn  $n'$  aus der Congruenz

$$(3) \quad mn' \equiv 1 \pmod{m}$$

bestimmt wird

$$(4) \quad r \equiv g^{\frac{-n^{p-1}}{m}} \pmod{\mathfrak{p}_n}$$

wodurch die conjugierten Ideale  $\mathfrak{p}_n$  vollständig charakterisiert sind.

6. Ist  $m = q^k$  eine Primzahlpotenz, so ist  $q$  assciert mit  $(1 - r)^{q(m)}$  und  $\wp(1 - r)$  ein Primideal, also  $\wp q$  die  $\varphi(m)$ te Potenz eines Primideals ersten Grades, und zwar eines *Hauptideals*.

7. Es sei  $m_1$  ein Teiler von  $m$ ,

$$m = m_1 m_2,$$

und folglich  $\mathcal{Q}_{m_1}$  ein Teiler von  $\mathcal{Q}_m$ . Es sei ferner  $p$  eine Primzahl  $\equiv 1 \pmod{m_1}$  und teilerfremd zu  $m$ . Diese Primzahl zerfällt im Körper  $\mathcal{Q}_{m_1}$  in  $\varphi(m_1)$  von einander verschiedene Primideale, die wir mit  $\mathfrak{P}_{n_1}$  bezeichnen, wobei  $n_1$  ein vollständiges System zu  $m_1$  teilerfremder Zahlen durchläuft; setzen wir  $r^{m_2} = r_1$ , so geht  $\mathfrak{P}_{n_1}$  aus  $\mathfrak{P}_1$  hervor durch die Substitution  $(r_1, r_1^n)$ . Die Ideale  $\wp \mathfrak{P}_{n_1}$  sind nun Ideale im Körper  $\mathcal{Q}_m$ , welche der Bedingung genügen

$$\wp \prod \mathfrak{P}_{n_1} = \wp p,$$

und die daher keine anderen idealen Primfactoren enthalten können als die Primfactoren  $\mathfrak{p}_n$  von  $p$  in  $\mathcal{Q}_m$  und die zusammen alle  $\mathfrak{p}_n$  und jeden nur einmal enthalten. Wenn  $\mathfrak{p}_1$  in  $\wp \mathfrak{P}_1$  aufgeht, so geht  $\mathfrak{p}_n$  in  $\wp \mathfrak{P}_n$  auf; da aber  $\mathfrak{P}_n$  ungeändert bleibt, wenn sich der Index um Vielfache von  $m_1$  ändert, so folgt die Zerlegung

$$\wp \mathfrak{P}_1 = \prod^s \mathfrak{p}_{1+sm_1}, \quad \wp \mathfrak{P}_{n_1} = \prod^s \mathfrak{p}_{n_1+sm_1},$$

---

keine niedrigere Potenz von  $a$  stattfinden, weil  $m = \prod_{s=1}^s (1 - r^s)$ , also keiner von den Factoren  $(1 - r^s)$  durch  $p$  teilbar sein kann.

worin sich die Producte nach  $s$  nur soweit zu erstrecken haben, als sie von einander verschiedene Ideale  $\mathfrak{p}_n$  liefern.

8. Ist  $m$  eine Potenz einer ungeraden Primzahl  $q$ , und ist  $m_1 > 1$  der grösste gemeinschaftliche Teiler von  $p - 1$  und  $m$ , so ist

$$p^{m_2} \equiv 1 \pmod{m}$$

und  $m_2$  ist die niedrigste Potenz von  $p$  welche dieser Bedingung genügt, so dass in der Reihe

$$1, p, p^2, \dots, p^{m_2-1}$$

sämmtliche Zahlen von der Form  $1 + sm_1$ ,  $s = 0, 1, \dots, m_2 - 1$ , und, nach dem Modul  $m$  reducirt, jede nur einmal, enthalten sind. Es zerfällt also nach n° 4  $p$  im Körper  $\Omega_{m_1}$  und im Körper  $\Omega_m$  in gleichviel Ideal-factoren und es ist daher

$$\mathfrak{o}\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{o}\mathfrak{P}_{n_1} = \mathfrak{p}_{n_1}.$$

Ist  $q = 2$ , so gilt dasselbe nur unter der Voraussetzung dass  $m_1 \not\equiv 4$  ist; für  $m_1 = 2$  würde der Körper  $\Omega_{m_1}$  mit dem der rationalen Zahlen zusammenfallen.<sup>1</sup>

### § 8. Das Kummer'sche Theorem.

Es sei jetzt  $p$  wie oben eine Primzahl  $\equiv 1 \pmod{m}$ ,  $r$  eine  $m^{\text{te}}$ ,  $r_1$  eine  $p^{\text{te}}$  Einheitswurzel, und  $g$  eine primitive Congruenzwurzel von  $p$ , welche als Basis eines Systems von Indices genommen wird. Setzen wir in den Ausdrücken (2), § 6,  $r_1$  an Stelle von  $r$  und  $r$  an Stelle von  $\omega^h$ , so gehen dieselben über in

$$(1) \quad (r, r_1) = (r, \eta) = \sum r^{\text{ind} \nu} r_1^\nu,$$

ein Ausdruck, der nur von den  $m$  Perioden

$$(2) \quad \eta_\nu = r_1^\nu + r_1^{vgm} + \dots + r_1^{vg^{p-1-m}}$$

<sup>1</sup> Diese Sätze sind ganz specielle Fälle einer allgemeinen Untersuchung von DEDEKIND über die Ideale in den Divisoren eines Normalkörpers, deren baldige Veröffentlichung sehr dankenswert wäre. Vgl. auch DEDEKIND: *Sur la théorie des nombres entiers algébriques*, § 27 (Bulletin des sciences mathématiques 1877); *Comptes rendus* der Pariser Akademie vom 24<sup>ten</sup> Mai 1880.

abhängig ist. Ersetzt man in demselben  $r_1$  durch  $r_1^\nu$ , so folgt:

$$(3) \quad (r, \eta_\nu) = r^{-\text{ind}\nu} (r, \eta),$$

woraus hervorgeht, dass

$$(4) \quad (r, \eta)^m, \quad (r^n, \eta)(r, \eta)^{m-n}, \quad (r^a, \eta)^a (r^b, \eta)^b \dots$$

ganze Zahlen des Körpers  $\Omega_m$  sind, wenn  $a, a', b, b', \dots$  ganze positive der Bedingung  $aa' + bb' + \dots \equiv 0 \pmod{m}$  genügende Zahlen bedeuten.

Aus der Formel (5), § 6

$$(5) \quad (r^n, \eta)(r^{-n}, \eta) = \pm p$$

folgt, dass in den Zahlen  $(r^n, \eta)^m$  keine anderen Primideale aufgehen als solche, die auch in  $p$  enthalten sind, und es ist eine schöne und wichtige Entdeckung von KUMMER,<sup>1</sup> dass die Zerlegung dieser Zahlen in ihre Primfactoren vollständig durchgeführt werden kann. Da diese Zerlegung für unsere Aufgabe von der grössten Bedeutung ist, so soll dieselbe hier reproduziert werden.

Multipliciert man die Gleichung (3) mit  $r^{(s+1)\text{ind}\nu} r_1^\nu$  und nimmt die Summe über alle positiven  $\nu$ , die kleiner als  $p$  sind, so folgt wegen (1)

$$(6) \quad (r^s, \eta)(r, \eta) = \sum_{1, p-1}^{\nu, \nu'} r^{(s+1)\text{ind}\nu + \text{ind}\nu'} r_1^{\nu(\nu'+1)};$$

für  $\nu' = p - 1$  verschwindet die nach  $\nu$  genommene Summe, falls, wie vorausgesetzt sein soll,  $r$  eine primitive  $m^{\text{te}}$  Einheitswurzel und  $s + 1$  durch  $m$  nicht teilbar ist. Wir können daher die linke Seite von (6) nach (3) so schreiben:

$$\sum_{1, p-2}^{\nu'} r^{\text{ind}\nu'} (r^{s+1}, \eta_{\nu'+1}) = (r^{s+1}, \eta) \sum_{1, p-2}^{\nu} r^{\text{ind}\nu - (s+1)\text{ind}(\nu+1)},$$

und erhalten also:

$$(7) \quad \frac{(r^s, \eta)(r, \eta)}{(r^{1+s}, \eta)} = \sum_{1, p-2}^{\nu} r^{\text{ind}\nu - (s+1)\text{ind}(\nu+1)} = \psi_s(r),$$

so dass  $\psi_s(r)$  eine ganze Zahl in  $\Omega_m$  ist.

---

<sup>1</sup> In der oben zitierten Abhandlung. Vgl. auch BACHMANN, die Lehre von d. Kreisteilung, XIX. Vorlesung.

Wenden wir (7) an auf  $s = 1, 2, \dots, m-2$ , so folgt:

$$(r, \eta)(r, \eta) = (r^2, \eta)\psi_1(r),$$

$$(r, \eta)(r^2, \eta) = (r^3, \eta)\psi_2(r),$$

$$(r, \eta)(r^{m-2}, \eta) = (r^{m-1}, \eta)\psi_{m-2}(r),$$

und durch Multiplikation

$$(r, \eta)^{m-1} = (r^{-1}, \eta)\psi_1(r)\psi_2(r) \dots \psi_{m-2}(r),$$

woraus endlich noch mittels (5) folgt:

$$(8) \quad (r, \eta)^m = \pm p\psi_1(r)\psi_2(r) \dots \psi_{m-2}(r).$$

Der in (7) enthaltene Ausdruck von  $\psi_s$  muss nun noch umgeformt werden.  
Setzt man

$$(9) \quad \text{ind } \nu - \text{ind}(1 + \nu) \equiv \nu' \pmod{p-1}$$

so durchläuft  $\nu'$  gleichzeitig mit  $\nu$ , wenn auch in anderer Ordnung, die Zahlen  $1, 2, \dots, p-2$ , da von den Werten der linken Seite von (9) nicht zwei unter einander und keine der Null congruent sind nach dem Modul  $p-1$ . Es ist dann ferner

$$g^{\nu'} \equiv \nu g^{-\text{ind}(1+\nu)} \pmod{p}$$

oder

$$(1 + \nu)g^{\nu'} \equiv \nu \pmod{p}, \quad (1 + \nu)(1 - g^{\nu'}) \equiv 1 \pmod{p},$$

also

$$\text{ind}(1 + \nu) \equiv -\text{ind}(1 - g^{\nu'}) \pmod{p-1},$$

und hiernach lässt sich (7), wenn man wieder  $\nu$  an Stelle von  $\nu'$  setzt, so darstellen:

$$(10) \quad \psi_s(r) = \sum_{1, p-2}^{\nu} r^{\nu + s \text{ind}(1-g^{\nu})}.$$

Ist nun  $\mathfrak{p}_n$  eines der in  $p$  aufgehenden Primideale und also (nach n° 5 (4) § 7)

$$(11) \quad r \equiv g^{-n'p-1} \pmod{\mathfrak{p}_n}, \quad mn' \equiv 1 \pmod{m}$$

so folgt aus (10), wenn wir mit

$$(11) \quad \begin{array}{ccccccccc} \sigma & \text{den kleinsten positiven Rest von} & -sn' \frac{p-1}{m} \\ \tau & \gg & \gg & \gg & \gg & \gg & n' \frac{p-1}{m} \\ & & & & & & [\text{mod } (p-1)] \end{array}$$

bezeichnen, so dass  $\sigma$ , so lange  $s+1 < m$  ist, niemals  $= \tau$  sein kann,

$$(12) \quad \psi_s \equiv \sum_{0, p=2}^{\nu} g^{-\nu\tau} (1 - g^\nu)^\sigma \pmod{\mathfrak{p}_n},$$

wobei das dem  $\nu = 0$  entsprechende Glied als verschwindend beigefügt werden kann. Entwickelt man diese Formel nach dem binomischen Satze, so ergibt sich

$$(13) \quad \psi_s \equiv \sum_{0, p=2}^{\nu} \sum_{0, \sigma}^{\nu'} (-1)^{\nu'} \frac{\Pi(\sigma)}{\Pi(\nu') \Pi(\sigma - \nu')} g^{\nu(\nu' - \tau)} \pmod{\mathfrak{p}_n}.$$

Nun ist die nach  $\nu$  genommene Summe nach dem Modul  $p$  mit 0 congruent, wenn  $\nu'$  nicht  $= \tau$  ist, und mit  $-1$  für  $\nu' = \tau$ , und daraus folgt:

$$(14) \quad \begin{aligned} \psi_s &\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_n}, & \sigma < \tau \\ \psi_s &\equiv (-1)^{\tau+1} \frac{\Pi(\sigma)}{\Pi(\tau) \Pi(\sigma - \tau)} \pmod{\mathfrak{p}_n}, & \sigma > \tau, \end{aligned}$$

im letzteren Fall also  $\psi_s$  nicht durch  $\mathfrak{p}_n$  teilbar. Ist  $n + n_1 \equiv 0 \pmod{m}$ , so ist  $\sigma + \sigma_1 \equiv \tau + \tau_1 \equiv 0 \pmod{(p-1)}$  also  $(\sigma - \tau) + (\sigma_1 - \tau_1) = 0$ , so dass also  $\psi_s$  von zweien Idealen  $\mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_{-n}$  immer durch eines und nur durch eines teilbar ist.

Da ferner aus (7) mittels (5) hervorgeht

$$(15) \quad \psi_s(r) \psi_s(r^{-1}) = p,$$

so folgt, dass  $\psi_s(r)$  nicht durch das Quadrat eines Primideals teilbar ist. Hierdurch findet sich leicht die Zerlegung von

$$(r, \eta)^m = \pm p \psi_1(r) \psi_2(r) \dots \psi_{m-2}(r),$$

indem man abzählt, wie oft ein Primideal  $\mathfrak{p}_n$  in dem Product auf der rechten Seite vorkommt.

Verstehen wir unter  $t, t'$  die *kleinsten positiven Reste* von  $n, n'$  nach dem Modul  $m$ , so ist

$$\tau = t' \frac{p - 1}{m}$$

und die kleinsten positiven Reste von  $-n', -2n', \dots, -(m-2)n'$  nach dem Modul  $m$  sind

$$1, 2, t' - 1, t' + 1, \dots, m - 1.$$

Unter diesen sind  $t' - 1$ , welche kleiner als  $t'$  sind, und ebenso oft kommt also  $\mathfrak{p}_t$  in  $\phi_1\phi_2 \dots \phi_{m-2}$  vor. Dazu kommt noch einmal der Factor  $\mathfrak{p}_t$  in  $p$ , und daher:

$$(16) \quad \mathfrak{o}(r, \eta)^m = \prod^t \mathfrak{p}_i,$$

worin  $t'$  die *kleinste positive Zahl* ist, welche der Bedingung

$$(17) \quad tt' \equiv 1 \pmod{m}$$

genügt, wodurch die gesuchte Zerlegung gefunden ist. Wir bemerken zu derselben nur noch, dass man über die Einheitswurzel  $r$  oder über  $g$  so verfügen kann, dass unter den conjugierten Factoren von  $p$  jeder beliebige an die Stelle von  $\mathfrak{p}_1$  tritt, wie aus § 7, n° 5 sofort hervorgeht.

Der hierdurch bewiesene Satz ist namentlich deshalb von Wichtigkeit, weil er ganz allgemein ausser der Primzahl  $p$  selbst gewisse Combinationen der conjugierten Primideale  $\mathfrak{p}_n$  kennen lehrt, welche *Hauptideale* sind.

### § 9. Von den Einheiten im Körper $\mathcal{Q}_m$ .

Wir schliessen diese Betrachtungen mit dem Beweis zweier Sätze über die Einheiten in den vollständigen Kreiskörpern, welche ebenfalls, wenigstens für den Fall dass die Ordnung des Körpers eine Primzahl ist, von KUMMER bewiesen sind.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Vgl. KUMMER: *Bestimmung der Anzahl nicht äquivalenter Classen für die aus  $\lambda^{10}$  Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen und die idealen Factoren derselben. Zwei besondere Untersuchungen über die Classenzahl und über die Einheiten der aus  $\lambda^{10}$*

1. Ist  $\mathcal{E}(r)$  eine ganze Zahl des Körpers  $\mathcal{Q}_m$ , welche der Bedingung genügt

$$(1) \quad \mathcal{E}(r)\mathcal{E}(r^{-1}) = 1,$$

so ist notwendig

$$(2) \quad \mathcal{E}(r) = \pm r^\nu$$

worin  $\nu$  ein ganzzahliger Exponent ist. In Folge der Formel (1) ist nämlich  $\mathcal{E}(r)$  eine *reduzierte Einheit* des Körpers  $\mathcal{Q}_m$  und mithin eine Einheitswurzel (vgl. D., § 177, S. 566). Ist also  $\mathcal{E}(r) = \pm \rho$ , so muss der aus  $\rho$  entspringende vollständige Kreiskörper ein Teiler von  $\mathcal{Q}_m$  sein, und folglich muss  $\rho$  eine Potenz von  $r$  sein. (§ 4, n° 1.)

2. Ist  $m = q^k$  eine Primzahlpotenz, so ist jede Einheit  $\mathcal{E}(r)$  des Körpers  $\mathcal{Q}_m$  in der Form darstellbar

$$(3) \quad \mathcal{E}(r) = r^\nu e(r)$$

worin  $e(r)$  eine *reelle Einheit*, d. h. eine Einheit ist, welche der Bedingung

$$(4) \quad e(r) = e(r^{-1})$$

genügt, und folglich nur von den zweigliedrigen Perioden

$$r + r^{-1}$$

abhängt. Um dies zu beweisen, wenden wir den Satz n° 1 auf den Quotienten  $\mathcal{E}(r):\mathcal{E}(r^{-1})$  an, wodurch sich ergiebt:

$$(5) \quad \mathcal{E}(r) = \pm r^\nu \mathcal{E}(r^{-1}).$$

a) Ist zunächst  $q$  ungerade, so kann  $\nu$  gerade angenommen werden, da man  $\nu$  eventuell durch  $\nu + m$  ersetzen kann, und es lässt sich zeigen, dass in (5) das untere Zeichen unzulässig ist; denn nach § 7, n° 6 ist  $\mathfrak{o}(1 - r)$  ein in  $q$  aufgehendes Primideal, und aus (5) folgt

$$\mathcal{E}(r) \equiv \mathcal{E}(1) \equiv \pm \mathcal{E}(1) [\text{mod } \mathfrak{o}(1 - r)],$$

---

*Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen*, beide in CRELLE's Journal, Bd. 40.  
*Mémoire sur la théorie des nombres complexes composés de racines de l'unité et de nombres entiers*, Journal de LIOUVILLE, T. XVI.

woraus für das untere Zeichen folgen würde

$$\mathcal{E}(r) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{o}(1-r)}.$$

Es könnte also  $\mathcal{E}(r)$  keine Einheit sein; also hat

$$(6) \quad e(r) = r^{-\frac{1}{2}\nu} \mathcal{E}(r)$$

die in (4) verlangte Eigenschaft.

b) Ist  $q = 2$ , so ist  $r^{\frac{1}{2}m} = -1$ , und man kann daher (5) in der Form schreiben

$$(7) \quad \mathcal{E}(r) = r^\nu \mathcal{E}(r^{-1}).$$

Es ist jetzt zu zeigen, dass  $\nu$  gerade sein muss. Wäre  $\nu$  ungerade, so würde aus (7) durch Vertauschung von  $r$  mit  $-r$  folgen

$$\frac{\mathcal{E}(r)}{\mathcal{E}(-r)} = -\frac{\mathcal{E}(r^{-1})}{\mathcal{E}(-r^{-1})} = e(r) = -e(r^{-1}).$$

Die Einheit  $e(r)$  würde sich also als lineare und homogene Function von

$$(r - r^{-1}), (r^2 - r^{-2}), \dots, \left(r^{\frac{1}{2}m} - r^{-\frac{1}{2}m}\right)$$

mit ganzzahligen Coefficienten darstellen lassen. (§ 7, n° 1.) Es wäre also

$$e(r) \equiv e(1) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{o}(1-r)}$$

was dem Begriff der Einheit widerspricht. Setzt man daher

$$(8) \quad r^{-\frac{1}{2}\nu} \mathcal{E}(r) = e(r)$$

so genügt diese Zahl der in (4) gestellten Forderung.

Ist  $m$  eine zusammengesetzte Zahl, so findet der in n° 2 ausgesprochene Satz nicht mehr statt.

3. Ist  $m$  wieder eine Potenz von 2, so findet sich unter den mit  $r$  conjugierten Zahlen auch  $-r$ . Eine Zahl, die durch die Substitution  $(r, -r)$  ungeändert bleibt, gehört dem Körper  $\Omega_{\frac{m}{2}}$  an, während eine

Zahl, welche durch diese Substitution ihr Zeichen ändert, durch Multiplikation mit  $r$  in eine Zahl des Körpers  $\Omega_{\frac{m}{2}}$  verwandelt wird. Es lässt sich

nun auf dem in b) eingeschlagenen Wege beweisen, dass bei einer reellen Einheit dieser letztere Fall nicht eintreten kann, dass also eine Einheit  $\mathcal{E}(r)$  des Körpers  $\mathcal{Q}_m$  nicht gleichzeitig die beiden Bedingungen

$$\mathcal{E}(r) = \mathcal{E}(r^{-1}), \quad \mathcal{E}(r) = -\mathcal{E}(-r)$$

erfüllen kann; denn es würde eine solche Function linear und homogen mit ganzzahligen Coefficienten darstellbar sein durch

$$(r + r^{-1}), (r^3 + r^{-3}), (r^5 + r^{-5}), \dots$$

und folglich wäre

$$\mathcal{E}(r) \equiv \mathcal{E}(1) \equiv \mathcal{E}(-1) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{o}(1-r)}$$

was bei einer Einheit nicht möglich ist.

**II. ÜBER DIE ANZAHL DER IDEALCLASSEN UND DIE EINHEITEN  
IN DEN KREISKÖRPERN, DEREN ORDNUNG EINE POTENZ  
VON 2 IST.**

In den grundlegenden Arbeiten über die idealen Primfactoren der complexen Zahlen hat KUMMER die Anzahl der Idealklassen in den Kreiskörpern von Primzahlordnung bestimmt.

In der vorliegenden Arbeit soll nach denselben Prinzipien eine Untersuchung über die Anzahl der Idealklassen durchgeführt werden für den einfachsten Fall, in welchem die Ordnung eine zusammengesetzte Zahl ist, nämlich eine Potenz von 2, welche für die spätere Anwendung auf die Theorie der Abel'schen Körper notwendig ist, wohl aber auch einiges selbständige Interesse beanspruchen kann. Die vorhergehende Abhandlung über Abel'sche Körper und Kreiskörper soll mit I citiert werden.

### § 1. Erster Ausdruck für die Anzahl der Idealklassen.

Es sei  $\lambda$  eine positive ganze Zahl, grösser als 2, und wir setzen

$$(1) \quad m = 2^\lambda, \quad \nu = 2^{\lambda-2}, \quad \mu = 2^{\lambda-3}, \quad \varphi(m) = 2^{\lambda-1}.$$

Es sei  $r$  eine primitive  $m^{\text{te}}$  Einheitswurzel, also eine Wurzel der irreduziblen Gleichung

$$(2) \quad x^{2^\lambda-1} + 1 = 0$$

und  $\Omega_m$  oder  $\Omega_\lambda$  oder kurz  $\Omega$  der vollständige Kreiskörper der Ordnung  $m$ .

Bezeichnen wir mit  $\mathfrak{a}$  die sämmtlichen Ideale des Körpers  $\Omega$ , mit  $N(\mathfrak{a})$  ihre Normen, so hängt die Bestimmung der Anzahl  $h$  der Idealklassen des Körpers  $\Omega$  ab von der Bestimmung des Grenzwertes

$$(3) \quad \lim_{s \rightarrow 1^-} (s - 1) \sum \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s} = gh,$$

worin  $g$  ein Zahlenfactor ist, dessen Definition und Bestimmung weiter unten zur Sprache kommen wird.

Die in (3) vorkommende Summe lässt sich zunächst in ein unendliches Product umwandeln, welches auf alle Primideale  $\mathfrak{p}$  des Körpers  $\Omega$  erstreckt ist<sup>1</sup>

$$(4) \quad \sum \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s} = \prod \frac{1}{1 - N(\mathfrak{p})^{-s}}.$$

Nun ist (vgl. I, § 7, n° 4, n° 6) unter den Idealen  $\mathfrak{p}$  zunächst enthalten das Hauptideal  $\mathfrak{o}(1 - r)$ , dessen Norm = 2 ist. Wenn ferner  $p$  eine Primzahl ist, welche  $(\text{mod } m)$  zum Exponenten  $2^k$  gehört ( $k \leq \lambda - 2$ ), so zerfällt  $\mathfrak{o}p$  in  $2^{\lambda-k-1}$  verschiedene Primideale vom Grade  $2^k$ , deren Norm also =  $p^{2^k}$  ist. Demnach wird

$$(5) \quad \sum \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s} = \frac{1}{1 - 2^{-s}} \prod \frac{1}{(1 - p^{-s2^k})^{2^{\lambda-k-1}}},$$

worin das Product  $\prod$  sich auf alle ungeraden Primzahlen  $p$  erstreckt.

<sup>1</sup> Vgl. D., S. 578 f.

Wir betrachten nun die Gruppe  $N$  der nach dem Modul  $m$  genommenen ungeraden Zahlen  $n$ ; deren Grad  $2^{k-1}$  ist, und ihre Charaktere  $\chi(n)$ . Ist  $n$  eine zum Exponenten  $2^k$  gehörige Zahl, so bilden die Potenzen von  $n$  einen Divisor von  $N$  vom Grade  $2^k$ , und unter den Charakteren  $\chi$  giebt es (I, § 3, n° 3) genau  $2^{k-k-1}$  welche der Bedingung

$$\chi(n) = 1$$

genügen. Die sämtlichen Charaktere  $\chi$  zerfallen also in  $2^k$  Reihen, deren jede nur solche  $\chi$  enthält, für welche  $\chi(n)$  einen und denselben Wert hat, während dieser Wert für die verschiedenen Reihen verschieden ist. Da überdies alle  $\chi(n)$  (wegen  $n^{2^k} \equiv 1 \pmod{m}$ )  $2^k$ te Einheitswurzeln sind, so folgt:

Unter den  $2^{k-1}$  Werten  $\chi(n)$  kommt jede  $2^k$ te Einheitswurzel und jede genau  $2^{k-k-1}$  mal vor. Dies Resultat können wir auch, wenn  $x$  eine beliebige Variable bedeutet, so schreiben:

$$(6) \quad (1 - x^{2^k})^{2^{k-k-1}} = \prod_{\chi} [1 - \chi(n)x],$$

worin das Product sich auf alle Charaktere  $\chi$  erstreckt, und  $n$  eine beliebige zum Exponenten  $2^k$  gehörige Zahl bedeutet. Setzen wir  $x = p^{-s}$  und  $n = p$ , so nimmt hiernach die Formel (5) die Gestalt an:

$$(7) \quad \sum \frac{1}{N(\alpha)^s} = \frac{1}{1 - 2^{-s}} \prod_{\chi} \prod_{n=1}^p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Entwickelt man, ähnlich wie in (5) die einzelnen Factoren auf der rechten Seite von (7) nach Potenzen von  $p^{-s}$  und vereinigt dieselben dann durch Multiplication, so folgt wie dort

$$(8) \quad \sum \frac{1}{N(\alpha)^s} = \frac{1}{1 - 2^{-s}} \prod_{\chi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

worin jetzt die Summen rechts auf alle ungeraden Zahlen  $n$  und das Product auf alle Charaktere  $\chi$  zu erstrecken ist.

Setzt man dies in (3) ein, so kann der Grenzübergang ausgeführt werden; es ist nämlich

$$(9) \quad \lim_{s \rightarrow 1} \frac{s-1}{1-2^{-s}} \sum \frac{1}{n^s} = 1,$$

$$(10) \quad \lim_{s \rightarrow 1} \sum \frac{\chi(n)}{n^s} = \sum \frac{\chi(n)}{n},$$

wenn in (10) der Hauptcharakter ausgeschlossen wird und rechts die unendlichen Reihen nach der Größenfolge der Zahlen  $n$  angeordnet sind. (*D.*, § 110, 117.) Demnach ergiebt sich aus (3), wenn in dem Product  $\prod$  jetzt der *Hauptcharakter ausgeschlossen wird*

$$(11) \quad gh = \prod^{\chi} \sum \frac{\chi(n)}{n}.$$

## § 2. Fortsetzung.

Nach I, § 5, n° 1 erhält man die Charaktere  $\chi(n)$  folgender Maassen. Es seien  $\alpha, \beta$  die Indices von  $n$ , also:

$$(1) \quad (-1)^{\alpha} 5^{\beta} \equiv n \pmod{2^{\lambda}}, \quad \alpha \pmod{2}, \quad \beta \pmod{2^{\lambda-2}}$$

und es sei  $\varepsilon = \pm 1$ ,  $\theta$  eine beliebige  $2^{\lambda-2}$ te Einheitswurzel, so hat man in (11) des vorigen Paragraphs alle Ausdrücke von der Form zu setzen

$$(2) \quad \chi(n) = \varepsilon^{\alpha} \theta^{\beta}$$

mit alleiniger Ausnahme von  $\varepsilon = +1, \theta = +1$ .

Die in (11) auftretenden Summen zerfallen dann, je nach den Werten von  $\theta, \varepsilon$  in verschiedene Classen. Setzen wir nämlich, wenn  $\theta$  sämtliche primitive  $2^{\lambda-2}$ te Einheitswurzeln durchläuft

$$(3) \quad P_{\lambda} = \prod^{\theta} \sum \frac{\chi(n)}{n}, \quad \varepsilon = +1,$$

$$Q_{\lambda} = \prod^{\theta} \sum \frac{\chi(n)}{n}, \quad \varepsilon = -1,$$

so erhält man, da die Indices für den Modul  $2^k$  denen für den Modul  $2^{\lambda}$ , falls  $k < \lambda$  ist, nach den Modul  $2^k$  congruent sind, die sämtlichen in (11) vorkommenden Factoren, wenn man in  $P_{\lambda}$  3, 4, ...,  $\lambda$ , und in  $Q_{\lambda}$  2, 3, 4, ...,  $\lambda$  für  $\lambda$  setzt. Demnach wird

$$(4) \quad gh = Q_2 P_3 Q_3 P_4 Q_4 \dots P_{\lambda} Q_{\lambda}.$$

Für  $Q_2$  erhält man direct den Wert

$$(5) \quad Q_2 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

und wir können daher bei der ferneren Berechnung von  $P_\lambda$ ,  $Q_\lambda$  stets  $\lambda \geq 3$  voraussetzen.

Um die Summen  $P_\lambda$ ,  $Q_\lambda$  zu bestimmen, setzen wir (D., Seite 596)

$$(6) \quad \sum_{t=1}^{\lambda} \chi(t) x^t = f(x),$$

worin  $t$  alle ungeraden Zahlen die kleiner als  $m$  sind, durchläuft, so dass, da

$$\chi(t + 2^{k-1}) = -\chi(t)$$

$f(x)$  verschwindet, sobald für  $x$  eine nicht primitive  $m^{\text{te}}$  Einheitswurzel oder Null gesetzt wird. Dann ergibt sich

$$(7) \quad \sum_{n=1}^{\lambda} \frac{\chi(n)}{n} = \int_0^1 \frac{f(x) dx}{x(1-x^m)} = -\frac{1}{m} \sum_{t=1}^{\lambda} f(r^t) \log(1 - r^{-t}),$$

worin die Logarithmen so zu nehmen sind, dass ihre imaginären Bestandteile in dem Intervall  $\pm \frac{\pi}{2}i$  liegen.

Nun ist aber nach der in I, § 6, (9) eingeführten Bezeichnung

$$(8) \quad f(r) = \sum_{t=1}^{\lambda} \varepsilon^\alpha \theta^\beta r^t = (\varepsilon, \theta, r),$$

worin  $\alpha, \beta$  die Indices von  $t$  sind, und also (I, § 6, (10))

$$(9) \quad f(r') = \varepsilon^{-\alpha} \theta^{-\beta} f(r),$$

und folglich

$$(10) \quad \sum_{n=1}^{\lambda} \frac{\chi(n)}{n} = -\frac{1}{m} (\varepsilon, \theta, r) \sum_{t=1}^{\lambda} \varepsilon^{-\alpha} \theta^{-\beta} \log(1 - r^{-t}).$$

Diese Formel gilt auch noch für  $\lambda = 2$  und giebt wie oben

$$(11) \quad Q_2 = \frac{\pi}{4}.$$

Ferner ergibt sich aus (10) für  $\lambda = 3$

$$(12) \quad Q_3 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \dots = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$(13) \quad P_3 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \dots = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log(\sqrt{2}+1).$$

Ist  $\lambda > 3$ , so kommen die Factoren in den Producten  $P_\lambda$ ,  $Q_\lambda$  stets paarweise vor, so dass zwei Factoren, welche den Werten  $\theta$ ,  $\theta^{-1}$  in  $\chi$  entsprechen, ein Paar bilden, und bei der Berechnung dieser Paare hat man die in I, § 6, (11) bewiesene Formel

$$(14) \quad (\varepsilon, \theta, r)(\varepsilon, \theta^{-1}, r) = \varepsilon m$$

zu benutzen.

### § 3. Bestimmung der Factoren $Q_\lambda$ .

Die Berechnung der  $P_\lambda$  und  $Q_\lambda$ , ( $\lambda \geq 4$ ) gestaltet sich verschieden. Wir beginnen mit  $Q_\lambda$ , und setzen zur Vereinfachung

$$(1) \quad \varphi(\theta) = \frac{-m}{2\pi i} \sum_{t=1}^{\lambda} (-1)^a \theta^{-\beta} \log(1 - r^{-t}),$$

so dass nach (3), (10), (14) § 2:

$$(2) \quad Q_\lambda = \frac{(2\pi)^n}{m^{3/2\lambda-4}} \prod_{t=1}^{\lambda} \varphi(\theta).$$

Um  $\varphi(\theta)$  zu berechnen, bemerken wir, dass durch die Vertauschung von  $t$  mit  $m-t$ , der Index  $a$  in  $a+1$  übergeht, während  $\beta$  ungeändert bleibt, und daher erhält man für  $\varphi(\theta)$  auch

$$(3) \quad \varphi(\theta) = \frac{m}{2\pi i} \sum_{t=1}^{\lambda} (-1)^a \theta^{-\beta} \log(1 - r^t),$$

und durch Addition beider Ausdrücke

$$(4) \quad \varphi(\theta) = \frac{m}{4\pi i} \sum_{t=1}^{\lambda} (-1)^a \theta^{-\beta} \log(-r^t),$$

worin der nunmehr rein imaginäre Logarithmus in dem Intervall  $\pm \pi i$  liegt. Wir können also setzen

$$(5) \quad \begin{aligned} -r^t &= e^{\pi i \left( \frac{2t}{m} - 1 \right)} \\ \log(-r^t) &= \pi i \left( \frac{2t}{m} - 1 \right), \end{aligned}$$

und  $t$  ist alsdann, wie oben, der *kleinste positive Rest* von

$$(-1)^\alpha 5^\beta \pmod{m}.$$

Dann wird, da  $\sum (-1)^\alpha \theta^{-\beta}$  verschwindet:

$$(6) \quad \varphi(\theta) = \frac{1}{2} \sum' (-1)^\alpha \theta^{-\beta} t.$$

Zwei Werte von  $t$ , welche denselben  $\beta$ , aber verschiedenen Werten von  $\alpha$  entsprechen, ergänzen einander zu  $m$ , und da auch  $\sum \theta^\beta$  verschwindet, so ist

$$(7) \quad \varphi(\theta) = \sum_{0, \mu=1}^{\beta} \theta^{-\beta} t,$$

wenn  $t$  den kleinsten positiven Rest von  $5^\beta \pmod{m}$  bedeutet. Der Ausdruck (7) lässt sich aber noch weiter vereinfachen. Es ist nämlich

$$(8) \quad \varphi(\theta) = \sum_{0, \mu=1}^{\beta} \theta^{-\beta} t + \sum_{\mu, \nu=1}^{\beta} \theta^{-\beta} t.$$

Setzt man in der letzten Summe  $\beta + \mu$  an Stelle von  $\beta$  und bezeichnet den *kleinsten positiven Rest* von  $5^{\beta+\mu} \pmod{m}$  mit  $t_1$ , so folgt, da  $\theta^\alpha = -1$  ist:

$$(9) \quad \varphi(\theta) = \sum_{0, \mu=1}^{\beta} \theta^{-\beta} (t - t_1).$$

Es ist darin

$$(10) \quad t_1 - t \equiv 5^\beta (5^\mu - 1) \pmod{m},$$

also  $t_1 \equiv t$  nach dem Modul  $2^{\lambda-1}$ , aber nicht nach dem Modul  $2^\lambda$ . Es ist daher

$$(11) \quad t = t_1 + \varepsilon_\beta 2^{\lambda-1}$$

und  $\varepsilon_\beta = \pm 1$ , je nachdem  $t \geq 2^{\lambda-1}$  ist, da sowohl  $t$  als  $t_1$  positiv und kleiner als  $m$  sind.

Wir erhalten also nach (9)

$$(12) \quad \varphi(\theta^{-1}) = 2^{\lambda-1} (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \theta + \dots + \varepsilon_{\mu-1} \theta^{\mu-1}).$$

und

$$(13) \quad (1 - \theta)\varphi(\theta^{-1}) = m \left( \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{\mu-1}}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{2} \theta + \dots + \frac{\varepsilon_{\mu-1} - \varepsilon_{\mu-2}}{2} \theta^{\mu-1} \right).$$

Der Ausdruck

$$(14) \quad \psi(\theta) = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{\mu-1}}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{2} \theta + \dots + \frac{\varepsilon_{\mu-1} - \varepsilon_{\mu-2}}{2} \theta^{\mu-1}$$

ist nun eine *ganze Zahl* des Körpers  $\Omega_{\lambda-2}$ , und es ist, wenn die Normen

$$(15) \quad N_{\lambda-2}\psi(\theta) = a_{\lambda}, \quad N_{\lambda-2}(1 - \theta) = 2$$

sich auf diesen Körper beziehen, nach (2)

$$(16) \quad Q_{\lambda} = \frac{\pi^{\mu} a_{\lambda}}{2^{\nu^{2\lambda-4}}}.$$

Es ist aber

$$(17) \quad \psi(\theta) \equiv \varepsilon_{\mu-1} \equiv \pm 1 \pmod{(1 - \theta)},$$

folglich  $\psi(\theta)$  nicht durch  $(1 - \theta)$  teilbar; also auch die Norm von  $\psi(\theta)$  nicht teilbar durch 2, woraus folgt, dass  $a_{\lambda}$  eine *ungerade ganze Zahl* ist; diese Zahl lässt sich für die ersten Fälle verhältnismässig leicht aus (14) und (15) berechnen; man findet so z. B.

$$a_4 = 1, \quad a_5 = 1, \quad a_6 = 17, \quad a_7 = 21121.$$

#### § 4. Bestimmung der Factoren $P_{\lambda}$ .

Um  $P_{\lambda}$  zu finden, fassen wir in der Summe auf der rechten Seite von (10) § 2, je vier Glieder zusammen, welche einem Wertpaar  $\beta$  und  $\beta + \mu$  entsprechen und erhalten, da  $\theta^{\mu} = -1$  ist, und da in dem Product  $\theta$  mit  $\theta^{-1}$  vertauscht werden kann, nach § 2, (3), (10), (14)

$$(1) \quad P_{\lambda} = \frac{1}{m^{2\lambda-4}} \prod_{\mu=1}^{\theta} \sum_{\beta=1}^{\mu} \theta^{\beta} \log \frac{(1 - r^n)(1 - r^{-n})}{(1 + r^n)(1 + r^{-n})},$$

worin  $n \equiv 5^{\beta} \pmod{m}$ . (Es ist hier  $n$  für  $t$  geschrieben, um anzudeuten dass es auf ein Vielfaches von  $m$  nicht ankommt.)

Die unter dem Logarithmus auftretenden Quotienten  $(1 - r^n):(1 + r^n)$  sind *Einheiten* des Körpers  $\Omega_\lambda$ , die sich nach I, § 9, von einer Einheitswurzel abgesehen, durch die zweigliedrigen Perioden  $r + r^{-1}$  ausdrücken lassen. In der That ist, wenn man

$$(2) \quad r = e^{\frac{2\pi i}{m}}$$

setzt:

$$(3) \quad \frac{1 - r^n}{1 + r^n} = r^{-2n} \frac{r^{(1-n)} + r^{(-1-n)}}{2 + r^n + r^{-n}} = r^{-2n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{tg} \frac{n\pi}{m},$$

und wir wollen nunmehr die folgende Bezeichnung einführen:

wird  $\beta$  aus einer der beiden Congruenzen

$$(4) \quad n \equiv \pm 5^\beta \pmod{m}$$

bestimmt, so sei

$$(5) \quad \tau_\beta = r^{2n} \frac{1 - r^n}{1 + r^n} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{tg} \frac{n\pi}{m} = \operatorname{tg} \left( 5^\beta \frac{\pi}{m} \right).$$

Die Functionen  $\tau_\beta$  bilden ein System von  $\nu$  reellen Einheiten des Körpers  $\Omega_\lambda$ , welche durch die Substitution  $(r, r^{-1})$  ungeändert bleiben, und durch die Substitution  $(r, r^n)$  in  $\tau_{\beta+\beta'}$  übergehen, wenn  $\beta'$  von  $n'$  so abhängt wie  $\beta$  von  $n$ . Insbesondere hat man noch die Relationen (da  $5^\mu \equiv 1 + 2^{k-1} \pmod{m}$ )

$$(6) \quad \tau_\beta \tau_{\beta+n} = -1.$$

Setzen wir noch

$$(7) \quad \log \tau_\beta^2 = l_\beta, \quad l_{\beta+n} = -l_\beta,$$

so ergiebt sich hiernach aus (1)

$$(8) \quad P_\lambda = m^{-2\lambda-1} \prod_{0,\mu=1}^n \sum_{\beta=1}^{\hat{\nu}} \theta^\beta l_\beta.$$

Das Product der Summen auf der rechten Seite dieses Ausdrucks lässt sich in Form einer Determinante darstellen, welche  $\theta$  nicht mehr enthält; am einfachsten gelangt man dazu wohl auf folgendem Wege. Man setze

$$(9) \quad x = \sum_{0,\mu=1}^n \theta^\beta l_\beta$$

und bilde durch Multiplication mit den Potenzen von  $\theta$  die Gleichungen

$$(10) \quad \begin{aligned} x &= l_0 + \theta l_1 + \dots + \theta^{\mu-1} l_{\mu-1} \\ \theta x &= -l_{\mu-1} + \theta l_0 + \dots + \theta^{\mu-2} l_{\mu-2} \\ &\vdots \\ \theta^{\mu-1} x &= -l_1 - \theta l_2 - \dots + \theta^{\mu-1} l_0, \end{aligned}$$

und hieraus durch Elimination der Potenzen von  $\theta$

$$(11) \quad \left| \begin{array}{cccc} l_0 - x, & l_1, & \dots, & l_{\mu-1} \\ -l_{\mu-1}, & l_0 - x, & \dots, & l_{\mu-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -l_1, & -l_2, & \dots, & l_0 - x \end{array} \right| = 0.$$

Es ist dies eine Gleichung  $\mu^{\text{ten}}$  Grades in Bezug auf  $x$ , in welcher die höchste Potenz von  $x$  den Coefficienten 1 hat, deren Wurzeln die  $\mu$  Factoren des Productes (8) sind. Man erhält daher dies Product, wenn man in vorstehender Determinante  $x = 0$  setzt. Ist also

$$(12) \quad (-1)^{2^{\mu-1}} \left| \begin{array}{cccc} l_0, & l_1, & \dots, & l_{\mu-1} \\ l_1, & l_2, & \dots, & -l_0 \\ l_2, & l_3, & \dots, & -l_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{\mu-1}, & -l_0, & \dots, & -l_{\mu-2} \end{array} \right| = A(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{\mu-1}),$$

so ergiebt sich nach einer Umstellung der Reihen, dass das Product der verschiedenen Werte von  $x$  in (9), welches als Product paarweise conjugiert imaginärer Grössen wesentlich positiv ist, den Wert  $A$  erhält. Daraus folgt dann

$$(13) \quad P_k = m^{-2^{\mu-1}} A(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{\mu-1}).$$

### § 5. Von den reellen Einheiten des Körpers $\mathcal{Q}_\lambda$ .

Wir nehmen jetzt wieder  $\lambda \leq 3$  an und betrachten die *reellen Einheiten* des Körpers  $\mathcal{Q}_\lambda$  d. h. die von den zweigliedrigen Perioden  $r + r^{-1}$  abhängigen, also dem Körper

$$\mathcal{Q}'_\lambda = R(r + r^{-1})$$

angehörigen, da durch diese, multipliziert mit den Potenzen von  $r$  nach I, § 9 überhaupt alle Einheiten in  $\mathcal{Q}_\lambda$  erschöpft sind. Es werde ferner, wenn  $\mathcal{E}(r)$  eine reelle Einheit in  $\mathcal{Q}_\lambda$  ist, unter  $l\mathcal{E}(r)$  der *Logarithmus* von  $\mathcal{E}(r)^2$  oder der doppelte *reelle Teil des Logarithmus von  $\mathcal{E}(r)$*  verstanden. Wir führen ferner die Bezeichnung ein, wenn  $r$  die Bedeutung (2) § 4 hat:

$$(1) \quad r^{\omega\beta} = r_\beta$$

woraus folgt:

$$(2) \quad r_{\beta+n} = -r_\beta;$$

unter einer *primitiven Einheit* des Körpers  $\mathcal{Q}$  verstehen wir eine solche reelle Einheit  $\mathcal{E}(r)$ , welche der Bedingung genügt

$$(3) \quad \mathcal{E}(r)\mathcal{E}(-r) = \pm 1, \quad l\mathcal{E}(r) + l\mathcal{E}(-r) = 0$$

und die nicht  $= \pm 1$  ist, die also jedenfalls *nicht dem Körper  $\mathcal{Q}_{\lambda-1}$  angehört*.

Ein System von  $\mu$  solchen Einheiten

$$(4) \quad \mathcal{E}_0(r), \mathcal{E}_1(r), \dots, \mathcal{E}_{\mu-1}(r)$$

heisst ein System von *einander unabhängiger primitiver Einheiten*, wenn für jede derselben die Bedingung (3) erfüllt ist, und wenn die Determinante

$$(5) \quad \sum \pm l\mathcal{E}_0(r_0)l\mathcal{E}_1(r_1) \dots l\mathcal{E}_{\mu-1}(r_{\mu-1}) = L(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{\mu-1})$$

einen von Null verschiedenen Wert hat.

Die in § 4, (5) definierten Einheiten  $\tau_\beta(r)$  genügen der Bedingung

$$(6) \quad \tau_\beta(r_\beta) = \tau_{\beta+\beta'}(r)$$

und wegen § 4, (6):

$$(7) \quad \tau_\beta(r)\tau_\beta(-r) = -1, \quad \tau_\beta\tau_{\beta+\mu} = -1.$$

Die Determinante  $L(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{\mu-1})$  ist von dem Factor  $(-1)^{2^{\lambda}-4}$  abgesehen, mit der Determinante (12) § 4 identisch und kann also, als ein Factor der Classenzahl, nicht verschwinden. Die Einheiten

$$(8) \quad \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{\mu-1}$$

bilden daher ein System unabhängiger primitiver Einheiten, wodurch die Existenz solcher Systeme bewiesen ist. (Für  $\lambda = 3$  ergiebt sich dies unmittelbar aus der Betrachtung von  $\tau_0(r)$ .)

Ist  $\mathcal{E}(r)$  eine beliebige primitive Einheit in  $\mathcal{Q}_\lambda$ , so lassen sich, da die Determinante (5) von Null verschieden ist, die Zahlen  $e_0, e_1, \dots, e_{\mu-1}$ , welche die Exponenten der Einheit  $\mathcal{E}(r)$  heissen mögen, so bestimmen, dass für  $s = 0, 1, \dots, \mu-1$  die Gleichungen bestehen

$$(9) \quad l\mathcal{E}(r_s) = e_0l\mathcal{E}_0(r_s) + e_1l\mathcal{E}_1(r_s) + \dots + e_{\mu-1}l\mathcal{E}_{\mu-1}(r_s)$$

und wegen der Relationen (3) gelten diese Formeln auch noch wenn  $r_s$  durch  $-r_s$  ersetzt wird, d. h. für die sämtlichen conjugirten Werte  $r$ .

Die Exponenten eines Products aus mehreren primitiven Einheiten sind die Summen der entsprechenden Exponenten der einzelnen Factoren.

Es lässt sich nun, ganz so wie (D., Seite 564) in der allgemeinen Theorie der Einheiten, nachweisen, dass die Zahlen  $e_0, e_1, \dots, e_{\mu-1}$  rationale Brüche sind; und dass es eine gewisse von  $\mathcal{E}(r)$  unabhängige kleinste ganze Zahl  $e$  giebt, mit welcher die Zahlen  $e_0, e_1, \dots, e_{\mu-1}$  multipliziert werden müssen, damit die Producte ganze Zahlen werden. Wir geben diesem Beweis hier folgende Gestalt.

1. Es giebt in  $\mathcal{Q}$  nur eine endliche Anzahl ganzer Zahlen  $\rho$ , welche die Eigenschaft haben, dass die absoluten Werte sämtlicher mit  $\rho$  conjugirten Zahlen unter einer endlichen Grenze bleiben, denn ist

$$\rho = a_0 + a_1r + \dots + a_{\frac{1}{2}m-1}r^{\frac{1}{2}m-1}$$

worin die  $a$  ganze rationale Zahlen sind, so ergiebt sich, wenn das Zeichen  $\Sigma$  sich auf alle conjugirten Werte bezieht

$$\frac{1}{2}ma_0 = \sum \rho, \quad \frac{1}{2}ma_1 = \sum \rho r^{-1}, \quad \dots, \quad \frac{1}{2}ma_{\frac{1}{2}m-1} = \sum \rho r^{1-\frac{1}{2}m},$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung unmittelbar erhellt.

2. Lassen wir auf der rechten Seite von (9) die  $e_0, e_1, \dots, e_{\mu-1}$  das Intervall von 0 bis 1 durchlaufen, so bleiben die absoluten Werte dieser Ausdrücke unter bestimmten endlichen Grenzen, also auch die absoluten Werte der dadurch bestimmten  $\mathcal{E}(r_s)$ , woraus nach 1. hervorgeht, dass die Exponenten  $e_0, e_1, \dots, e_{\mu-1}$ , so lange sie echte Brüche sind, nur eine *endliche Anzahl* von Werten anzunehmen fähig sind.

3. Wir bestimmen die Reihen der ganzen rationalen Zahlen  $m'_i, m''_i, m'''_i, \dots$  so dass die Differenzen

$$e_i - m'_i, \quad 2e_i - m''_i, \quad 3e_i - m'''_i, \quad \dots \quad (i=0, 1, \dots, \mu-1)$$

positive echte Brüche werden. Jedes der Zahlensysteme

$$(10) \quad ke_0 - m_0^{(k)}, \quad ke_1 - m_1^{(k)}, \quad \dots, \quad ke_{\mu-1} - m_{\mu-1}^{(k)}$$

bildet dann ein in (9) zulässiges Exponentensystem, und daraus ergibt sich, dass für einen gewissen Wert  $k = e$ , der jedenfalls nicht grösser ist als die Anzahl der nach  $n^o 2$  zulässigen echt gebrochenen Exponentensysteme, die sämmtlichen Glieder der Reihe (10) verschwinden müssen. Damit aber ist der zu beweisende Satz nachgewiesen. Wir können demselben auch den folgenden Ausdruck geben. Ist

$$\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{\mu-1}$$

ein System von einander unabhängiger primitiver Einheiten, so gibt es eine von dieser Basis allein abhängige kleinste ganze Zahl  $e$  der Art, dass für jede primitive Einheit  $\mathcal{E}$  sich die *ganzen Zahlen*  $e_0, e_1, \dots, e_{\mu-1}$  (die also jetzt eine etwas andere Bedeutung haben als oben) so bestimmen lassen, dass

$$(11) \quad \mathcal{E}^e = \pm \mathcal{E}_0^{e_0} \mathcal{E}_1^{e_1} \dots \mathcal{E}_{\mu-1}^{e_{\mu-1}}.$$

Die Exponenten der Einheit  $\mathcal{E}$  sind alsdann

$$\frac{e_0}{e}, \quad \frac{e_1}{e}, \quad \dots, \quad \frac{e_{\mu-1}}{e}.$$

### § 6. Die Einheiten $\tau_\beta$ .

Wir legen jetzt als unabhängige primitive Einheiten das System  $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{\mu-1}$  zu Grunde und beweisen zunächst folgenden Satz.

I. Wenn das Product

$$(1) \quad \tau_0^{e_0} \tau_1^{e_1} \cdots \tau_{\mu-1}^{e_{\mu-1}}$$

mit allen seinen conjugierten Werten gleiches Vorzeichen hat, so müssen die (ganzzahligen) Exponenten  $e_0, e_1, \dots, e_{\mu-1}$  sämtlich gerade sein. Um diesen Satz zu beweisen formen wir den Ausdruck zunächst um.

Nach unserer Definition § 4, (5) war

$$(2) \quad \tau_\beta = \operatorname{tg} \left( 5^\beta \frac{\pi}{m} \right) = \frac{1}{2} \frac{\sin \left( \frac{2\pi}{m} 5^\beta \right)}{\left[ \cos \left( \frac{\pi}{m} 5^\beta \right) \right]^2}$$

und wir setzen daher

$$(3) \quad \sigma_\beta = \sin \left( \frac{2\pi}{m} 5^\beta \right).$$

Es ist dann (§ 5, (6)) offenbar nur zu beweisen, dass die  $e_0, e_1, \dots, e_{\mu-1}$  gerade Zahlen sein müssen, wenn

$$(4) \quad \sigma_\beta^{e_0} \sigma_{\beta+1}^{e_1} \cdots \sigma_{\beta+\mu-1}^{e_{\mu-1}} = S_\beta$$

für alle Werte von  $\beta$  dasselbe Vorzeichen hat. Die Zahlen  $\sigma_\beta$  erfüllen nun folgende Relationen:

$$(5) \quad \sigma_{\beta+\mu} = -\sigma_\beta$$

$$(6) \quad \sigma_{\beta+\frac{1}{2}\mu} = -\cos \left( \frac{2\pi}{m} 5^\beta \right)$$

(weil nämlich  $5^{\frac{1}{2}\mu} \equiv 1 + 2^{\lambda-2} \pmod{\frac{1}{2}m}$  aber nicht  $\pmod{m}$ ), und also

$$(7) \quad \sigma_\beta \sigma_{\beta+\frac{1}{2}\mu} = -\frac{1}{2} \sin \left( \frac{4\pi}{m} 5^\beta \right) = -\frac{1}{2} \sigma'_\beta$$

wo  $\sigma'$  aus  $\sigma$  hervorgeht, indem  $\lambda$  durch  $\lambda - 1$  ersetzt wird, so dass

$$(8) \quad \sigma'_{\beta+\frac{1}{2}\mu} = -\sigma'_\beta.$$

Die Richtigkeit unserer Behauptung ist nun ersichtlich, wenn  $\lambda = 3$  ist; denn in diesem Fall ist

$$\sigma_0 = \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \sigma_1 = \sin \frac{5\pi}{4} = -\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Wir nehmen daher an die Richtigkeit derselben sei erwiesen wenn  $\lambda$  durch  $\lambda - 1$  ersetzt wird und suchen sie daraus für  $\lambda$  selbst herzuleiten. Zu diesem Ende bilden wir zunächst nach (4), (7), (8) das Product

$$S_{\beta} S_{\beta + \frac{1}{2}\mu} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\mu} (-1)^{\frac{1}{2}\mu} \sigma'_{\beta}^{e_0 + e_{\frac{1}{2}\mu}} \sigma'_{\beta+1}^{e_1 + e_{\frac{1}{2}\mu+1}} \dots \sigma'_{\beta + \frac{1}{2}\mu-1}^{e_{\frac{1}{2}\mu-1} + e_{\mu-1}},$$

woraus nach der gemachten Voraussetzung folgt:

$$e_0 \equiv e_{\frac{1}{2}\mu}, \quad e_1 \equiv e_{\frac{1}{2}\mu+1}, \quad \dots, \quad e_{\frac{1}{2}\mu-1} \equiv e_{\mu-1} \pmod{2},$$

wonach mittelst (7) aus (4) folgt, dass auch

$$(9) \quad \sigma'_{\beta}^{e_0} \sigma'_{\beta+1}^{e_1} \dots \sigma'_{\beta + \frac{1}{2}\mu-1}^{e_{\frac{1}{2}\mu-1}} = S'_{\beta}$$

für alle Werte von  $\beta$  dasselbe Vorzeichen hat. Nach Voraussetzung aber folgt hieraus

$$e_0 \equiv e_1 \equiv \dots \equiv e_{\frac{1}{2}\mu-1} \equiv 0 \pmod{2}$$

und dies ist der zu beweisende Satz.

2. Hieraus ergiebt sich in Verbindung mit dem Satze des vorigen Paragraphen:

Es giebt eine *ungerade ganze rationale Zahl*  $e$  derart, dass, wenn  $\mathcal{E}(r)$  eine beliebige primitive Einheit in  $\mathcal{Q}_{\lambda}$  bedeutet, die ganzen Zahlen  $e_0, e_1, \dots, e_{\mu-1}$  so bestimmt werden können, dass

$$(10) \quad \mathcal{E}(r)^e = \pm \tau_0^{e_0} \tau_1^{e_1} \dots \tau_{\mu-1}^{e_{\mu-1}}.$$

Denn der Schlussatz des vorigen Paragraphen beweist zunächst überhaupt die Existenz einer solchen Zahl  $e$ ; wäre dieselbe aber gerade, während die Zahlen  $e_0, e_1, \dots, e_{\mu-1}$  nicht alle zumal gerade sind, so stände dies im Widerspruch mit dem Satz 1.

Als Corollar hieraus ergiebt sich noch der Satz:

A) Eine primitive Einheit des Körpers  $\Omega$ , die mit allen ihren Conjugirten einerlei Vorzeichen hat, ist, vom Vorzeichen  $\pm$  abgesehen, ein Quadrat einer primitiven Einheit.

### § 7. Fundamentalsysteme primitiver Einheiten.

Es sei jetzt

$$(1) \quad \mathcal{E}_0(r), \mathcal{E}_1(r), \dots, \mathcal{E}_{n-1}(r)$$

irgend ein System von einander unabhängiger primitiver Einheiten; haben dann die Größen  $l_0, l_1, \dots, l_{n-1}$  dieselbe Bedeutung wie in § 4, (7), nämlich

$$(2) \quad l_\beta = l\tau_\beta$$

und ist  $e$  die ungerade ganze Zahl, deren Existenz im vorigen Paragraphen bewiesen ist, so kann man die ganzen Zahlen  $e_{i,x}$  so bestimmen, dass

$$(3) \quad \begin{aligned} el\mathcal{E}_i(r_0) &= e_{i,0}l_0 + e_{i,1}l_1 + \dots + e_{i,n-1}l_{n-1} \\ el\mathcal{E}_i(r_1) &= e_{i,0}l_1 + e_{i,1}l_2 + \dots - e_{i,n-1}l_0 \\ &\dots \dots \\ el\mathcal{E}_i(r_{n-1}) &= e_{i,0}l_{n-1} - e_{i,1}l_0 - \dots - e_{i,n-1}l_{n-2}, \end{aligned}$$

woraus sich für  $\lambda > 3$  durch Benutzung der Bezeichnung § 4, (12) ergiebt

$$(4) \quad \begin{aligned} (-1)^{2\lambda-4} \sum \pm l\mathcal{E}_0(r_0)l\mathcal{E}_1(r_1)\dots l\mathcal{E}_{n-1}(r_{n-1}) \\ = \frac{\sum \pm e_{0,0}e_{1,1}\dots e_{(n-1),n-1}}{e^n} A(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}). \end{aligned}$$

Da nun die Zahl  $e$  und ebenso die Determinante  $A$  einen von dem System (1) unabhängigen Wert hat, so geht hieraus hervor, dass man dies System so wählen kann, dass die Determinante

$$(5) \quad (-1)^{2\lambda-4} \sum \pm l\mathcal{E}_0(r_0)l\mathcal{E}_1(r_1)\dots l\mathcal{E}_{n-1}(r_{n-1})$$

einen möglichst kleinen positiven Wert  $L$  erhält und ein solches System soll ein *Fundamentalsystem primitiver Einheiten* heissen.

Ist das System (1) ein solches Fundamentalsystem, so lässt sich jede primitive Einheit  $\mathcal{E}(r)$  in der Weise darstellen

$$(6) \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0^{g_0} \mathcal{E}_1^{g_1} \dots \mathcal{E}_{n-1}^{g_{n-1}},$$

so dass die Exponenten  $g_0, g_1, \dots, g_{n-1}$  ganze Zahlen sind. Denn ist z. B.  $g_0$  ein Bruch, so existiert auch eine Einheit  $\mathcal{E}$ , in welcher  $g_0$  ein positiver *echter Bruch* ist, und das System

$$\mathcal{E}, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{n-1}$$

ist gleichfalls unabhängig; für die Determinante

$$(-1)^{2\lambda-4} \sum \pm l\mathcal{E}(r_0)l\mathcal{E}_1(r_1) \dots l\mathcal{E}_{n-1}(r_{n-1})$$

ergiebt sich aber der Wert  $g_0 L_\lambda$ , welcher, gegen die Voraussetzung, kleiner als  $L_\lambda$  ist. Hiernach können wir also auch, wenn die  $g_i$  ganze Zahlen sind, setzen

$$(7) \quad l\tau_\beta(r_\beta) = l_{\beta+\beta'} = g_{0,\beta} l\mathcal{E}_0(r_{\beta'}) + g_{1,\beta} l\mathcal{E}_1(r_{\beta'}) + \dots + g_{n-1,\beta} l\mathcal{E}_{n-1}(r_{\beta'})$$

woraus nach (3) folgt:

$$(8) \quad \sum \pm g_{0,0} g_{1,1} \dots g_{n-1,n-1} \sum \pm e_{0,0} e_{1,1} \dots e_{n-1,n-1} = e^\mu$$

und mithin ist

$$(9) \quad \sum \pm g_{0,0} g_{1,1} \dots g_{n-1,n-1} = b_\lambda$$

eine *positive ungerade ganze Zahl*. Die Berechnung dieser Zahl stösst auf die bekannten Schwierigkeiten, die in der Theorie der Einheiten immer auftreten. Nur für den Fall  $\lambda=3$  ergiebt sich leicht aus der Theorie der PELL'schen Gleichung dass die Einheit  $\tau_0 = \sqrt{2} - 1$  selbst eine fundamentale Einheit ist, da überhaupt alle Einheiten des Körpers  $\Omega_3$  in der Form  $\sqrt{i}^{n_0}(\sqrt{2} - 1)^{n_1}$  mit ganzzahligen Exponenten  $n_0, n_1$  darstellbar sind. Es ist daher

$$(10) \quad L_3 = 2 \log(\sqrt{2} + 1)$$

der Minimalwert von  $l\mathcal{E}(r)$ . Hiernach erhält man aus (4), (8) und (9)

$$A(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}) = b_\lambda L_\lambda$$

und aus (13) § 2 und (13) § 4

$$(11) \quad P_3 = \frac{L_3}{2\sqrt{2}}, \quad P_\lambda = m^{-2\lambda-4} b_\lambda L_\lambda.$$

### § 8. Die fundamentalen Einheiten des Körpers $\mathcal{Q}_\lambda$ .

Es kommt jetzt darauf an, ein vollständiges System fundamentaler Einheiten in  $\mathcal{Q}_\lambda$  zu bestimmen, (D., Seite 565 f.), d. h. ein System von  $\nu - 1$  (auch nicht primitiven) Einheiten

$$(1) \quad \delta_1(r), \delta_2(r), \dots, \delta_{\nu-1}(r),$$

welche reell vorausgesetzt werden können, von der Art dass in der Form

$$(2) \quad r^{n_0} \delta_1^{n_1} \delta_2^{n_2} \dots \delta_{\nu-1}^{n_{\nu-1}}$$

mit ganzzahligen Exponenten  $n_0, n_1, \dots, n_{\nu-1}$  alle Einheiten des Körpers  $\mathcal{Q}_\lambda$  darstellbar sind. Von besonderer Wichtigkeit ist dabei der absolute Wert

$$(3) \quad L(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{\nu-1})$$

der aus den  $(\nu - 1)^2$  Größen

$$(4) \quad \log \delta_i(r_\beta) \delta_i(r_\beta^{-1}) = l \delta_i(r_\beta) \quad \begin{pmatrix} \beta = 0, 1, \dots, \nu-2 \\ i = 1, 2, \dots, \nu-1 \end{pmatrix}$$

gebildeten Determinante. (Die Bezeichnung  $L$  soll in dem gleichen Sinne auch gebraucht werden für irgend ein, auch nicht fundamentales, System von  $\nu - 1$  unabhängigen Einheiten in  $\mathcal{Q}_\lambda$ .)

Ist  $\lambda = 3$ , so ist  $\delta_1 = \tau_0$  und  $L(\delta_1)$  mit  $L_3$  identisch. Im allgemeinen Fall bezeichnen wir wie oben mit

$$(5) \quad \mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{\mu-1}$$

ein Fundamentalsystem primitiver Einheiten in  $\mathcal{Q}_\lambda$  und mit

$$(6) \quad \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{\mu-1}$$

ein vollständiges Fundamentalsystem des Körpers  $\mathcal{Q}_{\lambda-1}$ .

Die  $\nu - r$  Einheiten

$$(7) \quad \mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{\mu-1}, \quad \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{\mu-1}$$

bilden zusammen ein System unabhängiger Einheiten in  $\mathcal{Q}_k$ , und die Determinante

$$(8) \quad L(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{\mu-1}, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{\mu-1})$$

ergiebt sich aus den Eigenschaften der Einheiten  $\mathcal{E}$  und  $\Delta$

$$(9) \quad l\mathcal{E}_i(r) = -l\mathcal{E}_i(-r); \quad l\Delta_i(r) = l\Delta_i(-r)$$

gleich

$$(10) \quad 2^{n-1} L_k L(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{\mu-1}).$$

Es ist jetzt also noch der Zusammenhang zwischen dem System (7) und (1) zu ermitteln. Zu diesem Zweck setzen wir, indem wir unter  $m_{i,i}$ ,  $M_{i,i}$  rationale ganze oder gebrochene Zahlen verstehen

$$(11) \quad 2l\delta_i(r) = m_{0,i}l\mathcal{E}_0(r) + m_{1,i}l\mathcal{E}_1(r) + \dots + m_{\mu-1,i}l\mathcal{E}_{\mu-1}(r) \\ + M_{1,i}l\Delta_1(r) + M_{2,i}l\Delta_2(r) + \dots + M_{\mu-1,i}l\Delta_{\mu-1}(r),$$

und erhalten nach (9):

$$(12) \quad \begin{aligned} l\delta_i(r)\delta_i(-r) &= M_{1,i}l\Delta_1(r) + M_{2,i}l\Delta_2(r) + \dots + M_{\mu-1,i}l\Delta_{\mu-1}(r) \\ l\delta_i(r)\delta_i(-r)^{-1} &= m_{0,i}l\mathcal{E}_0(r) + m_{1,i}l\mathcal{E}_1(r) + \dots + m_{\mu-1,i}l\mathcal{E}_{\mu-1}(r). \end{aligned}$$

Da nun  $\delta_i(r)\delta_i(-r)$  eine Einheit des Körpers  $\mathcal{Q}_{\mu-1}$ , und  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{\mu-1}$  ein Fundamentalsystem dieses Körpers, da ferner  $\delta_i(r)\delta_i(-r)^{-1}$  eine primitive Einheit in  $\mathcal{Q}_k$  ist, und  $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{\mu-1}$  ein Fundamentalsystem primitiver Einheiten, so ergiebt sich aus diesen Formeln, dass die  $M_{i,i}$ ,  $m_{i,i}$  ganze Zahlen sind.

Bezeichnen wir mit  $M$  den absoluten Wert der Determinante der Zahlen  $m_{i,i}$ ,  $M_{i,i}$ , so ergiebt sich aus (11) und (10)

$$(13) \quad L(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{\mu-1}) = M 2^{-\mu} L_k L(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{\mu-1}).$$

Es folgt nun aber ferner aus der Voraussetzung, dass  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{\mu-1}$

ein Fundamentalsystem von Einheiten des Körpers  $\mathcal{Q}_\lambda$  bilden, die Existenz von ganzen rationalen Zahlen  $n_{i,i'}$ ,  $N_{i,i'}$  die den Gleichungen genügen

$$(14) \quad \begin{aligned} l\mathcal{E}_i(r) &= n_{1,i}l\delta_1(r) + n_{2,i}l\delta_2(r) + \dots + n_{\nu-1,i}l\delta_{\nu-1}(r), & (i=0, 1, \dots, \mu-1) \\ l\Delta_z(r) &= N_{1,z}l\delta_1(r) + N_{2,z}l\delta_2(r) + \dots + N_{\nu-1,z}l\delta_{\nu-1}(r), & (z=1, 2, \dots, \mu-1) \end{aligned}$$

und wenn wir den absoluten Wert der Determinante der  $n_{i,i'}$ ,  $N_{i,i'}$  mit  $M$  bezeichnen, so folgt aus (11) und (14).

$$(15) \quad MN = 2^{\nu-1}$$

woraus folgt, dass sowohl  $M$  als  $N$  Potenzen von 2 sind.

Es lässt sich nachweisen, dass  $M$  teilbar ist durch  $2^\mu$ . Man kann nämlich ein System von  $\nu - 1 = 2\mu - 1$  ganzen rationalen Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_{\nu-1}$  ohne gemeinsamen Teiler so bestimmen, dass sie den  $\mu - 1$  Gleichungen

$$(16) \quad \sum_{1,\nu-1}^i M_{s,i}x_i = 0 \quad (s=1, 2, \dots, \mu-1)$$

genügen. Da alsdann das Product

$$\delta_1^{x_1}\delta_2^{x_2} \dots \delta_{\nu-1}^{x_{\nu-1}}$$

in Folge von (11) eine primitive Einheit in  $\mathcal{Q}_\lambda$  ist, und da die  $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{\mu-1}$  ein Fundamentalsystem primitiver Einheiten bildet, so ergibt sich nach (11)

$$(17) \quad \sum_{1,\nu-1}^i m_{s,i}x_i \equiv 0 \pmod{2}, \quad (s=0, 1, \dots, \mu-1)$$

woraus folgt, dass die Determinante  $M$  durch 2 teilbar ist.

Da die  $x_1, x_2, \dots, x_{\nu-1}$  nicht alle gerade sind, so nehmen wir etwa  $x_1$  ungerade, und bestimmen nun ein zweites Grössensystem  $x'_2, x'_3, \dots, x'_{\nu-1}$  aus den Gleichungen

$$\sum_{2,\nu-1}^i M_{s,i}x'_i = 0 \quad (s=1, 2, \dots, \mu-1)$$

woraus ebenso die Teilbarkeit von  $M$  durch  $2^2$  folgt, und so kann man fortfahren, so lange die Anzahl der Unbekannten  $x$  die Anzahl der Gleichungen noch übertrifft, d. h. bis

$$(18) \quad \sum_{\mu,\nu-1}^i M_{s,i}x_i^{(\mu-1)} = 0 \quad (s=1, 2, \dots, \mu-1)$$

woraus die Teilbarkeit von  $M$  durch  $2^n$  folgt. Wir können also nach (15) setzen

$$(19) \quad M = 2^{n+\sigma}, \quad N = 2^{n-\sigma-1}$$

worin  $\sigma$  eine ganze nicht negative Zahl ist.

Es wird sich im folgenden Paragraphen als Corollar ergeben, dass  $\sigma$  den Wert 0 hat, dass also  $M$  nicht durch eine höhere als die  $\mu^{\text{te}}$  Potenz von 2 teilbar ist. Um aber die Kette der Schlussfolgerungen die sich an diese Betrachtung weiter knüpft, und zu einem wichtigen Resultate führt, hier nicht unterbrechen zu müssen, soll dieser Satz einstweilen vorausgesetzt werden.

Nimmt man also in (18) wieder an, es sei  $x_i^{(\mu-1)}$  ungerade, so bestimme man die Zahlen  $x_i^{(\mu)}$  aus den Gleichungen

$$(20) \quad \sum_{\mu+1, \nu=1}^i M_{s, i} x_i^{(\mu)} = 0 \quad (s=2, 3, \dots, n-1),$$

es muss dann notwendig

$$(21) \quad \sum_{\mu+1, \nu=1}^i M_{1, i} x_i^{(\mu)} \equiv 1 \pmod{2}$$

sein; denn nehmen wir das Gegenteil an, also diese Summe sei gerade, etwa  $= 2\xi$ , so folgt aus (11) dass

$$\partial_{\mu+1}^{x_i^{(\mu)}} \partial_{\mu+2}^{x_i^{(\mu)}} \dots \partial_{\nu-1}^{x_i^{(\mu)}} \Delta_1^{-\xi}$$

eine primitive Einheit in  $\mathcal{Q}_\lambda$  ist, woraus wie oben

$$\sum_{\mu+1, \nu=1}^i m_{s, i} x_i^{(\mu)} \equiv 0 \pmod{2} \quad (s=0, 1, \dots, n-1)$$

folgt; es würde also gegen die Voraussetzung  $M$  durch  $2^{n+1}$  teilbar sein.

Multipliciert man also die Gleichungen (11) für  $i = \mu + 1, \mu + 2, \dots, \nu - 1$  der Reihe nach mit  $x_i^{(\mu)}$  und bildet die Summe, so ergibt sich (mit Benutzung von (14)) eine Gleichung von der Form

$$(22) \quad l\Delta_1(r) = \sum_{0, \mu=1}^i A_{i, 1} l\mathcal{E}_i(r) + 2 \sum_{0, \nu=1}^i a_{i, 1} l\partial_i(r)$$

worin die  $A_{i, 1}, a_{i, 1}$  ganze Zahlen sind. An Stelle von  $\Delta_1$  kann in dieser

Formel ebenso gut  $\Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_{\mu-1}$  treten. Dies Ergebniss lässt sich in folgenden bemerkenswerten *Satz* zusammenfassen:

B. Jede Einheit des Körpers  $\mathcal{Q}_{\lambda-1}$  lässt sich darstellen als das Product aus einer primitiven Einheit und dem Quadrat einer Einheit des Körpers  $\mathcal{Q}_\lambda$ .

Es hat dieser Satz, abgesehen von einer später zu machenden Anwendung das theoretische Interesse, dass er lehrt, dass im Körper  $\mathcal{Q}_\lambda$  noch fundamentalere Einheiten (um nach KUMMER's Vorgang diesen Comparativ zu brauchen) existieren, als das System der  $\mathcal{E}, \Delta$ .<sup>1</sup>

Wir lassen aber für jetzt die Voraussetzung wieder fallen, dass  $\sigma = 0$  sei, und erhalten also aus (13) und (19)

$$L(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{\nu-1}) = 2^\sigma L_\lambda L(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{\mu-1}).$$

Dieselbe Betrachtung lässt sich nun in Bezug auf  $L(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{\mu-1})$  wiederholen, so dass man schliesslich erhält:

$$(23) \quad L(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{\nu-1}) = 2^{\Sigma\sigma} L_\lambda L_{\lambda-1} \dots L_3$$

worin  $\Sigma\sigma$  eine aus nicht negativen ganzen Zahlen zusammengesetzte Summe ist.

### § 9. Die Classenanzahl.

Es bleibt uns nur übrig, die gefundenen Resultate in die Formel (4) § 2

$$(1) \quad gh = Q_2 Q_3 Q_4 \dots Q_\lambda P_3 P_4 \dots P_\lambda$$

einzusetzen, und den Wert von  $g$  zu bestimmen. Es ist aber nach § 2, (11), (12), § 3, (16)

$$Q_2 = \frac{\pi}{4}, \quad Q_3 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \quad Q_\lambda = \frac{\pi^n a_\lambda}{2 \cdot 2^{(\lambda-2)^2 \lambda - 4}},$$

<sup>1</sup> Als Beispiel diene für  $\lambda = 4$  die Formel

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{16} \left( \cos \frac{\pi}{16} \right)^2}{\operatorname{tg} \frac{5\pi}{16} \left( \cos \frac{5\pi}{16} \right)}.$$

und daraus findet man (mit Benutzung von  $2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + (\lambda - 2)2^{\lambda-2} = 2^{\lambda-2}(\lambda - 3)$ )

$$(2) \quad Q_2 Q_3 Q_4 \dots Q_\lambda = \frac{\pi^{a_1 a_2 \dots a_\lambda}}{\sqrt{2} 2^\lambda 2^{(\lambda-1)2^{\lambda-3}}}.$$

Desgleichen nach § 7, (11)

$$P_3 = \frac{L_3}{2\sqrt{2}}, \quad P_\lambda = \frac{b_\lambda L_\lambda}{2^{\lambda 2^{\lambda-4}}},$$

woraus

$$(3) \quad P_3 P_4 \dots P_\lambda = \sqrt{2} \frac{L_3 L_4 \dots L_\lambda b_4 b_5 \dots b_\lambda}{2^{(\lambda-1)2^{\lambda-3}}},$$

und folglich

$$(4) \quad gh = \nu^{-\nu} 2^{-\lambda} L_3 L_4 \dots L_\lambda \pi^\nu a_4 b_4 a_5 b_5 \dots a_\lambda b_\lambda.$$

Für  $g$  hat man nach D., Seite 577, (34) und 574, (25)

$$(5) \quad g = \frac{E(2\pi)^\nu}{\sqrt{D}},$$

worin  $D$  die Grundzahl des Körpers  $\Omega_\lambda$  ist, und (nach D., Seite 567, (19) da die Anzahl der in  $\Omega_\lambda$  enthaltenen Einheitswurzeln  $= 2^\lambda$  ist)

$$(6) \quad E = 2^{-\lambda} L(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{\nu-1}).$$

Die Grundzahl  $D$  unseres Körpers ist aber, wenn

$$f(t) = t^{2\nu} + 1$$

bedeutet

$$(7) \quad D = Nf'(r) = (2\nu)^{2\nu}.$$

Setzt man endlich noch für  $L(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{\nu-1})$  aus § 8, (23) den Wert ein, so folgt:

$$(8) \quad g = 2^{-\lambda} \nu^{-\nu} \pi^\nu 2^{\Sigma \sigma} L_3 L_4 \dots L_\lambda$$

und folglich

$$(9) \quad h = 2^{-\Sigma \sigma} a_4 b_4 a_5 b_5 \dots a_\lambda b_\lambda.$$

Da nun die  $a_4, b_4, \dots, a_\lambda, b_\lambda$  wie oben bewiesen ungerade ganze Zahlen sind, und die Classenanzahl  $h$  eine ganze Zahl ist, also  $\sum \sigma$  nicht positiv sein kann, so lassen sich aus (9) die zwei Folgerungen ziehen:

*Die aus nicht negativen Gliedern bestehende Summe  $\sum \sigma$  und mithin jeder ihrer Summanden verschwindet, wodurch die beim Beweise des Satzes B gemachte Voraussetzung gerechtfertigt ist.*

C. *Die Classenzahl in den vollständigen Kreiskörpern, deren Ordnung eine Potenz von 2 ist, ist eine ungerade Zahl.*

### III. DER KRONECKER'SCHE SATZ.

In den beiden vorangegangenen Abhandlungen, die in der Folge mit I, II citiert werden sollen, sind die Hilfsmittel enthalten, um zum vollständigen Beweis des KRONECKER'schen Satzes zu gelangen, mit dem sich die gegenwärtige Abhandlung beschäftigen soll:

*Alle Abel'schen Körper sind Kreiskörper.*

Nach I, § 2, n° 7 und n° 8 ist dieser Satz nur für reguläre Abel'sche Körper, deren Grad eine Primzahlpotenz, nachzuweisen. Es folgt dann daraus, dass die in I, § 5 näher bestimmten Körper nicht nur sämtliche Kreiskörper, sondern alle Abel'schen Körper überhaupt umfassen.

#### § 1. Die Lagrange'schen Resolventen.

Es sei  $\mathfrak{K}$  ein gegebener regulärer Abel'scher Körper und

$$(1) \quad m = q^k$$

worin  $q$  eine Primzahl ist, sein Grad. Falls  $q=2$  ist, wird  $k \geq 2$  vorausgesetzt.<sup>1</sup> Ist  $x$  eine beliebige Zahl in  $\mathfrak{K}$ , so können die mit  $x$  conjugierten Zahlen

$$(2) \quad x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$$

<sup>1</sup> Für  $m=2$  ist der zu beweisende Satz evident, da jede Quadratwurzel in bekannter Weise durch Einheitswurzeln darstellbar ist. (Vgl. GAUSS, *Disqu. Arithmeticæ*, Art. 356.)

in der Weise angeordnet werden, dass sie durch die Permutationen der Gruppe von  $\mathfrak{A}$  cyklich in einander übergehen, und dass also diese Gruppe durch die Wiederholungen von  $(x_0, x_1)$  erschöpft wird. (I, § 2, n° 3.)

Wir betrachten neben dem Körper  $\mathfrak{A}$  den vollständigen Kreiskörper  $\mathcal{Q}_m$  und den aus beiden zusammengesetzten Körper

$$\mathcal{Q} = \mathfrak{A}\mathcal{Q}_m.$$

1. Ist nun  $r$  eine primitive  $m^{\text{te}}$  Einheitswurzel, so besteht  $\mathcal{Q}$  aus allen rationalen Funktionen  $F(x_0, r)$  von  $x_0$  und  $r$ , und wenn eine solche Zahl die Eigenschaft hat, durch die Substitutionen  $(x_0, x_1)$  der Gruppe von  $\mathfrak{A}$  unverändert zu bleiben, so ist sie nothwendig eine Zahl in  $\mathcal{Q}_m$ ; denn aus

$$F(x_0, r) = F(x_1, r) = \dots = F(x_{m-1}, r)$$

folgt

$$mF(x_0, r) = F(x_0, r) + F(x_1, r) + \dots + F(x_{m-1}, r)$$

also eine symmetrische Function der  $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$ .

2. Unter den Zahlen des Körpers  $\mathcal{Q}$  befinden sich auch die sogenannten LAGRANGE'schen Resolventen

$$(3) \quad \psi_a = \psi_a(x_0) = x_0 + r^a x_1 + r^{2a} x_2 + \dots + r^{(m-1)a} x_{m-1}$$

worin  $a$  jede beliebige ganze Zahl sein kann, so dass man  $m$  solcher Functionen erhält. Durch diese kann man die Zahlen  $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$  ausdrücken mit Hilfe der Formeln

$$(4) \quad mx_i = \sum_{a=0}^m r^{-ai} \psi_a(x_0),$$

so dass die Lösung unserer Aufgabe auf den Nachweis zurückgeführt ist, dass sämtliche  $\psi_a$  den Kreiskörpern angehören.

3. Durch die Substitution  $(x_0, x_1)$  geht  $\psi_a(x_0)$  in

$$(5) \quad \psi_a(x_1) = r^{-a} \psi_a(x_0)$$

über und daraus folgt nach n° 1, dass die Zahlen

$$(6) \quad \omega_a = \psi_a^m$$

dem Körper  $\mathcal{Q}_m$  angehören; ebenso ergibt sich allgemeiner, dass

$$(7) \quad \psi_a^{m^1} \psi_b^{m^2} \dots$$

in  $\Omega_m$  enthalten ist, wenn die ganzen Zahlen  $a, a', b, b', \dots$  der Bedingung

$$(8) \quad aa' + bb' + \dots \equiv 0 \pmod{m}$$

genügen.

4. Wir bezeichnen, wie in den beiden vorhergehenden Abhandlungen, mit  $n$  irgend eine nach dem Modul  $m$  genommene zu  $m$  teilerfremde Zahl, und weisen zunächst nach, dass von den  $\varphi(m)$  Zahlen  $\psi_n(x_0)$  keine verschwinden kann; wenn wir voraussetzen, dass  $x$  eine primitive Zahl des Körpers  $\mathfrak{K}$  sei.

Wenn nämlich von den Zahlen  $\psi_n$  eine verschwindet, so verschwinden sie wegen n° 3 (6) sämtlich (da man in der Gleichung  $\omega_n = 0$  die primitive Wurzel  $r$  durch jede andere  $r^n$  ersetzen kann); dann sind alle auf der rechten Seite von (4) vorkommenden Zahlen  $a$  durch  $q$  teilbar und es folgt

$$x_k = x_{k+\frac{m}{q}}$$

also  $x$  keine primitive Zahl in  $\mathfrak{K}$ . (I, § 1, n° 1.) Auch sind umgekehrt, wenn  $x$  keine primitive Zahl in  $\mathfrak{K}$  ist, die Zahlen  $\psi_n = 0$ . Wir nehmen also für die Folge stets an, dass  $\psi_n$  von 0 verschieden sei.

5. Ist  $a$  eine beliebige Zahl,  $n$  durch  $q$  nicht teilbar, so kann man die ganze rationale Zahl  $k$  so bestimmen dass

$$a + nk \equiv 0 \pmod{m}$$

dann ist aber nach n° 3, (7)

$$\psi_a \psi_n^k$$

in  $\Omega_m$  enthalten. Es genügt daher der Nachweis, dass die Functionen  $\psi_n$  (oder selbst nur eine von ihnen) in den Kreiskörpern enthalten sind. Für diese Zahlen  $\psi_a$  hat man überdies aus n° 3, (7) den Satz:

$$(9) \quad \tilde{\omega}_n = \psi_1^{-n} \psi_n$$

ist in  $\Omega_n$  enthalten.

## § 2. Zerlegung der Zahlen $\omega_n$ in ideale Primfactoren.

1. Zur Erleichterung des Überblicks schicke ich einige allgemeine Bemerkungen über den Gebrauch der Ideal-factoren voraus. Ist  $A$  ein beliebiger algebraischer Zahlkörper und sind  $\alpha, \beta$  irgend zwei von Null verschiedene ganze Zahlen in demselben, so giebt es *ein* und *nur ein* Paar relativer Primideale  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  derart dass

$$(1) \quad \alpha\alpha = \mathfrak{b}\beta.$$

Sind  $\alpha', \beta'$  zwei andere ganze Zahlen in  $A$ , welche der Bedingung genügen dass

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\alpha'}{\beta'}$$

eine Einheit ist, also

$$(2) \quad \alpha\beta' = \varepsilon\alpha'\beta,$$

so ist auch

$$(3) \quad \alpha\alpha' = \mathfrak{b}\beta',$$

und wenn umgekehrt die Gleichungen (1), (3) bestehen, so folgt auch (2), d. h. die gebrochenen Zahlen  $\alpha:\beta$  und  $\alpha':\beta'$  sind bis auf einen Einheits-factor identisch (vgl. D. § 175). Die beiden Ideale  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  sind äquivalent. Ist daher  $\eta$  irgend eine ganze oder gebrochene Zahl in  $A$ , so sind durch dieselbe die beiden relativen Primideale  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  derart völlig bestimmt, dass

$$(4) \quad \alpha\eta = \mathfrak{b},$$

und  $\mathfrak{a}$  kann definiert werden als der Inbegriff aller derjenigen ganzen Zahlen  $\alpha$ , für welche das Product  $\alpha\eta = \beta$  eine ganze Zahl wird. Der Inbegriff der Zahlen  $\beta$  bildet das Ideal  $\mathfrak{b}$ . Ist alsdann auch  $\alpha\eta' = \mathfrak{b}$  so sind  $\eta$  und  $\eta'$  nur durch einen Einheitsfactor verschieden.

Die Gleichung (4) schreiben wir auch so

$$(5) \quad \mathfrak{b}\eta = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}},$$

und sprechen in diesem Sinne von *gebrochenen* Idealen.<sup>1</sup> Zerlegt man  $\alpha$  und  $\beta$  in Primideale so kommt keines derselben in beiden zugleich vor, und wenn eines von ihnen,  $\mathfrak{p}$ ,  $s$  mal im Zähler oder —  $s$  mal im Nenner von (5) vorkommt, so werden wir sagen,  $\mathfrak{p}^s$  sei die höchste Potenz von  $\mathfrak{p}$  welche in  $\eta$  aufgeht, wobei  $s$  auch negativ sein kann.

2. Wir untersuchen nun in diesem Sinne die Zerlegung der Zahlen  $\omega_n$  in ihre idealen Primfactoren im Körper  $\mathcal{Q}_m$ , und beginnen mit dem in der Primzahl  $q$  selbst aufgehenden Primideal

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{o}(1 - r),$$

für welches

$$\mathfrak{o}q = \mathfrak{q}^{g(m)}$$

ist. (I, § 7, n° 6.)

Es sei  $q^s$  die höchste in  $\omega$  aufgehende Potenz von  $q$  und folglich auch die höchste in  $\omega_n$  aufgehende. Da nun nach § 1, n° 3

$$\prod_{n=1}^{\infty} \mathfrak{p}_n$$

eine Zahl in  $\mathcal{Q}_m$  ist, und zwar eine solche, welche sich durch die Substitution  $(r, r^n)$  nicht ändert, d. h. also eine *rationale Zahl* so ist  $\prod_{n=1}^{\infty} \omega_n$  die  $m^{\text{te}}$  Potenz einer rationalen Zahl. Die höchste in dieser Zahl aufgehende Potenz von  $q$  ist  $q^{sg(m)}$  also  $q^s$  die höchste in dieser rationalen Zahl aufgehende Potenz der Primzahl  $q$ . Daraus folgt dass  $s$  durch  $m$  teilbar sein muss.

2. Es sei  $p$  eine von  $q$  verschiedene Primzahl,  $\mathfrak{p}$  ein in derselben enthaltenes Primideal und  $\mathfrak{p}^s$  die höchste in  $\omega$  aufgehende Potenz von  $\mathfrak{p}$ . Wenn durch die Substitution  $(r, r^n)$   $\mathfrak{p}$  in  $\mathfrak{p}_n$  übergeht, so ist  $\mathfrak{p}_n^s$  die höchste in  $\omega_n$  aufgehende Potenz von  $\mathfrak{p}_n$ , und nach § 1, (9) ist

$$\omega_1^{-n} \omega_n = \tilde{\omega}_n^m$$

die  $m^{\text{te}}$  Potenz einer Zahl in  $\mathcal{Q}_m$ . Nun ist (nach I, § 7, n° 4)  $\mathfrak{p}_p$  mit  $\mathfrak{p}$  identisch.

<sup>1</sup> Eine allgemeine Definition von gebrochenen Idealen findet sich bei DEDEKIND, *Über die Discriminanten endlicher Körper*, Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. 29.

• Es ist also  $p^{-s(p-1)}$  die höchste in  $\tilde{\omega}_p^m$  aufgehende Potenz von  $p$ , woraus folgt

$$(6) \quad s(p-1) \equiv 0 \pmod{m}.$$

Wenn also  $m_1$  der grösste gemeinschaftliche Teiler von  $m$  und  $(p-1)$  ist, und

$$(7) \quad m = m_1 m_2$$

so ist  $s$  teilbar durch  $m_2$ , und wenn  $m_1 = 1$  ist, so ist  $s \equiv 0 \pmod{m}$ .

3. Ist nun

$\mathfrak{p}_n^{s_n}$  die höchste Potenz von  $\mathfrak{p}_n$ , welche in  $\omega_1$  aufgeht, so ist

$\mathfrak{p}_{\nu n}^{s_n}$  die höchste Potenz von  $\mathfrak{p}_{\nu n}$ , welche in  $\omega_\nu$  aufgeht, also, wenn

$$(8) \quad \nu' \nu \equiv 1 \pmod{m},$$

$\mathfrak{p}_n^{s_{\nu n}}$  die höchste Potenz von  $\mathfrak{p}_n$  welche in  $\omega_\nu$  aufgeht (worin der Index von  $s$  nach dem Modul  $m$  zu nehmen ist). Und da nach § 1, n° 5  $\omega_1^{-\nu} \omega_\nu$  eine  $m^{\text{te}}$  Potenz einer Zahl in  $\mathcal{Q}_m$  ist:

$$(9) \quad \nu s_n \equiv s_{\nu n} \pmod{m}.$$

Setzen wir hierin  $n = 1$ , und (mit Rücksicht auf n° 2)  $s_1 \equiv am_2 \pmod{m}$ , und schreiben  $n$  an Stelle von  $\nu'$ , so folgt

$$(10) \quad s_n \equiv am_2 n', \quad nn' \equiv 1 \pmod{m},$$

wobei  $a$  und  $n'$  nach dem Modul  $m_1$  reduziert werden können.

Wenn wir also von dem Ideal  $\mathfrak{o}\omega_1$  das Product

$$\prod_{n=1}^m \mathfrak{p}_n^{m_2 an'},$$

über alle von *einander verschiedenen* in  $p$  aufgehenden Primideale erstreckt, absondern, so bleiben nur solche Potenzen von  $\mathfrak{p}_n$ , deren Exponent durch  $m$  teilbar ist. Wiederholen wir dies Betrachtung bei allen in  $\mathfrak{o}\omega_1$  vorkommenden zu verschiedenen Primzahlen  $p$  gehörigen Primideale, deren Anzahl offenbar endlich ist, so ergibt sich für  $\mathfrak{o}\omega$  folgende Zerlegung:

$$(11) \quad \mathfrak{o}\omega = \mathfrak{a}^m \prod_{n=1}^p \prod_{n=1}^m \mathfrak{p}_n^{m_2 an'},$$

worin das erste Productzeichen sich auf alle Primzahlen  $p$ , deren Primteiler in  $\varpi\omega$  vorkommen, das zweite auf alle in denselben aufgehenden von einander verschiedene Primideale  $\mathfrak{p}_n$  bezieht.

4. Wir betrachten nun neben dem Körper  $\mathcal{Q}_m$  den Körper  $\mathcal{Q}_{m_1}$  und setzen<sup>1</sup>

$$(12) \quad r^{m_2} = r_1.$$

Da  $p \equiv 1 \pmod{m_1}$  ist, so zerfällt in diesem Körper  $\varpi p$  in  $\varphi(m_1)$  verschiedene Primideale ersten Grades, die wir mit  $\mathfrak{P}_{n_1}$  bezeichnen, worin  $n_1$  ein vollständiges System incongruenter relativer Primzahlen zu  $m_1$  durchläuft.

Wenn wir nun wie in I, § 8 mit

$$(13) \quad \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{m_1-1}$$

die aus  $(p-1):m_1$  Gliedern bestehenden *Perioden der  $p^{\text{ten}}$  Einheitswurzeln* bezeichnen, und

$$(14) \quad (r_1^\nu, \eta_0) = \eta_0 + r_1^\nu \eta_1 + r_1^{2\nu} \eta_2 + \dots + r_1^{(m_1-1)\nu} \eta_{m_1-1}$$

setzen, so erhalten wir nach dem an der erwähnten Stelle bewiesenen *KUMMER'schen Theorem*: (I, § 8 (16))

$$(15) \quad \wp_1(r_1, \eta_0)^{m_1} = \prod_{t=1}^{t_1} \mathfrak{P}_{t_1}^{t'},$$

worin  $t_1$  die Reihe der zu  $m$  teilerfremden Zahlen  $< m_1$  durchläuft, und  $t'$  die kleinste positive der Congruenz

$$(16) \quad t_1 t'_1 \equiv 1 \pmod{m_1}$$

genügende Zahl ist.

Zerlegen wir nun nach I, § 7, n° 7 die Ideale  $\varpi \mathfrak{P}_{n_1}$  im Körper  $\mathcal{Q}_m$  in ihre Primideale, und erheben die Formel (15) in die  $m_2^{\text{te}}$  Potenz, so folgt, wenn  $t'$  die kleinste positive der Congruenz

$$t t' \equiv 1 \pmod{m_1}$$

genügende Zahl bedeutet:

$$(17) \quad \wp(r_1, \eta_0)^m = \prod_{t=1}^{t_1} \wp_t^{m_2 t'}$$

<sup>1</sup> Ist  $m_1 = 2$ , so ist  $\mathcal{Q}_{m_1}$  der Körper der rationalen Zahlen und  $r_1 = -1$ .

worin sich das Product nur auf die von einander verschiedenen Primideale  $\mathfrak{p}_i$  erstreckt.

Wenden wir dieselbe Betrachtung auf die sämmtlichen Producte auf der linken Seite von (11) an, so folgt:

$$(18) \quad \omega = \alpha^m \prod^p (r_1, \eta_0)^{\alpha m},$$

oder durch Anwendung der Substitution  $(r, r^n)$ :

$$(19) \quad \omega_n = \alpha_n^m \prod^p (r^{m_2 n}, \eta_0)^{\alpha m}.$$

5. Die hierin vorkommenden Grössen  $(r^{m_2 n}, \eta_0)$  sind specielle Fälle der  $\phi_n$  (I, § 8, (4)), und genügen daher den Bedingungen § 1, n° 3, dass

$$(20) \quad (r^{m_2 n}, \eta_0)^{m_1}, (r^{m_2}, \eta_0)^{-n} (r^{m_2 n}, \eta_0), \\ (r^{m_2 a}, \eta_0)^{a'} (r^{m_2 b}, \eta_0)^{b'} \dots \quad (aa' + bb' + \dots \equiv 0 \pmod{m_1})$$

Zahlen des Körpers  $\Omega_{m_1}$  und folglich auch des Körpers  $\Omega_m$  sind. Ins Besondere ist

$$(r^{m_2}, \eta_0)(r^{-m_2}, \eta_0) = \pm p.$$

6. Daraus ergiebt sich für die conjugierten Ideale  $\alpha_n$  dass

$$\text{a)} \quad \alpha_n^m \quad \text{und} \quad \text{b)} \quad \alpha_1^{-n} \alpha_n$$

Hauptideale sind.

### § 3. Untersuchung des Falles, wo $m$ eine Potenz von 2 ist.

Von jetzt an ist es notwendig, den Fall einer Potenz von 2 von dem eines ungeraden  $m$  zu trennen, und wir wenden uns zunächst dem erstenen zu.

1. Um zunächst den einfachsten Fall  $m=4$  zu erledigen bemerken wir, dass in diesem Fall nur Hauptideale existieren, und dass die einzigen Einheiten des Körpers  $\Omega_4$  die Zahlen  $\pm 1, \pm i$  sind. Wenn also  $\alpha_1$  eine Zahl des Körpers  $\Omega_4$ , d. h. eine (ganze oder gebrochene) GAUSS'sche

complexe Zahl und  $\alpha_3$ , die mit ihr conjugierte Zahl bedeutet, so folgt aus (19), § 2

$$(1) \quad \begin{aligned} \omega_1 &= \varepsilon_1 \alpha_1^4 \prod_{i=1}^p (r^{m_i}, \eta_0)^{4a} \\ \omega_3 &= \varepsilon_3 \alpha_3^4 \prod_{i=1}^p (r^{-m_i}, \eta_0)^{4a} \end{aligned}$$

worin entweder  $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \pm 1$  oder  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_3 = \pm i$  und  $r^{m_2} = -1$ , oder  $= \pm i$ . Damit ist aber, durch Ausziehen der vierten Wurzel, für diesen Fall die Frage erledigt.

2. Ist  $m \geq 8$ , so machen wir Gebrauch von den in der II<sup>ten</sup> Abhandlung bewiesenen Sätzen. Nach dem dort in § 9 bewiesenen Satze C ist die Anzahl  $h$  der Idealklassen eine ungerade Zahl, und da  $\mathfrak{a}^h$  immer ein Hauptideal ist (D., Seite 541), so folgt, wenn  $\mathfrak{a}^m$  ein Hauptideal ist, dass auch  $\mathfrak{a}$  selbst ein solches sein muss; denn es sind  $h, m$  relative Primzahlen, und wenn man daher  $x, y$  so bestimmt dass  $hx + my = 1$  wird, so ist

$$\mathfrak{a}^{hx+my} = \mathfrak{a},$$

also  $\mathfrak{a}$  ein Hauptideal. Bezeichnen wir also mit  $\alpha$  eine Zahl in  $\Omega_m$ , mit  $\varepsilon(r)$  eine reelle Einheit, so folgt aus (19) des vorigen Paragraphen:

$$(2) \quad \omega = r^k \varepsilon(r) \alpha^m \prod_{i=1}^p (r^{m_i}, \eta_0)^{am}.$$

Bildet man hieraus  $\omega_1 \omega_{-1}$ , so folgt nach § 1, n° 3 und § 2, n° 5 dass

$$(3) \quad \varepsilon(r)^2 = e(r)^m$$

eine genaue  $m^{\text{te}}$  Potenz einer Einheit ist.

Zieht man also aus (2) die  $\frac{1}{2}m^{\text{te}}$  Wurzel und bezeichnet mit  $\rho$  eine weiterhin noch genauer zu betrachtende Einheitswurzel der Ordnung  $m^2$  so folgt aus (2) wegen (3)

$$(4) \quad \phi_1^2 = \rho^2 e(r) \alpha^2 \prod_{i=1}^p (r^{m_i}, \eta_0)^{2a},$$

worin die Einheit  $e(r)$  *reell* angenommen werden kann. Die reelle Einheit  $e(r)$  genügt nun wieder in Folge von § 1, n° 3; § 2, n° 5 den Bedingungen

$$(5) \quad e(r^n) e(r)^{-n} = \pm \varepsilon^2,$$

d. h. gleich dem Quadrat einer Einheit in  $\mathcal{Q}_m$ , und das Vorzeichen in (5) kann so gewählt werden, dass  $\varepsilon$  eine *reelle* Einheit ist.

Wenden wir die Formel (5) auf  $n = \pm 1 + \frac{1}{2}m$  an, so folgt:

$$(6) \quad \begin{aligned} e(r)e(-r) &= \pm \delta(r)^2 \\ e(r)e(-r) &= \pm \mathcal{E}(r)^2 \end{aligned}$$

worin  $\delta(r)$ ,  $\mathcal{E}(r)$  reelle Einheiten sind; die Einheit  $\delta(r)$  genügt der Bedingung

$$\delta(r) = \pm \delta(-r)$$

worin aber nach I, § 9, n° 7 nur das obere Zeichen möglich ist, und mithin ist  $\delta(r)$  eine reelle Einheit des Körpers  $\mathcal{Q}_{\frac{1}{2}m}$ . Die Einheit  $\mathcal{E}(r)$  genügt der Gleichung

$$\mathcal{E}(r)\mathcal{E}(-r) = \pm 1$$

und ist also eine *primitive* Einheit des Körpers  $\mathcal{Q}_m$  (II, § 5). Aus (6) ergiebt sich dann durch Multiplication und Wurzelziehen

$$(7) \quad e(r) = \mathcal{E}(r)\delta(r)$$

(wo das positive Zeichen genommen werden kann, da  $\mathcal{E}$ ,  $\delta$  nur bis aufs Vorzeichen definiert sind). Da wir nun nach II, § 8 B die Einheit  $\delta(r)$  als Product einer *primitiven Einheit* mit dem Quadrat einer Einheit darstellen können, so können wir, indem wir die Wurzel dieses Quadrats mit  $\alpha$  vereinigen, annehmen, dass die in (4) vorkommende Einheit  $e(r)$  selbst eine primitive Einheit sei.

Wir leiten nun aus (4), indem wir  $r$  durch  $r^n$  ersetzen und die Wurzel ausziehen, für  $\psi_n$  den Ausdruck her

$$(8) \quad \psi_n = \rho_n \sqrt{e(r^n)} \alpha_n \prod_{i=1}^p (r^{m_i n}, \eta_0)^{\alpha_i}$$

wobei bezüglich der Quadratwurzel nur soviel festgesetzt sein soll, dass

$$(9) \quad \sqrt{e(r^n)} = \sqrt{e(r^{-n})}$$

sei.

Nach (5) ist alsdann  $\sqrt{e(r^n)}\sqrt{e(r)}^{-n}$  eine Zahl des Körpers  $\Omega_m$ . Bilden wir nun aus (8) das Product  $\phi_n \phi_{-n}$ , so folgt nach § 2, n° 5

$$(10) \quad \rho_n \rho_{-n} = \frac{\phi_n \phi_{-n}}{e(r^n) \alpha_n \alpha_{-n} \prod(\pm p)^a}$$

also eine Zahl des Körpers  $\Omega_n$ , und zwar eine *reelle Zahl*. Da aber  $\rho_n \rho_{-n}$  eine Einheitswurzel ist, so kann diese Zahl nur  $= \pm 1$  sein, und da sich hiernach der Wert der rechten Seite von (10) durch die Permutationen des Körpers  $\Omega_n$  nicht ändert, so folgt:

$$(11) \quad \rho_n \rho_{-n} = \rho_1 \rho_{-1} = \pm 1.$$

Es ist nun aber ebenso:

$$(12) \quad \rho_n \rho_1^{-n} \sqrt{e(r^n)} \sqrt{e(r)}^{-n} = \frac{\phi_n \phi_1^{-n}}{\alpha_n \alpha_1^{-n} \prod(r^{m_2 n}, \eta_0)^a (r^{m_2}, \eta_0)^{-an}}$$

also gleichfalls eine Zahl in  $\Omega_n$  und zwar eine Einheit, die wir

$$(13) \quad = r^k \mathcal{E}(r)$$

setzen, indem wir unter  $\mathcal{E}(r)$  eine reelle Einheit verstehen. Ebenso ergibt sich

$$(14) \quad \rho_{-n} \rho_{-1}^n \sqrt{e(r^n)} \sqrt{e(r)}^{-n} = \frac{\phi_{-n} \phi_{-1}^{-n}}{\alpha_{-n} \alpha_{-1}^{-n} \prod(r^{-m_2 n}, \eta_0)^a (r^{-m_2}, \eta_0)^{-an}}$$

und da die rechte Seite von (14) aus der rechten Seite von (12) durch die Permutation  $(r, r^{-1})$  entsteht, so folgt ihr Wert

$$(15) \quad = r^{-k} \mathcal{E}(r).$$

Multipliziert man also (12) mit (14), so ergiebt sich mit Rücksicht auf (11)

$$(16) \quad e(r^n) e(r)^{-n} = \mathcal{E}(r)^2$$

woraus, da  $\mathcal{E}(r)$  reell, also  $\mathcal{E}(r)^2$  positiv ist, nach dem Satz A in § 6 der zweiten Abhandlung folgt, dass  $e(r)$  das Quadrat einer Einheit in  $\Omega_m$  ist. Damit ist aber durch die Formel (8) für diesen Fall der KRONECKER'sche Satz bewiesen.

Was die Einheitswurzeln  $\rho_n$  betrifft, so ergiebt sich für dieselben aus (12), wenn  $\theta$  irgend eine  $m^{\text{te}}$  Einheitswurzel bedeutet:

$$(17) \quad \rho_{n\theta} = \theta^n \rho_n,$$

und durch wiederholte Anwendung dieser Formel

$$(18) \quad \rho_{n^k} = \theta^{kn^{k-1}} \rho^{n^k}.$$

Setzt man hierin  $n = 5$ ,  $k = \frac{1}{4}m$ , so schliesst man hieraus, dass die Ordnung der Einheitswurzel  $\rho$  höchstens die  $4m^{\text{te}}$  sein kann.

#### § 4. Beweis eines Hilfssatzes.

Wir schicken unseren weiteren Betrachtungen den Beweis eines einfachen Lemma's voraus, welches wir so aussprechen:

Es sei

$$m = q^k$$

eine Potenz einer ungeraden Primzahl und es bedeute  $E(x)$  die grösste in  $x$  enthaltene ganze Zahl,  $t$  bedeute jede positive ganze Zahl, relativ prim zu  $m$  und kleiner als  $m$ ;  $t'$  eine ebensolche Zahl, die aus der Bedingung

$$(1) \quad tt' \equiv 1 \pmod{m}$$

bestimmt ist.

Es ist zu beweisen, dass man eine durch  $q$  nicht teilbare ganze Zahl  $n$  so annehmen kann, dass

$$(2) \quad \sum t'E\left(\frac{tn}{m}\right)$$

durch  $q$  nicht teilbar ist.

Die Richtigkeit dieses Satzes ist zunächst leicht einzusehen, wenn  $m = q$  eine Primzahl ist; denn bedeutet  $n$  eine beliebige positive ganze Zahl, kleiner als  $q$ , so ist

$$(3) \quad E\left(\frac{nt}{q}\right) + E\left(\frac{(q-n)t}{q}\right) = t - 1,$$

und wenn man mit  $t'$  multipliziert und die Summe nimmt, so folgt, da  $\sum t' \equiv 0 \pmod{q}$ :

$$(4) \quad \sum t'E\left(\frac{nt}{q}\right) + \sum t'E\left(\frac{(q-n)t}{q}\right) \equiv -1 \pmod{q}.$$

Es können also nicht *beide* Summen auf der linken Seite dieser Gleichung durch  $q$  teilbar sein, und wir dürfen also annehmen, es sei

$$(5) \quad \sum t'E\left(\frac{nt}{q}\right) \text{ nicht durch } q \text{ teilbar.}$$

Es lässt sich nun zeigen, dass diese selbe Zahl  $n$ , in die allgemeine Summe (2) eingesetzt, diese durch  $q$  unteilbar macht. Wir setzen zu diesen Zweck

$$m = qm', \quad m' \geqq q$$

$$(6) \quad t = t_1 + qt_2; \quad \begin{pmatrix} t_1=1, 2, \dots, q-1 \\ t_2=0, 1, \dots, m'-1 \end{pmatrix}$$

$$t_1 t'_1 \equiv 1 \pmod{q}, \quad tt' \equiv 1 \pmod{m}.$$

Es ist alsdann

$$(7) \quad t' \equiv t'_1 \pmod{q}.$$

Darnach wird die Summe (2)

$$(8) \quad \sum t'E\left(\frac{tn}{m}\right) \equiv \sum_{t_1}^{t_1} \sum_{t_2}^{t_2} E\left(\frac{nt_2}{m'} + \frac{nt_1}{m}\right) \pmod{q}.$$

Da nun  $nt_1 < m$ , so folgt

$$(9) \quad E\left(\frac{nt_2}{m'} + \frac{nt_1}{m}\right) \text{ entweder } = E\left(\frac{nt_2}{m'}\right)$$

$$(10) \quad \text{oder } = E\left(\frac{nt_2}{m'}\right) + 1;$$

(10) tritt jedesmal dann ein, wenn zwischen

$$\frac{nt_2}{m'} \quad \text{und} \quad \frac{nt_2}{m'} + \frac{nt_1}{m}$$

eine ganze Zahl liegt, d. h. wenn

$$(11) \quad E\left(\frac{nt_2}{m'}\right) + 1 - \frac{nt_2}{m'} < \frac{nt_1}{m}.$$

Die linke Seite von (11) stellt lauter positive, die Einheit nicht übersteigende Brüche dar mit dem Nenner  $m'$ , von denen, wenn  $t_2$  die Zahlenreihe  $0, 1, \dots, m' - 1$  durchläuft, nicht zwei einander gleich sind. Es durchläuft daher die linke Seite von (11) in irgend einer Reihenfolge die Reihe der Zahlen

$$(12) \quad \frac{1}{m'}, \frac{2}{m'}, \dots, \frac{m' - 1}{m'}, 1,$$

und wenn nun  $\alpha$  einen beliebigen positiven echten Bruch bedeutet, so ist  $E(m'\alpha)$  die Anzahl derjenigen Zahlen der Reihe (12), welche nicht grösser als  $\alpha$  sind.

Die Anzahl der Werte von  $t_2$ , für welche die Ungleichung (11) statt hat ist daher

$$= E\left(\frac{nt_1}{q}\right)$$

und ebenso oft tritt also auch der Fall (10) ein. Wenn wir daher die Summe der linken Seite von (9), (10) bilden, so folgt:

$$(13) \quad \sum_{t_2}^t E\left(\frac{nt_2}{m'} + \frac{nt_1}{m}\right) = E\left(\frac{nt_1}{q}\right) + \sum_{t_2}^t E\left(\frac{nt_2}{m'}\right).^1$$

Setzen wir dies in (8) ein und beachten dass  $\sum t'_1 \equiv 0 \pmod{q}$  ist, so folgt

$$(14) \quad \sum t'E\left(\frac{t_n}{m}\right) \equiv \sum t'_1 E\left(\frac{nt_1}{q}\right) \pmod{q},$$

wodurch nach (5) der Hilfsatz bewiesen ist.

### § 5. Untersuchung des Falles, wo $m$ eine ungerade Zahl ist.

Es kommt nun vor allen Dingen darauf an, nachzuweisen, dass auch im Falle eines ungeraden  $m$  aus den Bedingungen a), b) am Schluss des § 2 folgt, dass die  $a_m$  Hauptideale sind.

<sup>1</sup> Diese Formel ist eine leichte Verallgemeinerung einer von HERMITE (*Acta mathematica*, B. 5, S. 315) bewiesenen Formel. Man vgl. auch den Beweis der letzteren von STERN, *Acta mathematica*, B. 8, S. 94.

Wir behalten die bisherige Bezeichnung bei, indem wir

$$(1) \quad m = m_1 m_2 = q^k$$

setzen, unter  $m_1$ , welches  $> 1$  vorausgesetzt ist, den grössten gemeinschaftlichen Teiler von  $m$  und  $p - 1$  verstehen und mit  $t$ ,  $t'$  resp.  $t_1$ ,  $t'_1$  die Reihe der durch  $q$  nicht teilbaren positiven Zahlen,  $< m$  resp.  $< m_1$  bezeichnen, welche den Bedingungen

$$(2) \quad tt' \equiv 1 \pmod{m}, \quad t_1 t'_1 \equiv 1 \pmod{m_1}$$

genügen, und zwar sei stets

$$(3) \quad t \equiv t_1 \pmod{m_1},$$

folglich auch

$$(4) \quad t' \equiv t'_1 \pmod{m_1}.$$

Wir bezeichnen endlich noch mit  $(x)$  den *kleinsten positiven Rest* einer ganzen Zahl  $x$  nach dem Modul  $m$ , so dass  $x = mE\left(\frac{x}{m}\right) + (x)$  ist.

Die Primzahl  $p$  gehört nach dem Modul  $m$  zum Exponenten  $m_2$ , d. h.  $p^{m_2}$  ist die niedrigste Potenz von  $p$  welche nach dem Modul  $m$  der Einheit congruent ist, und daher sind die Potenzen von  $p$

$$1, \quad p, \quad p^2, \dots, \quad p^{m_2-1}$$

sämmtlich modulo  $m$  verschieden, und sämmtlich  $\equiv 1 \pmod{m_1}$ . Es ist also auch jede der Zahlen  $t$  einer und nur einer der Zahlen

$$t_1, \quad t_1 p, \quad t_1 p^2, \dots, \quad t_1 p^{m_2-1}$$

nach dem Modul  $m$  congruent und es lässt sich  $\lambda$  so bestimmen, dass

$$(5) \quad t = (p^\lambda t_1)$$

wird.

Nun zerfällt  $p$  im Körper  $\mathcal{Q}_m$  in  $\varphi(m_1)$  von einander verschiedene Primideale  $\mathfrak{p}_t$ , und in ebensoviele Primideale  $\mathfrak{P}_{t_1}$  zerfällt  $p$  im Körper  $\mathcal{Q}_{m_1}$  so dass (I, § 7, n° 4 und n° 8):

$$(6) \quad \mathfrak{p}_t = \mathfrak{p}_{t_1} = \mathfrak{o}\mathfrak{P}_{t_1},$$

und wir betrachten nun das Idealproduct

$$(7) \quad \mathfrak{d} = \prod' \mathfrak{p}_i^{t_i}$$

welches in Folge von (4), (5), (6) sich auch so darstellen lässt:

$$(8) \quad \mathfrak{d} = \prod \mathfrak{p}_{i_1'}^{t_1 + (pt_1) + \dots + (p^{m_2-1}t_1)} = \prod \mathfrak{p}_{i_1'}^{\sum_{\lambda} (p^\lambda t_1)}.$$

Das Ideal  $\mathfrak{d}$  gehe durch die Substitution  $(r, r^n)$  in  $\mathfrak{d}_n$  über. Ein solches Ideal  $\mathfrak{d}$  kann aus jedem Ideal  $\mathfrak{p}$  des Körpers  $\Omega_m$  hergeleitet werden, wenn nur die zugehörige Primzahl  $p \equiv 1 \pmod{q}$  ist. Nun ist aber für jeden Exponenten  $\lambda$ , wenn  $h_\lambda$  eine passend bestimmte ganze Zahl ist, für ein festes  $t_1$

$$(9) \quad (p^2 t_1) - t_1 = m_1 h_\lambda,$$

und hierin ist:

1.  $h_\lambda$  nicht negativ, weil eine Zahl für den Modul  $m_1$  keinen grösseren Rest haben kann als für den Modul  $m$ ,
2.  $h_\lambda < m_2$ , weil  $(p^\lambda t_1) < m$  ist, und
3.  $h_\lambda$  von  $h_{\lambda'}$  verschieden, wenn  $\lambda' \pmod{m_2}$  von  $\lambda$  verschieden ist (da sonst  $p^\lambda \equiv p^{\lambda'} \pmod{m}$  sein müsste).

Mithin durchläuft  $h_\lambda$  zugleich mit  $\lambda$ , wenn auch in anderer Reihenfolge, die Zahlen 0, 1, 2, ...,  $m_2 - 1$  und demnach ergiebt sich aus (9)

$$\sum_{\lambda} (p^\lambda t_1) = m_2 t_1 + \frac{1}{2} m(m_2 - 1)$$

woraus nach (8)

$$(10) \quad \mathfrak{d} = p^{\frac{1}{2}m(m_2-1)} \prod \mathfrak{p}_{i_1'}^{t_1} (p^2)^{m_2}.$$

Es ist daher, wenn wir die Bezeichnung § 2, (13), (14) beibehalten, nach dem KUMMER'schen Theorem (I, § 8):

$$(11) \quad \mathfrak{d} = \mathfrak{p} p^{\frac{1}{2}m(m_2-1)} (r^{m_2}, \eta_0)^m.$$

Daraus ergiebt sich nun, dass nicht nur  $\mathfrak{d}$  ein Hauptideal ist, sondern dass auch die Producte  $\mathfrak{d}_1^{-n} \mathfrak{d}_n$   $m'$ e Potenzen von Hauptidealen sind. (§ 2, n° 5.)

Auf Grund hiervon lässt sich nun beweisen, dass, wenn die Bedingungen erfüllt sind:

$$\text{a) } \alpha_n^m \quad \text{b) } \alpha_n \alpha_1^{-n} \text{ sind Hauptideale,}$$

die conjugierten Ideale  $\alpha_n$  selbst *Hauptideale* sein müssen.

Dieser Beweis setzt sich aus zwei Teilen zusammen:

1. Es werde angenommen, dass in dem Ideale  $\alpha$  nur die Primfaktoren solcher Primzahlen  $p$  vorkommen, welche  $\equiv 1 \pmod{q}$  sind, auf welche also die Formel (11) und die daran geknüpfte Folgerung Anwendung findet.

Unter dieser Voraussetzung ist wegen (7) und (11)

$$(12) \quad \alpha = \prod_{t=1}^{\ell} \alpha_t^t \text{ ein Hauptideal.}$$

Es ist aber ferner

$$\alpha_n = \prod_{t=1}^{\ell} \alpha_{nt}^t = \prod_{t=1}^{\ell} \alpha_t^{(nt)}$$

und folglich

$$(13) \quad \alpha_n^{-1} \alpha_1^n = \left( \prod_{t=1}^{\ell} \alpha_t^{E\left(\frac{nt}{m}\right)} \right)^m,$$

was nach (11) die  $m^{\text{te}}$  Potenz eines Hauptideals ist. Also

$$(14) \quad \prod_{t=1}^{\ell} \alpha_t^{E\left(\frac{nt}{m}\right)} \text{ ein Hauptideal.}$$

Nach der Voraussetzung b) ist aber  $\alpha_t$  äquivalent  $\alpha'$ , und also nach (14) auch

$$(15) \quad \alpha \sum_{t=1}^{\ell} E\left(\frac{nt}{m}\right) \text{ ein Hauptideal.}$$

Nach dem Hilfssatz § 4 kann man aber die ganze Zahl  $n$  so annehmen, dass  $\sum_{t=1}^{\ell} t' E\left(\frac{nt}{m}\right)$  nicht teilbar ist durch  $q$  und mithin folgt aus a) und (15) dass  $\alpha$  ein Hauptideal ist.

2. Es sei jetzt  $p$  eine  $\pmod{m}$  zum Exponenten  $f$  gehörige Primzahl, und

$$\varphi(m) = ef,$$

jedoch sei  $p$  nicht  $\equiv 1 \pmod{q}$ , mithin  $f$  nicht eine Potenz von  $q$  und  $e$

nicht durch  $q - 1$  teilbar. Eine solche Primzahl  $p$  zerfällt in  $\Omega_m$  in  $e$  verschiedene Primideale  $f^{ten}$  Grades. Wir legen eine primitive Wurzel  $c$  von  $m$  zu Grunde und lassen  $\xi$  nach dem Modul  $m$  die Reihe der Zahlen

$$(16) \quad c^0, c^1, \dots, c^{e-1}$$

durchlaufen; bezeichnen wir dann mit  $\mathfrak{p}_\xi$  die in  $p$  aufgehenden Primideale, so ist:

$$(17) \quad \wp = \prod^{\xi} \mathfrak{p}_\xi,$$

und die Bezeichnung kann so gewählt werden, dass durch die Substitution  $(r, i^n)$ ,  $\mathfrak{p}_\xi$  in  $\mathfrak{p}_{n\xi}$  übergeht. Es enthalte jetzt unser Ideal  $\mathfrak{a}$  Primideale  $f^{ten}$  Grades und die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes werde vorausgesetzt für alle diejenigen Ideale, welche keine Primideale  $f^{ten}$  Grades, und keine Primideale von anderen Graden wie  $\mathfrak{a}$  enthalten.

Die Ideale

$$(18) \quad \mathfrak{b} = \prod^{\xi} \mathfrak{a}_\xi; \quad \mathfrak{b}_n = \prod^{\xi} \mathfrak{a}_{n\xi}$$

sind nun wegen (17) mit solchen Idealen äquivalent welche keine Primideale  $f^{ten}$  Grades enthalten und sonst keine anderen als solche die auch in  $\mathfrak{a}_n$  vorkommen. Ausserdem ist aber nach a)

$$(19) \quad \mathfrak{b}_n^m \text{ ein Hauptideal}$$

und nach b)

$$(20) \quad \mathfrak{b}_n \text{ äquivalent } \mathfrak{a}^{n^{\Sigma_\xi}}, \text{ äquivalent } \mathfrak{b}^n,$$

d. h. die Voraussetzungen a), b) sind für das Ideal  $\mathfrak{b}$  befriedigt, und daher ist n. V.

$$(21) \quad \mathfrak{b} \text{ ein Hauptideal.}$$

Es ist aber

$$\mathfrak{b} \text{ äquivalent } \mathfrak{a}^{\Sigma_\xi}$$

und

$$\Sigma_\xi \equiv \frac{c^e - 1}{c - 1} \pmod{m};$$

da nun  $e$  nicht durch  $q - 1$  teilbar ist, so ergiebt sich, dass auch  $\sum \xi$  nicht durch  $q$  teilbar ist, und da also

$$\alpha^m \quad \text{und} \quad \alpha^{\sum \xi}$$

Hauptideale sind, so gilt das gleiche auch von  $\alpha$ . Damit ist also der an die Spitze dieses Paragraphen gestellte Satz allgemein bewiesen.

### § 5. Fortsetzung und Schluss.

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich nun aus § 2, (18) folgern, wenn  $\alpha$  eine Zahl,  $\mathcal{E}(r)$  eine Einheit in  $\Omega_m$  bedeutet:

$$(1) \quad \omega = \mathcal{E}(r) \alpha^m \prod_{i=1}^p (r^{m_i}, \eta_0)^{am_i},$$

und die Einheit  $\mathcal{E}(r)$  muss wegen § 1, n° 3; § 2, n° 5 der Bedingung genügen dass

$$\mathcal{E}^{-n}(r) \mathcal{E}(r^n)$$

die  $m^{\text{te}}$  Potenz einer Einheit ist.

Setzen wir nach I, § 9, n° 2

$$(2) \quad \mathcal{E}(r) = r^\nu c(r)$$

wo  $c(r)$  eine reelle Einheit des Körpers  $\Omega_m$  ist, also der Bedingung

$$(3) \quad c(r) = c(r^{-1})$$

genügt, so ist auch

$$c(r^n) c(r)^{-n} = \varepsilon(r)^m$$

die  $m^{\text{te}}$  Potenz einer Einheit, und folglich (für  $n = -1$ )

$$c(r)^2 = \varepsilon(r)^m;$$

da  $m$  ungerade, so folgt hieraus, dass  $c(r)$  selbst eine  $m^{\text{te}}$  Potenz ist, und wenn wir dieselbe mit  $\alpha^m$  vereinigen, so kann (1) jetzt so geschrieben werden

$$(4) \quad \omega = r^\nu \alpha^m \prod_{i=1}^p (r^{m_i}, \eta_0)^{am_i},$$

und durch Ausziehen der  $m^{\text{ten}}$  Wurzel, indem  $\rho$  eine  $mm^{\text{te}}$  Wurzel der Einheit bedeutet:

$$(5) \quad \psi = \rho \alpha \prod_{i=1}^p (r^{m_i}, \eta_0)^a.$$

Aus dem Umstand, dass  $\psi_n \psi_1^{-n}$  dem Körper  $\mathcal{Q}_m$  angehört, schliesst man noch für die Einheitswurzel  $\rho_n$ , wenn  $\theta$  irgend eine Potenz von  $r$  bedeutet:

$$\rho_{vn} = \theta^v \rho_v^n,$$

und durch Anwendung dieser Formel auf  $v = 1, n, \dots, n^{\lambda}$ :

$$(6) \quad \rho_{n^{\lambda}} = \theta^{\lambda n^{\lambda}-1} \rho^{n^{\lambda}},$$

woraus, wenn man für  $n$  eine primitive Wurzel von  $q^2$  und für  $\lambda$  den Wert  $\varphi(m)$  setzt, sich schliessen lässt, dass  $\rho$  höchstens eine  $qm^{\text{te}}$  Einheitswurzel ist.

*Durch die Formel (5) ist nun der KRONECKER'sche Satz auch für diesen Fall allgemein bewiesen.*

Marburg, im März 1886.

**Preisaufgabe der fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft für das Jahr 1889.**

Obgleich durch die Untersuchungen von BÖRCHARDT über das arithmetisch-geometrische Mittel ein gewisser Zusammenhang der Thetafunctionen mehrerer Variabeln mit mehrfachen Integralen nachgewiesen worden, und obgleich die Ausdehnung des ABEL'schen Theorems auf vielfache algebraische Integrale schon JACOBI nicht unbekannt war,<sup>1</sup> so scheinen doch selbst die betreffenden Doppelintegrale noch keiner erschöpfenden Betrachtung unterworfen worden zu sein. Da sich nun zeigen lässt, dass wenn z. B.  $\vartheta \vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_4 \vartheta_5$  gewisse einer sogenannten ROSENHAIN'schen Gruppe (CRELLE's Journal Bd. XL, S. 342) angehörige Thetafunctionen zweier Variabeln  $u$  und  $v$  bedeuten, die Determinante

$$\begin{vmatrix} \vartheta & \vartheta_1 & \vartheta_2 \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial u} & \frac{\partial \vartheta_1}{\partial u} & \frac{\partial \vartheta_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial v} & \frac{\partial \vartheta_1}{\partial v} & \frac{\partial \vartheta_2}{\partial v} \end{vmatrix}$$

dem Product  $\vartheta_3 \vartheta_4 \vartheta_5$  proportional ist, so ergibt sich daraus (Leipziger Berichte 1884, S. 187) für  $x = \left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta}\right)^2$ ,  $y = \left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta}\right)^2$  eine Gleichung von der Form  $du dv = \frac{dxdy}{\sqrt{R(x,y)}}$ . Die Gesellschaft wünscht

eine eingehende Untersuchung der allgemeineren Doppelintegrale von der Form

$$\iint \frac{f(xy) dx dy}{\sqrt{R(xy)}},$$

wo  $f$  eine rationale Function sei, in ihrem Zusammenhange mit den Thetafunctionen zweier Variabeln.

Preis 1000 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind in *deutscher, lateinischer oder französischer Sprache* zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und *paginiert*, ferner mit einem *Motto* versehen und von einem versiegelten Couvert begleitet sein, das auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet mit dem *30 November 1889*, und die Zusendung ist an den *Secretär* der Gesellschaft zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April 1890 bekannt gemacht. Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

<sup>1</sup> Siehe CRELLE's Journal Bd. VIII, S. 415, sowie ROSENHAIN in seinen an JACOBI gerichteten Briefen, CRELLE's Journal Bd. XL, wo auch Integrale von der Form  $\iint \frac{dt du}{\sqrt{F(tu)}}$  betrachtet werden, in denen  $F(tu)$  das Product von sechs linearen Factoren  $A + Bt + Cu$  ist. Vergl. ferner die NÖTHER'schen Arbeiten in den Göttinger Nachrichten 1869, N° 15 und Bd. II der Mathematischen Annalen, S. 293.

SUR QUELQUES APPLICATIONS DE LA FONCTION  $Z(x, y, z)$   
 À LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

PAR

P. APPELL

À PARIS.

1. Dans un mémoire »*Sur les fonctions de trois variables réelles satisfaisant à l'équation  $\Delta F = 0$* » publié dans le tome 4 des *Acta Mathematica*, je me suis occupé plus particulièrement de celles de ces fonctions qui ne cessent d'être finies et continues qu'en certains points isolés les uns des autres. Les fonctions qui se présentent ensuite sont celles qui possèdent des lignes ou des surfaces de points singuliers ou des espaces lacunaires. Il est facile d'étendre à ces fonctions les résultats que M. PICARD (*Comptes Rendus*, 15 mai 1882) et M. GOURSAT (*Ibid.*, 26 février 1883) ont donnés pour les fonctions uniformes d'une variable complexe possédant des lignes de points singuliers ou des espaces lacunaires. L'extension se fera en suivant exactement la méthode employée par M. GOURSAT et en s'appuyant sur les développements en série que j'ai indiqués pour une fonction de  $x, y, z$  vérifiant l'équation  $\Delta F = 0$  régulièrè en tous les points d'un volume limité par des portions de surfaces sphériques. (Voyez page 344 de mon premier mémoire).

Sans m'arrêter à cette généralisation facile, je vais appliquer la fonction  $Z(x, y, z)$  définie dans mon précédent mémoire à la solution de certaines questions de Physique mathématique. Ces applications sont fondées sur l'extension du théorème de M. MITTAG-LEFFLER aux fonctions uniformes satisfaisant à l'équation différentielle  $\Delta F = 0$ ; elles compren-

nent, comme cas particuliers, la détermination de la fonction de Green pour un parallélépipède rectangle telle qu'elle a été donnée par RIEMANN,<sup>1</sup> et la détermination des vitesses dans l'écoulement d'un liquide par le fond d'un vase prismatique telle qu'elle a été indiquée dans différentes notes insérées aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris<sup>2</sup> par MM. BOUSSINESQ, DE SAINT-VENANT et FLAMANT. Dans toutes ces applications, le seul élément analytique nouveau qu'il soit nécessaire d'introduire est la fonction que j'ai appelée  $Z(x, y, z)$  et dont j'ai étudié précédemment les principales propriétés, ou les fonctions plus simples auxquelles se réduit cette fonction  $Z(x, y, z)$  quand un ou deux groupes de périodes deviennent infinis (Acta Mathematica, T. 4, p. 374). L'introduction de la fonction  $Z$  qui est définie par une série absolument convergente permet d'éviter l'emploi des séries non absolument convergentes auxquelles certains des auteurs cités ci-dessus ont eu recours.

Des exemples de la méthode suivie dans le présent mémoire ont été donnés dans deux notes que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie des Sciences le 28 janvier et le 11 février 1884, la seconde en commun avec M. CHERVET.

2. Rappelons d'abord la définition et les principales propriétés de la fonction  $Z(x, y, z)$ . Soient, par rapport à un système d'axes coordonnés rectangulaires, trois points de coordonnées respectives

$$(a, b, c), \quad (a', b', c'), \quad (a'', b'', c'')$$

non situés dans un même plan avec l'origine, c'est à dire tels que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro; nous supposerons le déterminant positif et nous dirons que les quantités

$$(a, b, c), \quad (a', b', c'), \quad (a'', b'', c'')$$

<sup>1</sup> *Schwere, Electricität und Magnetismus*, bearbeitet von HATTENDORFF, p. 84.

<sup>2</sup> Années 1870: 3, 31 janvier, 30 mai; 1882: 3, 10, 24 Avril; 1883: 12, 19 Novembre.

sont les trois groupes de périodes de la fonction  $Z$ . En employant les mêmes notations que dans mon premier mémoire (Acta Mathematica T. 4, p. 351), désignons par  $m, m', m''$  trois nombres qui prennent toutes les valeurs entières positives, négatives et nulles, et posons

$$a_\nu = ma + m'a' + m''a''$$

$$b_\nu = mb + m'b' + m''b''$$

$$c_\nu = mc + m'c' + m''c'';$$

les points de coordonnées  $(a_\nu, b_\nu, c_\nu)$  formeront les sommets d'un réseau de parallélépipèdes tous égaux entre eux. Faisons

$$r = + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\rho = + \sqrt{a_\nu^2 + b_\nu^2 + c_\nu^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{xa_\nu + yb_\nu + zc_\nu}{r\rho}$$

$$R = + \sqrt{(x - a_\nu)^2 + (y - b_\nu)^2 + (z - c_\nu)^2} = + \sqrt{r^2 - 2r\rho \cos \varphi + \rho^2}$$

et désignons par  $\Sigma'$  une sommation étendue à toutes les valeurs de  $m, m', m''$ , la combinaison  $m = m' = m'' = 0$  étant exceptée. Alors la fonction  $Z(x, y, z)$  est définie par la série

$$(1) \quad Z(x, y, z) = \frac{1}{r} + \sum' \left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{\rho} - \frac{r}{\rho^2} P_1(\cos \varphi) - \frac{r^2}{\rho^3} P_2(\cos \varphi) \right]$$

dans laquelle  $P_1$  et  $P_2$  sont les deux premiers polynômes de LEGENDRE

$$P_1(\cos \varphi) = \cos \varphi, \quad P_2(\cos \varphi) = \frac{3}{2} \left( \cos^2 \varphi - \frac{1}{3} \right)$$

d'où

$$\frac{r P_1(\cos \varphi)}{\rho^2} = \frac{xa_\nu + yb_\nu + zc_\nu}{\rho^3}$$

$$\frac{r^2 P_2(\cos \varphi)}{\rho^3} = \frac{3}{2\rho^3} \left[ \frac{(xa_\nu + yb_\nu + zc_\nu)^2}{\rho^2} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \right].$$

Pour toutes les positions du point de coordonnées  $(x, y, z)$  distinctes des points  $(a_\nu, b_\nu, c_\nu)$ , la série (1) est absolument convergente et la méthode suivie pour démontrer sa convergence permet de trouver une limite supérieure du reste. En outre la différence

$$Z(x, y, z) - \frac{1}{\sqrt{(x-a_\nu)^2 + (y-b_\nu)^2 + (z-c_\nu)^2}}$$

est régulière au point  $(a_\nu, b_\nu, c_\nu)$ .

La fonction  $Z$  ainsi définie dépend des trois coordonnées variables  $(x, y, z)$  et des trois groupes de périodes

$$(a, b, c), \quad (a', b', c'), \quad (a'', b'', c'');$$

quand il sera nécessaire de faire mention de ces périodes on pourra désigner la fonction  $Z(x, y, z)$  par

$$Z\left( \begin{array}{c|ccc} & a, & b, & c \\ x, y, z & a', & b', & c' \\ & a'', & b'', & c'' \end{array} \right);$$

quand il n'y aura aucun doute possible sur les valeurs des trois groupes de périodes, nous écrirons comme précédemment  $Z(x, y, z)$ .

Cette fonction  $Z$  vérifie l'équation

$$\Delta Z = \frac{d^2Z}{dx^2} + \frac{d^2Z}{dy^2} + \frac{d^2Z}{dz^2} = 0;$$

elle satisfait aux trois relations fondamentales

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} Z(x+a, y+b, z+c) - Z(x, y, z) = Ax + By + Cz + E \\ Z(x+a', y+b', z+c') - Z(x, y, z) = A'x + B'y + C'z + E' \\ Z(x+a'', y+b'', z+c'') - Z(x, y, z) = A''x + B''y + C''z + E'' \end{array} \right.$$

dans lesquelles  $A, B, C, A', B', C', A'', B'', C''$ ,  $E, E', E''$  sont des constantes dépendant des neuf quantités  $a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''$ . Ces constantes peuvent s'exprimer comme il suit.

La série qui définit  $Z(x, y, z)$  montre que cette fonction ne change pas quand  $x, y, z$  changent de signes en même temps, car si l'on change de signes  $x, y, z$  et  $m, m', m''$  le terme général de la série ne change pas. Ainsi l'on a

$$Z(-x, -y, -z) = Z(x, y, z).$$

D'après cela, si, dans la première des équations fondamentales (2), on fait

$$x = -\frac{a}{2}, \quad y = -\frac{b}{2}, \quad z = -\frac{c}{2}$$

le premier membre de cette relation s'annule et il vient

$$E = \frac{1}{2}(Aa + Bb + Cc).$$

On a de même

$$E' = \frac{1}{2}(A'a' + B'b' + C'c')$$

$$E'' = \frac{1}{2}(A''a'' + B''b'' + C''c'').$$

Désignons par

$$Z'_x(x, y, z), \quad Z'_y(x, y, z), \quad Z'_z(x, y, z)$$

les dérivées partielles de la fonction  $Z$  par rapport à  $x, y, z$ . Ces trois fonctions changent de signes quand  $x, y, z$  changent de signes en même temps. Par exemple, on a

$$Z'_x(-x, -y, -z) = -Z'_x(x, y, z).$$

En différentiant par rapport à  $x$  les deux membres de la relation fondamentale

$$Z(x+a, y+b, z+c) - Z(x, y, z) = Ax + By + Cz + E,$$

il vient

$$Z'_x(x+a, y+b, z+c) - Z'_x(x, y, z) = A;$$

d'où en faisant

$$x = -\frac{a}{2}, \quad y = -\frac{b}{2}, \quad z = -\frac{c}{2}$$

$$A = {}_2Z'_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right);$$

de même

$$B = {}_2Z'_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

$$C = {}_2Z'_z\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right).$$

On trouverait, par un calcul identique, les valeurs des six constantes  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$ :

$$A' = {}_2Z'_x\left(\frac{a'}{2}, \frac{b'}{2}, \frac{c'}{2}\right), \quad B' = {}_2Z'_y\left(\frac{a'}{2}, \frac{b'}{2}, \frac{c'}{2}\right), \quad C' = {}_2Z'_z\left(\frac{a'}{2}, \frac{b'}{2}, \frac{c'}{2}\right)$$

$$A'' = {}_2Z'_x\left(\frac{a''}{2}, \frac{b''}{2}, \frac{c''}{2}\right), \quad B'' = {}_2Z'_y\left(\frac{a''}{2}, \frac{b''}{2}, \frac{c''}{2}\right), \quad C'' = {}_2Z'_z\left(\frac{a''}{2}, \frac{b''}{2}, \frac{c''}{2}\right).$$

De cette façon les constantes qui figurent dans les équations fondamentales (2) sont exprimées par des séries absolument convergentes. On connaît *a priori* un certain nombre de relations entre ces constantes ainsi que je l'ai montré dans mon premier mémoire. Parmi ces relations, je me bornerai à rappeler la suivante. Considérons le trièdre ayant pour sommet l'origine et dont les arêtes passent par les points de coordonnées

$$(a, b, c), \quad (a', b', c'), \quad (a'', b'', c'');$$

appelons  $\theta$ ,  $\theta'$ ,  $\theta''$  les faces de ce trièdre,

$$(\lambda, \mu, \nu), \quad (\lambda', \mu', \nu'), \quad (\lambda'', \mu'', \nu'')$$

les cosinus directeurs des arêtes du trièdre supplémentaire et  $l$ ,  $l'$ ,  $l''$  les distances des trois points

$$(a, b, c), \quad (a', b', c'), \quad (a'', b'', c'')$$

à l'origine. On aura

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\lambda A + \mu B + \nu C)ll'' \sin \theta + (\lambda' A' + \mu' B' + \nu' C')l'l \sin \theta' \\ \quad + (\lambda'' A'' + \mu'' B'' + \nu'' C'')l'l' \sin \theta'' = -4\pi. \end{array} \right.$$

3. En vue de certaines des applications qui suivent, il importe de voir ce que deviennent ces formules générales, lorsque le réseau des parallélépipèdes élémentaires ayant pour sommets les points de coordonnées  $(a_v, b_v, c_v)$  se compose de parallélépipèdes rectangles dont les arêtes sont parallèles aux axes. Les points de coordonnées

$$(a, b, c), \quad (a', b', c'), \quad (a'', b'', c'')$$

seront alors situés le premier sur l'axe  $Ox$  le second sur  $Oy$ , le troisième sur  $Oz$ , et l'on aura

$$b = c = 0, \quad a' = c' = 0, \quad a'' = b'' = 0;$$

nous supposerons de plus

$$a > 0, \quad b' > 0, \quad c'' > 0.$$

Dans cette hypothèse, on aura

$$a_v = ma, \quad b_v = m'b', \quad c_v = m''c'',$$

puis

$$\rho = \sqrt{a^2 m^2 + b'^2 m'^2 + c''^2 m''^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{amx + b'm'y + c''m''z}{r\rho}$$

$$R = \sqrt{(x - am)^2 + (y - b'm')^2 + (z - c''m'')^2}$$

d'où

$$(4) \quad Z\left(x, y, z \left| \begin{matrix} a, & 0, & 0 \\ 0, & b', & 0 \\ 0, & 0, & c'' \end{matrix} \right. \right) = \frac{1}{r} + \sum' \left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{\rho} - \frac{r}{\rho^2} P_1(\cos \varphi) - \frac{r^2}{\rho^3} P_2(\cos \varphi) \right]$$

$\rho$ ,  $\cos \varphi$  et  $R$  ayant les valeurs particulières ci-dessus. Cette fonction  $Z$  spéciale que nous désignerons pour abréger par

$$Z(x, y, z; a, b', c'')$$

est *paire* par rapport à chacune des variables séparément; en effet, par exemple, la série ne change pas si l'on change de signes  $x$  et  $m$ . Donc

$$Z(-x, y, z; a, b', c'') = Z(x, y, z; a, b', c'');$$

d'où l'on conclut, en différentiant par rapport à  $x$ ,

$$Z'_x(-x, y, z; a, b', c'') = -Z'_x(x, y, z; a, b', c'')$$

et, pour  $x = 0$ ,

$$Z'_x(0, y, z; a, b', c'') = -Z'_x(0, y, z; a, b', c'').$$

Cette dernière expression est donc *nulle*, *indéterminée* ou *infinie*. Comme les seuls points singuliers de

$$Z'_x(x, y, z; a, b', c'')$$

sont les points de coordonnées

$$x = ma, \quad y = m'b', \quad z = m''c'',$$

la fonction

$$Z'_x(0, y, z; a, b', c'')$$

ne peut devenir infinie ou indéterminée que pour

$$y = m'b', \quad z = m''c'';$$

pour toutes les autres combinaisons de valeurs de  $y$  et  $z$ , elle est *nulle*.

De même les deux fonctions

$$Z'_y(x, 0, z; a, b', c''), \quad Z'_z(x, y, 0; a, b', c'')$$

sont nulles, la première en tous les points du plan des  $xz$  distincts de ceux qui ont pour coordonnées

$$x = ma, \quad z = m''c'',$$

la deuxième en tous les points du plan des  $xy$  distincts de ceux qui ont pour coordonnées

$$x = ma, \quad y = m'b'.$$

En particulier les six constantes (voyez page 270)

$$B = 2Z'_y\left(\frac{a}{2}, \circ, \circ; a, b', c''\right), \quad C = 2Z'_z\left(\frac{a}{2}, \circ, \circ; a, b', c''\right)$$

$$A' = 2Z'_x(\circ, \frac{b'}{2}, \circ; a, b', c''), \quad C' = 2Z'_z(\circ, \frac{b'}{2}, \circ; a, b', c'')$$

$$A'' = 2Z'_x(\circ, \circ, \frac{c''}{2}; a, b', c''), \quad B'' = 2Z'_y(\circ, \circ, \frac{c''}{2}; a, b', c'')$$

sont *elles*; quant aux trois autres constantes, elles ont ici pour valeurs:

$$A = 2Z'_x\left(\frac{a}{2}, \circ, \circ; a, b', c''\right)$$

$$B' = 2Z'_y(\circ, \frac{b'}{2}, \circ; a, b', c'')$$

$$C'' = 2Z'_z(\circ, \circ, \frac{c''}{2}; a, b', c'').$$

Les relations (2) deviennent dans ce cas:

$$(5) \quad \begin{cases} Z(x+a, y, z) = Z(x, y, z) + Ax + E \\ Z(x, y+b', z) = Z(x, y, z) + B'y + E' \\ Z(x, y, z+c'') = Z(x, y, z) + C''z + E''; \end{cases}$$

l'on a, de plus,

$$E = \frac{1}{2}Aa, \quad E' = \frac{1}{2}B'b', \quad E'' = \frac{1}{2}C''c''.$$

La formule (3) se simplifie alors de la façon suivante: les angles  $\theta, \theta', \theta''$  sont droits, et l'on a

$$\lambda = \mu' = \nu'' = 1, \quad \mu = \nu = \lambda' = \nu' = \lambda'' = \mu'' = 0, \\ l = a, \quad l' = b', \quad l'' = c''.$$

La formule (3) devient donc

$$Ab'c'' + B'c''a + C''ab' = -4\pi.$$

Dans le cas plus particulier encore où l'on aurait

$$a = b' = c'',$$

c'est à dire dans le cas où les parallélépipèdes élémentaires seraient des cubes,<sup>1</sup> les constantes  $A, B', C''$  seraient égales et la formule précédente donnerait:

$$A = B' = C'' = -\frac{4\pi}{3a^2};$$

d'où

$$E = E' = E'' = -\frac{2\pi}{3a}.$$

4. On sait quelle est, dans un grand nombre de questions d'électricité statique, l'importance de la détermination de la *fonction de Green* pour une surface fermée donnée. Soit  $S$  une surface fermée, la fonction  $U$  de GREEN est définie par les trois propriétés caractéristiques suivantes:

1°. Elle vérifie dans l'intérieur de la surface  $S$  l'équation  $\Delta U = 0$ ;

2°. Elle a, en tous les points de la surface  $S$ , la valeur zéro;

3°. Elle est, en tous les points de l'intérieur de la surface  $S$ , finie et continue excepté en un point  $(x', y', z')$  où elle devient infinie<sup>2</sup> comme

$$\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}.$$

Suivant la terminologie employée dans mon premier mémoire, la fonction de GREEN  $U$  vérifie l'équation  $\Delta U = 0$ , s'annule sur la surface  $S$  et admet dans l'intérieur le pôle simple  $(x', y', z')$  avec le résidu + 1.

Nous nous proposons de déterminer la fonction de GREEN, lorsque la surface  $S$  est celle d'un polyèdre possédant la propriété suivante: si l'on prend les symétriques du polyèdre par rapport à chacune de ses faces, puis les symétriques des nouveaux polyèdres par rapport à chacune de leurs faces, et ainsi de suite indéfiniment, les polyèdres en nombre infini ainsi obtenus ne pénètrent pas les uns dans les autres.

<sup>1</sup> C'est ce cas particulier que j'ai envisagé dans les Comptes Rendus T. 96, p. 69; j'ai de plus supposé  $a = 1$ ; les constantes appelées dans cette note  $\lambda$  et  $\mu$  ont donc pour valeurs  $\lambda = -\frac{4\pi}{3}$ ,  $\mu = -\frac{2\pi}{3}$ .

<sup>2</sup> Voyez, par exemple, RIEMANN, *Schwere, Electricität und Magnetismus*, page 142.

Cela arrivera, par exemple, si le premier polyèdre est un parallélépipède rectangle ou un prisme droit ayant pour base un triangle équilatéral, un hexagone régulier, etc.

Pour tous ces polyèdres la fonction de GREEN s'exprime à l'aide de la fonction  $Z(x, y, z)$ ; voici de quelle façon. Ayant construit le réseau des polyèdres déduits par symétrie du polyèdre donné  $S$ , comme nous venons de le dire, on prendra dans le premier polyèdre  $S$  un point  $M'(x', y', z')$  et tous ses symétriques  $M'', M''', M^{IV}$ , etc.; la fonction de GREEN  $U$  sera une fonction ayant pour pôles simples tous les points  $M'$ ,  $M''$ ,  $M'''$ ,  $M^{IV}$  etc., le point  $M'$  et ceux qui sont les symétriques d'ordre pair de  $M'$  avec le résidu  $+1$ , les autres points avec le résidu  $-1$ . L'on pourra former cette fonction en appliquant le théorème de M. MITTAG-LEFFLER tel que nous l'avons étendu aux fonctions satisfaisant à l'équation  $\Delta U = 0$  et l'on arrivera ainsi à exprimer la fonction  $U$  à l'aide de la fonction  $Z(x, y, z)$ ; c'est ce qui résulte des recherches de BRAVAIS sur les systèmes formés par des points distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace (Journal de l'école polytechnique, 33<sup>e</sup> cahier, 1850). Cette fonction  $U$  prendra des valeurs égales et de signes contraires en deux points symétriques l'un de l'autre par rapport à une face de l'un des polyèdres du réseau.

5. Traitons d'abord le problème de RIEMANN<sup>1</sup> et cherchons la fonction de GREEN pour un parallélépipède rectangle. Prenons pour origine le centre du parallélépipède et pour axes des parallèles aux arêtes: les six faces du parallélépipède seront alors deux à deux parallèles aux plans coordonnés et auront pour équations respectives

$$x = \pm \frac{\alpha}{2}, \quad y = \pm \frac{\beta}{2}, \quad z = \pm \frac{\gamma}{2},$$

si l'on appelle  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  les dimensions du parallélépipède. D'après RIEMANN, la fonction cherchée  $U$  a pour pôles simples les points de coordonnées

$$k\alpha + (-1)^k x', \quad m\beta + (-1)^m y', \quad n\gamma + (-1)^n z'$$

avec un résidu égal à  $(-1)^{k+m+n}$ , les entiers  $k$ ,  $m$ ,  $n$  prenant tous les systèmes possibles de valeurs. En particulier elle admettra les huit pôles

<sup>1</sup> Schwer, *Electricität und Magnetismus*, page 84.

simples dont les coordonnées et les résidus sont indiqués dans le tableau suivant:

Coordonnées	Résidus
$x', \quad y', \quad z'$	+ 1
$\alpha - x', \quad y', \quad z'$	- 1
$x', \quad \beta - y', \quad z'$	- 1
$x', \quad y', \quad r - z'$	- 1
$\alpha - x', \quad \beta - y', \quad z'$	+ 1
$\alpha - x', \quad y', \quad r - z'$	+ 1
$x', \quad \beta - y', \quad r - z'$	+ 1
$\alpha - x', \quad \beta - y', \quad r - z'$	- 1.

Les coordonnées de tous les autres pôles se déduiront de celles du tableau précédent par l'addition d'un multiple de  $2\alpha$  à la coordonnée  $x$ , d'un multiple de  $2\beta$  à  $y$  et d'un multiple de  $2\gamma$  à  $z$ .

Cela posé considérons la fonction

$$Z(x, y, z; 2\alpha, 2\beta, 2\gamma)$$

formée avec les trois groupes de périodes

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} 2\alpha, & 0, & 0 \\ 0, & 2\beta, & 0 \\ 0, & 0, & 2\gamma. \end{array} \right.$$

Cette fonction a pour pôles simples de résidu + 1 les points de coordonnées

$$2p\alpha, \quad 2q\beta, \quad 2r\gamma$$

$p, q, r$  entiers. On aura alors une fonction  $U$  admettant les pôles indiqués ci-dessus avec les résidus correspondants en prenant l'expression suivante où l'on écrit  $Z(x, y, z)$  au lieu de  $Z(x, y, z; 2\alpha, 2\beta, 2\gamma)$ :

$$(7) \quad U = Z(x - x', y - y', z - z') - Z(x - \alpha + x', y - y', z - z') \\ - Z(x - x', x - \beta + y', z - z') - Z(x - x', y - y', z - \gamma + z') \\ + Z(x - \alpha + x', y - \beta + y', z - z') + Z(x - \alpha + x', y - y', z - \gamma + z') \\ + Z(x - x', y - \beta + y', z - \gamma + z') - Z(x - \alpha + x', y - \beta + y', z - \gamma + z').$$

Cette fonction  $U$  satisfait à l'équation  $\Delta U = 0$ , elle a dans l'intérieur du parallélépipède donné le seul pôle  $x', y', z'$  de résidu  $+1$ , enfin elle s'annule sur les six faces du parallélépipède; cela est évident pour les faces  $x = \frac{\alpha}{2}$ ,  $y = \frac{\beta}{2}$ ,  $z = \frac{\gamma}{2}$ , car, pour  $x = \frac{\alpha}{2}$  par exemple, les huit termes qui figurent dans l'expression de  $U$  se détruisent deux à deux en vertu de la relation

$$Z(x, y, z; a, b', c'') = Z(-x, y, z; a, b', c'');$$

quant aux faces  $x = -\frac{\alpha}{2}$ ,  $y = -\frac{\beta}{2}$ ,  $z = -\frac{\gamma}{2}$ , on vérifie que  $U$  s'annule sur ces faces en s'appuyant en outre sur les relations fondamentales (5). Ces mêmes relations montrent que la fonction  $U$  admet les trois groupes de périodes (6) c'est à dire reprend les mêmes valeurs aux points ayant pour coordonnées

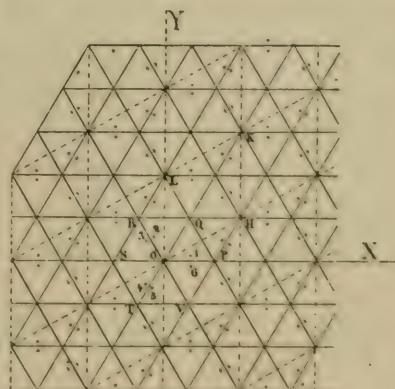
$$x + 2p\alpha, \quad y + 2q\beta, \quad z + 2r\gamma$$

$p, q, r$  étant des entiers quelconques. Cette fonction  $U$  constitue donc un exemple des fonctions à trois groupes de périodes étudiées dans un précédent mémoire (Acta Mathematica T. 4, page 360).

On peut vérifier également sur l'expression trouvée que la fonction  $U$  est symétrique par rapport aux deux points  $(x, y, z)$  et  $(x', y', z')$ .

6. Appliquons encore la méthode générale à la détermination de la fonction de GREEN pour un prisme droit dont la base est un triangle équilatéral.<sup>1</sup>

Soit (voyez la figure), dans le plan des



<sup>1</sup> Une question analogue a été traitée par M. RICCIER dans une Thèse *Sur la méthode de M. Carl Neumann* soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris le 2 avril 1886 (page 94).

coordonnées  $x$  et  $y$  un triangle équilatéral  $OPQ$  de coté  $\alpha$ ; prenons pour origine le sommet  $O$  et pour axe des  $x$  le côté  $OP$ ; nous supposerons le prisme placé de telle façon que le triangle  $OPQ$  soit la section droite équidistante des bases et nous appellerons  $h$  la hauteur du prisme, de sorte que les plans de bases auront pour équations

$$z = \pm \frac{h}{2}.$$

Considérons, dans l'intérieur du prisme, un point  $M'$  de coordonnées  $x', y', z'$  et construisons ses images successives par rapport à toutes les faces du prisme. D'abord les images successives du point  $M'$  par rapport aux bases ont pour coordonnées

$$x', y', nh + (-1)^n z'$$

où  $n$  désigne un entier quelconque; les coordonnées de tous ces points se déduisent de celles des deux points

$$x', y', z', \quad x', y', h - z'$$

par l'addition de multiples des périodes

$$0, \quad 0, \quad 2h.$$

Ensuite les images successives du point  $M'(x', y', z')$  par rapport aux faces latérales s'obtiennent comme il suit. Soit  $i$  la projection du point  $M'$  sur le plan des  $xy$ : construisons le réseau des triangles équilatéraux formés en prenant les symétriques du triangle  $OPQ$  par rapport à ses cotés, puis les symétriques des symétriques etc., et marquons par des croix les images du point  $i$ . Dans l'hexagone régulier  $PQRSTV$  nous aurons le point  $i$  et cinq de ses images, les points  $2, 3, 4, 5, 6$  dont les coordonnées sont les suivantes:

Points	Coordonnées polaires	Coordonnées rectangulaires
1	$r', \theta'$	$x', y'$
2	$r', \frac{2\pi}{3} - \theta'$	$-\frac{x'}{2} + \frac{y'\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{x'\sqrt{3}}{2} + \frac{y'}{2}$

3	$r'$ , $\frac{2\pi}{3} + \theta'$	$-\frac{x'}{2} - \frac{y'\sqrt{3}}{2}$ , $\frac{x'\sqrt{3}}{2} + \frac{y'}{2}$
4	$r'$ , $-\frac{2\pi}{3} - \theta'$	$-\frac{x'}{2} - \frac{y'\sqrt{3}}{2}$ , $-\frac{x'\sqrt{3}}{2} + \frac{y'}{2}$
5	$r'$ , $-\frac{2\pi}{3} + \theta'$	$-\frac{x'}{2} + \frac{y'\sqrt{3}}{2}$ , $-\frac{x'\sqrt{3}}{2} - \frac{y'}{2}$
6	$r'$ , $-\theta'$	$x'$ , $-y'$ .

Si l'on construit le réseau de parallélogrammes admettant pour parallélogramme élémentaire  $OHKL$ , réseau dont les sommets ont pour coordonnées

$$\frac{3ka}{2}, \quad k \frac{a\sqrt{3}}{2} + ma\sqrt{3}$$

où  $k$  et  $m$  sont des entiers quelconques, toutes les images du point 1 dans le réseau des triangles seront des points homologues des six points 1, 2, 3, 4, 5, 6 dans le réseau des parallélogrammes.

Par conséquent la fonction  $U$  qu'il s'agit de former aura pour pôles simples les douze points suivants avec les résidus  $\pm 1$  comme l'indique le tableau ci-dessous:

Coordonnées	Résidus
$x', y', z'$	+ 1
$x', y', h - z'$	- 1
$-\frac{x'}{2} + \frac{y'\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{x'\sqrt{3}}{2} + \frac{y'}{2}, \quad z'$	- 1
$-\frac{x'}{2} + \frac{y'\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{x'\sqrt{3}}{2} + \frac{y'}{2}, \quad h - z'$	+ 1
$-\frac{x'}{2} - \frac{y'\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{x'\sqrt{3}}{2} - \frac{y'}{2}, \quad z'$	+ 1
$-\frac{x'}{2} - \frac{y'\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{x'\sqrt{3}}{2} - \frac{y'}{2}, \quad h - z'$	- 1

$$\begin{aligned}
 & -\frac{x'}{2} - \frac{y'\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{x'\sqrt{3}}{2} + \frac{y'}{2}, \quad z' \quad \text{--- i} \\
 & -\frac{x'}{2} - \frac{y'\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{x'\sqrt{3}}{2} + \frac{y'}{2}, \quad h - z' \quad \text{+ i} \\
 & -\frac{x'}{2} + \frac{y'\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{x'\sqrt{3}}{2} - \frac{y'}{2}, \quad z' \quad \text{+ i} \\
 & -\frac{x'}{2} + \frac{y'\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{x'\sqrt{3}}{2} - \frac{y'}{2}, \quad h - z' \quad \text{--- i} \\
 & x', \quad -y', \quad z' \quad \text{--- i} \\
 & x', \quad -y', \quad h - z' \quad \text{+ i}; 
 \end{aligned}$$

elle aura en outre pour pôles simples avec les mêmes résidus tous les points de l'espace dont les coordonnées se déduisent des précédentes par l'adjonction de multiples des trois groupes de périodes

$$\begin{aligned}
 & \circ, \quad \circ, \quad 2h \\
 (8) \quad & \frac{3a}{2}, \quad \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad \circ \\
 & \circ, \quad a\sqrt{3}, \quad \circ.
 \end{aligned}$$

Soit alors  $Z(x, y, z)$  la fonction  $Z$  formée avec ces trois groupes de périodes, c'est à dire obtenue en faisant dans les formules générales

$$\begin{aligned}
 a &= \circ, \quad b = \circ, \quad c = 2h \\
 a' &= \frac{3a}{2}, \quad b' = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad c' = \circ \\
 a'' &= \circ, \quad b'' = a\sqrt{3}, \quad c'' = \circ.
 \end{aligned}$$

La fonction de GREEN cherchée  $U$  sera

$$\begin{aligned}
U = & Z(x - x', y - y', z - z') - Z(x - x', y - y', z - h + z') \\
& - Z\left(x + \frac{x' - y'\sqrt{3}}{2}, y - \frac{x'\sqrt{3} + y'}{2}, z - z'\right) \\
& + Z\left(x + \frac{x' - y'\sqrt{3}}{2}, y - \frac{x'\sqrt{3} + y'}{2}, z - h + z'\right) \\
& + Z\left(x + \frac{x' + y'\sqrt{3}}{2}, y - \frac{x'\sqrt{3} - y'}{2}, z - z'\right) \\
& - Z\left(x + \frac{x' + y'\sqrt{3}}{2}, y - \frac{x'\sqrt{3} - y'}{2}, z - h + z'\right) \\
& - Z\left(x + \frac{x' + y'\sqrt{3}}{2}, y + \frac{x'\sqrt{3} - y'}{2}, z - z'\right) \\
& + Z\left(x + \frac{x' + y'\sqrt{3}}{2}, y + \frac{x'\sqrt{3} - y'}{2}, z - h + z'\right) \\
& + Z\left(x + \frac{x' - y'\sqrt{3}}{2}, y + \frac{x'\sqrt{3} + y'}{2}, z - z'\right) \\
& - Z\left(x + \frac{x' - y'\sqrt{3}}{2}, y + \frac{x'\sqrt{3} + y'}{2}, z - h + z'\right). \\
& - Z(x - x', y + y', z - z') + Z(x - x', y + y', z - h + z').
\end{aligned}$$

Cette fonction  $U$  satisfait à l'équation  $\Delta U = 0$  et admet les trois groupes de périodes (8); elle a, dans le prisme donné, le seul pôle simple  $(x', y', z')$  avec le résidu  $+1$ ; enfin elle s'annule sur toutes les faces du prisme. On vérifie immédiatement cette dernière propriété pour les faces

$$z = \pm \frac{h}{2}; \quad y = 0$$

en remarquant que la fonction  $Z$  formée avec les périodes (8) est paire par rapport à  $z$  et paire par rapport à  $y$ ; en effet, les quantités désignées dans le cas général par  $a_v, b_v, c_v$  (page 267) sont actuellement

$$a_v = m' \frac{3a}{2}; \quad b_v = m' \frac{a\sqrt{3}}{2} + m'' a\sqrt{3}, \quad c_v = 2mh;$$

en changeant  $m$  de signe,  $c_v$  change de signe,  $a_v$  et  $b_v$  ne changent pas; de même, en changeant  $m''$  en  $-m' - m''$ ,  $b_v$  change de signe,  $a_v$  et  $c_v$

ne changent pas; donc, d'après la forme du terme général de la série qui définit  $Z(x, y, z)$ , on a, dans le cas actuel

$$Z(x, y, z) = Z(x, y, -z) = Z(x, -y, z).$$

D'après cela, si l'on fait, dans  $U$ ,  $z = \frac{h}{2}$  ou  $y = 0$  tous les termes de  $U$  sont deux à deux égaux et de signes contraires et  $U$  s'annule; quant à la face  $z = -\frac{h}{2}$ , on a en un point de cette face

$$U = Z\left(x - x', y - y', -\frac{h}{2} - z'\right) - Z\left(x - x', y - y', -\frac{3h}{2} + z'\right)$$

— . . . . .

Comme chaque terme tel que  $Z\left(x - x', y - y', -\frac{3h}{2} + z'\right)$  peut être remplacé par  $Z\left(x - x', y - y', \frac{3h}{2} - z'\right)$ , la seconde fonction  $Z$  de chaque ligne se déduit de la première par l'addition aux variables du groupe de périodes  $0, 0, 2h$ ; en appliquant alors les relations fondamentales (2) on trouvera facilement que la valeur de  $U$  est nulle. Enfin il resterait à vérifier que la fonction  $U$  s'annule sur les deux faces du prisme qui ont pour traces, sur le plan de la section droite  $OQ$  et  $PQ$ ; c'est ce que l'on ferait sans peine en prenant successivement ces droites pour axe des coordonnées  $x$ .

Il doit encore arriver ici, d'après un théorème général de RIEMANN, que la fonction  $U$  est symétrique par rapport aux deux points  $(x, y, z)$  et  $(x', y', z')$ .

7. Voici maintenant une seconde catégorie de questions dont la solution dépend, dans certains cas particuliers indiqués plus loin, de l'emploi de la fonction  $Z(x, y, z)$ . Soit une surface fermée  $S$ : on se propose de former une fonction  $V(x, y, z)$  vérifiant l'équation  $\Delta V = 0$ , ayant dans l'intérieur de  $S$  des pôles simples donnés

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$$

de résidus donnés

$$R_1, R_2, \dots, R_n$$

Sur quelques applications de la fonction  $Z(x, y, z)$  à la Physique mathématique. 283  
et satisfaisant en tous les points de la surface  $S$  à la condition

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0$$

$\frac{\partial V}{\partial n}$  désignant la dérivée de  $V$  prise suivant la normale à la surface  $S$ ; cette dernière condition signifie géométriquement que les surfaces de niveau

$$V = C^{\text{te}}$$

coupent à angle droit la surface  $S$ . Le problème ainsi posé n'est possible que si

$$R_1 + R_2 + \dots + R_n = 0.$$

En effet on a

$$\iint \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = -4\pi(R_1 + R_2 + \dots + R_n)$$

l'intégrale double étant étendue à la surface  $S$ : comme  $\frac{\partial V}{\partial n}$  est nul sur la surface  $S$ , la somme  $R_1 + R_2 + \dots + R_n$  doit être nulle. Supposons cette condition remplie et admettons qu'il y ait une fonction  $V$  remplissant les conditions du problème: cette fonction sera unique à une constante additive près.<sup>1</sup> En effet imaginons une seconde fonction  $V'$  remplissant les mêmes conditions, la différence

$$U = V - V'$$

sera finie et continue à l'intérieur de  $S$ , vérifiera l'équation  $\Delta U = 0$  et satisfera en tous les points de  $S$  à l'équation

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0.$$

Alors, d'après la relation de GREEN

$$\iiint \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz$$

$$= - \iiint U \Delta U dx dy dz + \iint U \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma$$

<sup>1</sup> Voyez RIEMANN, *Schwere, Electricität und Magnetismus*, page 279.

dans laquelle les intégrales triples sont étendues au volume limité par la surface  $S$  et l'intégrale double à la surface  $S$ , on a, puisque

$$\Delta U = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial n} = 0$$

$$\iiint \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz = 0$$

d'où

$$U = C^{\text{te.}}$$

La différence  $V - V'$  est donc constante et la fonction  $V'$  ne diffère de  $V$  que par une constante additive.

La détermination de la fonction  $V$  qui possède à l'intérieur de  $S$  les  $n$  pôles simples

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$$

avec les résidus

$$R_1, R_2, \dots, R_n$$

dont la somme est nulle, et qui satisfait aux autres conditions indiquées précédemment, peut être ramenée à la détermination de  $n-1$  fonctions n'ayant chacune que deux pôles simples dans l'intérieur de  $S$  et satisfaisant aux mêmes conditions que  $V$ . En effet, appelons  $V_k$ , ( $k=1, 2, \dots, n-1$ ), une fonction qui possède dans l'intérieur de  $S$  les deux pôles simples

$$(x_k, y_k, z_k), (x_n, y_n, z_n)$$

avec les résidus  $+1$  et  $-1$ , qui vérifie à l'intérieur de  $S$  l'équation  $\Delta V_k = 0$  et sur la surface  $S$  l'équation  $\frac{\partial V_k}{\partial n} = 0$ ; la fonction  $V$  sera

$$R_1 V_1 + R_2 V_2 + \dots + R_{n-1} V_{n-1}.$$

Ainsi l'on peut ramener le cas général au cas où il y a seulement deux pôles simples à l'intérieur de  $S$ . Ce dernier cas se présente dans la question de physique suivante:

La surface  $S$  étant remplie d'un liquide conducteur, plaçons en deux points

$$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$$

de ce liquide les deux électrodes d'une pile supposées avoir la forme de sphères de rayon très-petit par rapport aux dimensions de  $S$ . Un régime permanent s'établit et le liquide devient le siège d'un courant constant. Appelons  $V(x, y, z)$  le potentiel en un point  $(x, y, z)$  du liquide: cette fonction  $V$  satisfait dans l'intérieur du liquide à l'équation  $\Delta V = 0$ , elle admet les centres des deux électrodes  $M_1$  et  $M_2$  comme pôles simples de résidus  $V_0$  et  $-V_0$ , enfin elle vérifie sur la surface  $S$  l'équation  $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$ .

L'on pourra exprimer cette fonction  $V$  à l'aide de la fonction  $Z(x, y, z)$  toutes les fois que la surface  $S$  sera la surface d'un polyèdre satisfaisant à la condition suivante: si l'on construit les symétriques de ce polyèdre par rapport à chacune de ses faces, puis les symétriques des polyèdres symétriques par rapport à chacune de leurs faces, et ainsi de suite indéfiniment, l'on obtient un réseau de polyèdres ne pénétrant pas les uns dans les autres. Alors, en appliquant le principe des images, on considérera les deux points  $M_1$  et  $M_2$  comme des points lumineux et les faces du polyèdre comme des miroirs, et l'on construira les images des points  $M_1$  et  $M_2$ ; puis l'on formera une fonction  $F_1(x, y, z)$  vérifiant l'équation  $\Delta F_1 = 0$ , admettant comme pôles simples avec le résidu + 1 le point  $M_1$  et ses images, une fonction  $F_2(x, y, z)$  vérifiant l'équation  $\Delta F_2 = 0$ , admettant comme pôles simples avec le résidu + 1 le point  $M_2$  et ses images; le produit

$$V_0[F_1(x, y, z) - F_2(x, y, z)]$$

augmenté d'une fonction entière convenable sera le potentiel cherché. La formation des fonctions  $F_1$  et  $F_2$  résulte de l'extension du théorème de M. MITTAG-LEFFLER aux fonctions vérifiant l'équation  $\Delta F = 0$ , extension que j'ai indiquée dans mon premier mémoire (Acta Mathematica T. 4).

8. Appliquons cette méthode au cas particulier où le polyèdre  $S$

est un parallélépipède rectangle de dimensions  $\alpha, \beta, \gamma$  dont les faces ont pour équations

$$x = \pm \frac{\alpha}{2}, \quad y = \pm \frac{\beta}{2}, \quad z = \pm \frac{\gamma}{2}.$$

Les images du point  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  par rapport aux faces ont pour coordonnées

$$k\alpha + (-1)^k x_1, \quad m\beta + (-1)^m y_1, \quad n\gamma + (-1)^n z_1$$

$k, m, n$  étant des entiers quelconques. Si, parmi ces images, nous considérons les huit points ayant pour coordonnées

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (\alpha - x_1, y_1, z_1), \quad (x_1, \beta - y_1, z_1), \\ (x_1, y_1, \gamma - z_1), \quad (\alpha - x_1, \beta - y_1, z_1), \quad (\alpha - x_1, y_1, \gamma - z_1), \\ (x_1, \beta - y_1, \gamma - z_1), \quad (\alpha - x_1, \beta - y_1, \gamma - z_1),$$

les coordonnées de toutes les autres images se déduiront de celles des huit points ci-dessus par l'addition d'un multiple de  $2\alpha$  à  $x$ , d'un multiple de  $2\beta$  à  $y$  et d'un multiple de  $2\gamma$  à  $z$ . Cela posé, prenons la fonction

$$Z(x, y, z; 2\alpha, 2\beta, 2\gamma)$$

formée avec les groupes de périodes

$$(9) \quad \begin{aligned} a &= 2\alpha, & b &= 0, & c &= 0 \\ a' &= 0, & b' &= 2\beta, & c' &= 0 \\ a'' &= 0, & b'' &= 0, & c'' &= 2\gamma. \end{aligned}$$

Une fonction  $F_1(x, y, z)$  ayant pour pôles simples le point  $M_1$  et ses images, avec le résidu  $+1$ , sera

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= Z(x - x_1, y - y_1, z - z_1; 2\alpha, 2\beta, 2\gamma) \\ &+ Z(x - \alpha + x_1, y - y_1, z - z_1) + Z(x - x_1, y - \beta + y_1, z - z_1) \\ &+ Z(x - x_1, y - y_1, z - \gamma + z_1) + Z(x - \alpha + x_1, y - \beta + y_1, z - z_1) \\ &+ Z(x - \alpha + x_1, y - y_1, z - \gamma + z_1) + Z(x - x_1, y - \beta + y_1, z - \gamma + z_1) \\ &+ Z(x - \alpha + x_1, y - \beta + y_1, z - z_1). \end{aligned}$$

De même la fonction  $F_2(x, y, z)$  déduite de la précédente par le changement de l'indice 1 en l'indice 2

$$\begin{aligned} F_2(x, y, z) &= Z(x - x_2, y - y_2, z - z_2) + Z(x - a + x_2, y - y_2, z - z_2) \\ &\quad + \text{etc.} \end{aligned}$$

a pour pôles de résidus + 1 le point  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  et toutes ses images. La fonction

$$(10) \quad V(x, y, z) = V_0[F_1(x, y, z) - F_2(x, y, z)]$$

ne différera du potentiel cherché que par une fonction entière. Mais il est aisément de voir que *cette fonction est précisément le potentiel cherché*, en vérifiant qu'elle remplit toutes les conditions imposées au potentiel. Il suffit pour cela de vérifier que la dérivée

$$\frac{\partial V}{\partial n}$$

est nulle sur toutes les faces du parallélépipède donné. Sur la face  $x = \frac{a}{2}$ , la dérivée  $\frac{\partial V}{\partial n}$  est égale à  $\frac{\partial V}{\partial x}$ , car la normale à cette face est parallèle à l'axe des coordonnées  $x$ : or

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = Z'_x(x - x_1, y - y_1, z - z_1) + Z'_x(x - a + x_1, y - y_1, z - z_1) + \dots;$$

et pour  $x = \frac{a}{2}$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = Z'_x\left(\frac{a}{2} - x_1, y - y_1, z - z_1\right) + Z'_x\left(-\frac{a}{2} + x_1, y - y_1, z - z_1\right) + \dots;$$

on a vu (page 272) que la fonction

$$Z'_x(x, y, z; a, b', c'')$$

est *impaire* par rapport à  $x$ : donc

$$Z'_x\left(\frac{a}{2} - x_1, y - y_1, z - z_1\right) + Z'_x\left(-\frac{a}{2} + x_1, y - y_1, z - z_1\right) = 0;$$

les autres termes de  $\frac{\partial F_1}{\partial x}$  se détruisent de même deux à deux pour  $x = \frac{a}{2}$ ; donc enfin  $\frac{\partial F_1}{\partial x}$  s'annule pour  $x = \frac{a}{2}$ . Comme il en est de même de  $\frac{\partial F_2}{\partial x}$ , on voit que  $\frac{\partial V}{\partial x}$  s'annule pour  $x = \frac{a}{2}$ . Faisons maintenant dans  $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ ,  $x = -\frac{a}{2}$ ; nous aurons

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = Z'_x\left(-\frac{a}{2} - x_1, y - y_1, z - z_1\right) + Z'_x\left(-\frac{3a}{2} + x_1, y - y_1, z - z_1\right) + \dots$$

$$= Z'_x\left(-\frac{a}{2} - x_1, y - y_1, z - z_1\right) - Z'_x\left(\frac{3a}{2} - x_1, y - y_1, z - z_1\right) + \dots$$

Mais, on a, d'après les relations fondamentales (5) dans lesquelles  $a = 2\alpha$ ,  $b = 2\beta$ ,  $c'' = 2\gamma$

$$Z'_x(x + 2\alpha, y, z) = Z'_x(x, y, z) + A;$$

donc la différence

$$Z'_x\left(\frac{3a}{2} - x_1, y - y_1, z - z_1\right) - Z'_x\left(-\frac{a}{2} - x_1, y - y_1, z - z_1\right)$$

est égale à  $A$ , et l'on a, pour  $x = -\frac{a}{2}$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = -4A;$$

comme dans les mêmes conditions  $\frac{\partial F_2}{\partial x}$  se réduit également à  $-4A$ , la fonction

$$\frac{\partial V}{\partial x} = V_0 \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial F_2}{\partial x} \right)$$

s'annule pour  $x = -\frac{a}{2}$ . On vérifierait de même que  $\frac{\partial V}{\partial y}$  s'annule sur les faces

$$y = \pm \frac{\beta}{2}$$

et  $\frac{\partial V}{\partial z}$  sur les faces  $z = \pm \frac{\gamma}{2}$ . Donc la fonction  $V$  est bien le potentiel cherché. Cette fonction admet les trois groupes de périodes (9); en effet on déduit immédiatement des relations fondamentales (5) que l'on a

$$V(x + 2\alpha, y, z) = V(x, y + 2\beta, z) = V(x, y, z + 2\gamma) = V(x, y, z).$$

9. Les expressions des fonctions  $F_1$  et  $F_2$  établies dans le numéro précédent se simplifient quand l'un des points  $M_1$  ou  $M_2$  se trouve dans un des plans coordonnés; cette simplification se rattache aux formules de la division par 2 d'un groupe de périodes de la fonction  $Z(x, y, z)$ .

Supposons, par exemple, que les deux points  $M_1$  et  $M_2$  soient dans le plan  $xOy$ , c'est à dire  $z_1 = z_2 = 0$ . Alors les images du point  $M_1$  ont pour coordonnées

$$k\alpha + (-1)^k x_1, \quad m\beta + (-1)^m y_1, \quad n\gamma$$

$k, m, n$  étant des entiers quelconques. Si, parmi ces images, nous considérons les quatre points ayant pour coordonnées

$$(x_1, y_1, 0), \quad (\alpha - x_1, y_1, 0), \quad (x_1, \beta - y_1, 0), \quad (\alpha - x_1, \beta - y_1, 0),$$

les coordonnées de toutes les autres images se déduiront de celles des quatre points ci-dessus par l'addition d'un multiple de  $2\alpha$  à  $x$ , d'un multiple de  $2\beta$  à  $y$  et d'un multiple de  $\gamma$  à  $z$ ; il en sera de même des images du point  $M_2$ . Prenons la fonction

$$Z(x, y, z; 2\alpha, 2\beta, \gamma)$$

formée avec les groupes de périodes

$$(11) \quad \begin{aligned} a &= 2\alpha, & b &= 0, & c &= 0, \\ a' &= 0, & b' &= 2\beta, & c' &= 0, \\ a'' &= 0, & b'' &= 0, & c'' &= \gamma, \end{aligned}$$

et désignons cette fonction par  $Z_1(x, y, z)$  pour la distinguer de la fonction  $Z(x, y, z; 2\alpha, 2\beta, 2\gamma)$  employée dans le numéro précédent. Cette fonction  $Z_1$  vérifie les relations fondamentales suivantes:

$$(12) \quad \begin{aligned} Z_1(x + 2\alpha, y, z) - Z_1(x, y, z) &= A_1 x + E_1 \\ Z_1(x, y + 2\beta, z) - Z_1(x, y, z) &= B'_1 y + E'_1 \\ Z_1(x, y, z + \gamma) - Z_1(x, y, z) &= C''_1 z + E''_1 \end{aligned}$$

les constantes  $A_1, B'_1, C''_1, E_1, E'_1, E''_1$  ayant les valeurs définies dans les n°s 1 et 2. L'on aura alors, pour le potentiel cherché  $V$

$$(13) \quad \begin{aligned} \frac{V}{V_0} = Z_1(x - x_1, y - y_1, z) + Z_1(x - \alpha + x_1, y - y_1, z) \\ + Z_1(x - x_1, y - \beta + y_1, z) + Z_1(x - \alpha + x_1, y - \beta + y_1, z) \\ - Z_1(x - x_2, y - y_2, z) - Z_1(x - \alpha + x_2, y - y_2, z) \\ - Z_1(x - x_2, y - \beta + y_2, z) - Z_1(x - \alpha + x_2, y - \beta + y_2, z). \end{aligned}$$

En effet, comme la fonction  $Z_1(x, y, z)$  admet pour pôles simples de résidus  $\pm i$  les points de coordonnées

$$2k\alpha, \quad 2m\beta, \quad n\gamma,$$

la fonction précédente  $V(x, y, z)$  admet bien comme pôles de résidus  $\pm V_0$  le point  $M_1$  et ses images, comme pôles de résidus  $-V_0$  le point  $M_2$  et ses images. Elle vérifie de plus les équations

$$(14) \quad \begin{aligned} V(x, y, z) &= V(\alpha - x, y, z) = V(x, \beta - y, z) = V(x, y, \gamma - z) \\ &= V(-\alpha - x, y, z) = V(x, -\beta - y, z) = V(x, y, -\gamma - z) \end{aligned}$$

comme on le vérifie en s'appuyant sur ce que la fonction  $Z_1$  est paire en  $x, y, z$  et en se servant des relations fondamentales (12). Ces équations (14) montrent que  $\frac{\partial V}{\partial x}$  s'annule pour  $x = \pm \frac{\alpha}{2}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial y}$  pour  $y = \pm \frac{\beta}{2}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial z}$  pour  $z = \pm \frac{\gamma}{2}$ . La fonction  $V$  possède donc les propriétés caractéristiques du potentiel cherché. Les relations (14) permettent de montrer qu'elle admet en outre les trois groupes de périodes (11).

La formule (13) se simplifie encore davantage si les points  $M_1$  et  $M_2$  sont sur un axe coordonné, par exemple sur  $Ox$ : alors

$$z_1 = y_1 = z_2 = y_2 = 0.$$

Les images du point  $M_1$  ont pour coordonnées

$$k\alpha + (-1)^k x_1, \quad m\beta, \quad n\gamma,$$

celles du point  $M_2$

$$k\beta + (-1)^k x_2, \quad m\beta, \quad n\gamma;$$

soit

$$Z(x, y, z; 2\alpha, \beta, \gamma) = Z_2(x, y, z)$$

la fonction  $Z$  formée avec les périodes

$$2\alpha, \quad 0, \quad 0$$

$$0, \quad \beta, \quad 0$$

$$0, \quad 0, \quad \gamma.$$

On aura

$$\begin{aligned} \frac{V}{V_0} &= Z_2(x - x_1, y, z) + Z_2(x - \alpha + x_1, y, z) - Z_2(x - x_2, y, z) \\ &\quad - Z_2(x - \alpha + x_2, y, z), \end{aligned}$$

comme on le vérifie facilement.

Enfin si les points  $M_1$  et  $M_2$  sont au centre de deux faces opposées du parallélépipède c'est à dire si l'on a, par exemple,

$$x_1 = -\frac{\alpha}{2}, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{\alpha}{2}, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = 0,$$

il vient

$$\begin{aligned} \frac{V}{V_0} &= Z_2\left(x + \frac{\alpha}{2}, y, z\right) + Z_2\left(x - \frac{3\alpha}{2}, y, z\right) - Z_2\left(x - \frac{\alpha}{2}, y, z\right) \\ &\quad - Z_2\left(x - \frac{\alpha}{2}, y, z\right), \end{aligned}$$

ou d'après la relation

$$Z_2(x + 2\alpha, y, z) = Z_2(x, y, z) + A_2 x + E_2$$

dans laquelle on remplace  $x$  par  $x - \frac{3\alpha}{2}$ , et  $E_2$  par sa valeur  $A_2\alpha$

$$(15) \quad \frac{V}{V_0} = 2Z_2\left(x + \frac{\alpha}{2}, y, z\right) - 2Z_2\left(x - \frac{\alpha}{2}, y, z\right) - A_2x + A_2\frac{\alpha}{2}.$$

Si, dans cette formule, on suppose

$$2\alpha = \beta = \gamma = 1,$$

on retrouve l'expression que nous avons donnée dans les Comptes Rendus, séance du 28 janvier 1884;  $A_2$  est alors égal à  $-\frac{4\pi}{3}$  et  $E_2$  à  $-\frac{2\pi}{3}$  (page 274). Comme les pôles se sont superposés deux à deux, il faut pour avoir le potentiel, supprimer le facteur 2 dans le second membre de l'équation (15).

10. L'on pourrait résoudre la même question dans le cas où le polyèdre  $S$  serait un prisme droit ayant pour base un triangle équilatéral, un hexagone régulier, etc. La solution étant entièrement semblable à celle du problème précédent, je ne m'y arrêterai pas, et je terminerai ce travail en présentant quelques observations sur un mode d'extension des résultats que l'on vient d'obtenir.

Étant donnée une sphère de rayon  $a$  et de centre  $C$ , nous dirons que deux points  $M$  et  $M'$  sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la sphère quand ils sont en ligne droite avec le centre et conjugués harmoniques l'un de l'autre par rapport aux deux extrémités du diamètre  $MM'C$ ; ces deux points sont inverses l'un de l'autre par rapport à la sphère

$$\overline{CM} \cdot \overline{CM'} = a^2;$$

l'on dit aussi que l'un d'eux est l'image de l'autre par rapport à la sphère.

Considérons un volume fini ou indéfini limité par des portions de surfaces sphériques ou planes: ce volume sera appelé polyèdre fondamental. Construisons les symétriques du polyèdre fondamental par rapport à chacune de ses faces, puis les symétriques des nouveaux polyèdres par rapport à chacune de leurs faces et ainsi de suite indéfiniment. Alors deux cas se présenteront: ou bien l'ensemble des polyèdres ainsi construits occupera une portion de l'espace sans que les volumes des polyèdres aient

Sur quelques applications de la fonction  $Z(x, y, z)$  à la Physique mathématique. 293

des points communs; ou bien ces polyèdres pénétreront les uns dans les autres.

Nous n'envisagerons que le premier cas et nous dirons dans ce cas que le polyèdre fondamental donne naissance à un groupe discontinu de transformation. Un exemple d'un pareil groupe a été donné par M. PICARD dans le Bulletin de la société mathématique de France T. XII, page 43; ces groupes ont aussi été considérés par M. POINCARÉ dans son *mémoire sur les groupes kleinéens* (Acta Mathematica T. 3, page 66).

Cela posé, on peut se proposer de former une fonction  $F(x, y, z)$  vérifiant l'équation  $\Delta F = 0$  partout où elle existe et possédant les propriétés suivantes. Convenons d'écrire, pour simplifier,  $F(M)$  au lieu de  $F(x, y, z)$ ,  $M$  désignant le point de l'espace dont les coordonnées sont  $x, y, z$ . Soit  $M$  un point du polyèdre fondamental,  $M'$  son image par rapport à une face de ce polyèdre appartenant à une sphère de rayon  $a'$ : appelons  $r'$  la distance du point  $M$  au centre de cette sphère. Alors la valeur de la fonction  $F$  au point  $M'$  sera donnée par

$$F(M') = \frac{r'}{a'} F(M);$$

de sorte que du moment que la fonction  $F$  est connue dans le polyèdre fondamental, elle est connue dans le polyèdre symétrique par rapport à la face considérée. Appelons de même  $M''$  l'image du point  $M$  par rapport à une seconde face du polyèdre fondamental appartenant à une sphère de rayon  $a''$  et  $r''$  la distance du point  $M$  au centre de cette sphère, on aura

$$F(M'') = \frac{r''}{a''} F(M),$$

et ainsi de suite pour toutes les faces. L'on prolongera par le même procédé la fonction  $F$  dans tout l'espace occupé par le groupe des polyèdres considérés. Si dans l'intérieur du polyèdre fondamental la fonction  $F$  vérifie l'équation

$$\Delta F = 0$$

elle la vérifiera dans tous les autres polyèdres en vertu du théorème de THOMSON (Journal de LIOUVILLE, T. 12, p. 256—264).

L'on pourrait aussi remplacer les équations précédentes par les suivantes:

$$F(M') = -\frac{r'}{a'} F(M)$$

$$F(M'') = -\frac{r''}{a''} F(M)$$

.....

en changeant le signe après chaque inversion. La fonction  $F$  ainsi déterminée s'annulerait sur la surface du polyèdre fondamental.

Un exemple de l'expression d'une pareille fonction et même d'une fonction plus générale se trouve dans les leçons de RIEMANN »*Schwere, Electricität und Magnetismus*, bearbeitet von HATTENDORF», page 191. Je me propose, dans un autre travail, de donner l'expression analytique d'une telle fonction et d'en faire des applications semblables à celles qui ont été données plus haut pour la fonction  $Z(x, y, z)$ .

Paris, 23 mars 1886.

SUR LES INTÉGRALES IRRÉGULIÈRES  
DES ÉQUATIONS LINÉAIRES

PAR

H. POINCARÉ

À PARIS.

**§ 1. Séries asymptotiques.**

Tous les géomètres connaissent les curieuses propriétés de la série de STIRLING. Cette série:

$$\log \Gamma(x + 1)$$

$$= \frac{1}{2} \log(2\pi) + \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x - x + \frac{B_1}{1 \cdot 2} \frac{1}{x} - \frac{B_2}{3 \cdot 4} \frac{1}{x^2} + \frac{B_3}{5 \cdot 6} \frac{1}{x^3} - \dots$$

est toujours divergente. Cependant on peut en faire légitimement usage pour les valeurs très grandes de  $x$ . En effet les termes après avoir décrû avec une très grande rapidité, croissent ensuite au delà de toute limite. Mais si l'on s'arrête au plus petit terme, l'erreur commise sur la valeur de  $\log \Gamma(x + 1)$  est très petite.

En d'autres termes, là série de STIRLING représente asymptotiquement la fonction  $\log \Gamma(x + 1)$ ; c'est à dire que si  $S_n$  est la somme des premiers termes de cette série jusques et y compris le terme:

$$\pm \frac{B_n}{2n(2n-1)} \frac{1}{x^n},$$

l'expression

$$x^{n+1} [\log \Gamma(x + 1) - S_n]$$

tendra vers 0 quand  $x$  croîtra indéfiniment.

Il existe évidemment une infinité de séries dont les termes après avoir décrû très rapidement croissent au delà de toute limite. Si par exemple:

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$$

sont une série de nombres tous plus petits que 1, mais ne tendant pas vers 0, la série:

$$\frac{A_1}{x} \cdot 1 + \frac{A_2}{x^2} \cdot 1 \cdot 2 + \dots + \frac{A_n}{x^n} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n + \dots$$

sera divergente et on y trouvera des termes aussi grands qu'on voudra. Mais cependant, si  $x$  est très grand, les premiers termes décroissent très rapidement. Ainsi, si  $x = n$  et que  $n$  soit très grand, le  $n^{\text{e}}$  terme:

$$\frac{A_n}{n^n} 1 \cdot 2 \cdots n < 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) < ne^{-n}$$

est extrêmement petit.

Je dirai qu'une série divergente

$$(1) \quad A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \dots + \frac{A_n}{x^n} + \dots$$

où la somme des  $n+1$  premiers termes est  $S_n$ , représente asymptotiquement une fonction  $J(x)$  si l'expression

$$x^n(J - S_n)$$

tend vers 0 quand  $x$  croît indéfiniment. En effet si  $x$  est suffisamment grand, on aura

$$x^n(J - S_n) < \varepsilon$$

$\varepsilon$  étant très petit; l'erreur

$$J - S_n = \frac{\varepsilon}{x^n}$$

commise sur la fonction  $J$  en prenant les  $n+1$  premiers termes de la série est alors extrêmement petite. De plus, elle est beaucoup plus petite que l'erreur commise en prenant seulement  $n$  termes, et qui est égale à:

$$J - S_{n-1} = \frac{A_n + \varepsilon}{x^n}$$

$\varepsilon$  étant très petit et  $A_n$  fini.

Il résulte donc de là que la série (1) se comportera tout à fait comme la série de STIRLING; que, si  $x$  est très grand, ses termes décroîtront d'abord rapidement pour croître ensuite au delà de toute limite et que, malgré sa divergence, il sera légitime de s'en servir dans le calcul de  $J$ . Je dirai aussi quelquefois pour abréger que la série (1) est une série asymptotique.

On peut multiplier l'une par l'autre deux séries asymptotiques d'après les mêmes règles que les séries ordinaires. Soit en effet asymptotiquement

$$(2) \quad \begin{aligned} J(x) &= A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \dots + \frac{A_n}{x^n} + \dots \\ J'(x) &= A'_0 + \frac{A'_1}{x} + \frac{A'_2}{x^2} + \dots + \frac{A'_n}{x^n} + \dots \end{aligned}$$

en définissant  $S_n$  et  $S'_n$  comme plus haut:

$$\begin{aligned} S_n &= A_0 + \frac{A_1}{x} + \dots + \frac{A_n}{x^n} \\ S'_n &= A'_0 + \frac{A'_1}{x} + \dots + \frac{A'_n}{x^n}. \end{aligned}$$

Les deux équations (2) signifient que

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^n (J - S_n) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^n (J' - S'_n) = 0.$$

Faisons le produit de nos deux séries d'après la même règle que si elles étaient convergentes; soit

$$\Sigma = B_0 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \dots + \frac{B_n}{x^n} + \dots$$

et  $\Sigma_n$  la somme de ses  $n$  premiers termes.

Comme  $S_n$ ,  $S'_n$  et  $\Sigma_n$  sont simplement des polynômes en  $\frac{1}{x}$ , on aura évidemment:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n (S_n S'_n - \Sigma_n) = 0.$$

On a de plus:

$$\lim \frac{J}{S_n} = \lim \frac{J'}{S'_n} = 1, \quad \lim \frac{J}{A_0} = \lim \frac{J'}{A'_0} = 1.$$

C'est une conséquence immédiate des équations (3).

Il vient alors:

$$J = S_n + \frac{\varepsilon}{x^n}, \quad J' = S'_n + \frac{\varepsilon'}{x^n}$$

$$\lim \varepsilon = \lim \varepsilon' = 0$$

d'où:

$$JJ' = S_n S'_n + \frac{S'_n \varepsilon + S_n \varepsilon' + \frac{\varepsilon \varepsilon'}{x^n}}{x^n};$$

$S'_n$  tend vers  $A'_0$  et  $\varepsilon$  vers 0; donc  $S'_n \varepsilon$  tend vers 0. De même  $S_n \varepsilon'$  et  $\frac{\varepsilon \varepsilon'}{x^n}$  tendent vers 0. Donc:

$$\lim x^n (JJ' - S_n S'_n) = 0$$

et par conséquent

$$\lim x^n (JJ' - \Sigma_n) = 0$$

ce qui veut dire que l'on a asymptotiquement

$$JJ' = B_0 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \dots$$

C. Q. F. D.

En particulier, il est permis d'élever une série asymptotique au carré ou à une puissance quelconque. Soit maintenant;

$$(4) \quad F(z) = B_0 + B_1 z + \dots + B_n z^n + \dots$$

une fonction holomorphe de  $z$  dans le voisinage de  $z = 0$ ; la série du second membre sera cette fois convergente. Soit

$$S = A_0 + \frac{A_1}{x} + \dots$$

une série divergente représentant asymptotiquement une fonction  $J$ . Si l'on élève la série  $S - A_0$  à la puissance  $n$  d'après la même règle que si elle était convergente, on obtiendra une série  $(S - A_0)^n$  ordonnée suivant les puissances croissantes de  $\frac{1}{x}$  et représentant asymptotiquement  $(J - A_0)^n$ .

Formons ensuite la série divergente:

$$B_0 + B_1(S - A_0) + \dots + B_n(S - A_0)^n + \dots$$

et ordonnons-la suivant les puissances croissantes de  $\frac{1}{x}$ . Nous obtiendrons une série divergente:

$$\Sigma = C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \dots + \frac{C_n}{x^n} + \dots$$

dont la somme des  $n+1$  premiers termes sera  $\Sigma'_n$ . Je dis qu'elle représentera asymptotiquement la fonction  $F(J - A_0)$ .

En effet  $\Sigma'_n$  et

$$\Sigma'_n = B_0 + B_1(S_n - A_0) + B_2(S_n - A_0)^2 + \dots + B_n(S_n - A_0)^n$$

sont deux polynômes entiers en  $\frac{1}{x}$  dont les termes de degré inférieur à  $n+1$  ne diffèrent pas. On aura donc:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n (\Sigma_n - \Sigma'_n) = 0.$$

Je dis maintenant que

$$\lim x^n [F(J - A_0) - \Sigma'_n] = 0.$$

En effet on aura évidemment:

$$\lim x^n [B_k(J - A_0)^k - B_k(S_n - A_0)^k] = 0$$

puisque  $(S - A_0)^k$  représente asymptotiquement  $(J - A_0)^k$ . Posons:

$$T_n = B_0 + B_1(J - A_0) + \dots + B_n(J - A_0)^n$$

il viendra:

$$\lim x^n (T_n - \Sigma'_n) = 0.$$

Il reste à démontrer que

$$\lim x^n (F - T_n) = 0.$$

Or il vient

$$F - T_n = B_{n+1}(J - A_0)^{n+1} + B_{n+2}(J - A_0)^{n+2} + \dots$$

ou puisque la série (4) est convergente:

$$|F - T_n| < M |J - A_0|^{n+1} < M |x(J - A_0)|^{n+1} \frac{1}{x^{n+1}}$$

$M$  étant une constante positive assignable. Or on a:

$$\lim x(J - A_0) = A_1, \quad \lim x^n \frac{1}{x^{n+1}} = 0$$

d'où:

$$\lim x^n |F - T_n| = 0.$$

C. Q. F. D.

Ainsi il est permis de substituer une série asymptotique dans le développement d'une fonction holomorphe comme s'il s'agissait d'une série convergente.

Soit par exemple:

$$S = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \dots$$

une série représentant asymptotiquement une fonction  $J$ . Elevons-la au carré, au cube, etc. et appelons  $S^2, S^3, \dots$ , les séries divergentes ainsi obtenues.

\* Formons la série

$$1 + S + S^2 + S^3 + \dots + S^n + \dots$$

et ordonnons-la suivant les puissances croissantes de  $\frac{1}{x}$ . Nous obtiendrons ainsi une série  $\Sigma$  qui représentera asymptotiquement la fonction

$$\frac{1}{1 - J}.$$

Cela montre que l'on peut diviser l'une par l'autre deux séries asymptotiques pourvu que le premier terme  $A_0$  de la série diviseur ne soit pas nul.

En effet si l'on a par exemple:

$$S = A_0 + \frac{A_1}{x} + \dots = J$$

$$S' = A'_0 + \frac{A'_1}{x} + \dots = J'$$

la série  $\frac{J'}{J}$  sera représentée asymptotiquement par la série divergente:

$$\frac{S'}{A_0} + \frac{S''}{A_0^2}(A_0 - S) + \frac{S'''}{A_0^3}(A_0 - S)^2 + \dots$$

qui est facile à former.

Il est permis d'intégrer une série asymptotique. Ainsi si l'on a asymptotiquement

$$J = \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \dots + \frac{A_n}{x^n} + \dots = S$$

je dis qu'on aura asymptotiquement

$$\int_x^{\infty} J dx = \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{2x^2} + \dots + \frac{A_n}{(n-1)x^{n-1}} + \dots = S'.$$

En effet la première équation signifie que l'on peut prendre  $x$  assez grand pour que:

$$|J - S_n| < \frac{\varepsilon}{x^n} \text{ quelque petit que soit } \varepsilon.$$

On en déduit:

$$\left| \int_x^{\infty} J dx - \int_x^{\infty} S_n dx \right| < \frac{\varepsilon}{(n-1)x^{n-1}}$$

ce qui veut dire que  $S'$  représente asymptotiquement  $\int J dx$ .

C. Q. F. D.

Il ne serait pas permis au contraire de différentier une série asymptotique.

Nous dirons aussi quelquefois, si  $F$ ,  $\phi$  et  $J$  sont trois fonctions de  $x$ , que  $J$  est représenté asymptotiquement par la série:

$$\phi + FA_0 + \frac{FA_1}{x} + \frac{FA_2}{x^2} + \dots$$

quand la série:

$$A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \dots$$

représentera asymptotiquement la fonction  $\frac{J - \phi}{F}$ .

Il résulte, par exemple, de l'analyse qui précède que si l'on pose

$$I' = e^{-x} x^x \sqrt{2\pi x}$$

on aura asymptotiquement

$$\Gamma(x+1) = F + \frac{C_1 F}{x} + \frac{C_2 F}{x^2} + \dots$$

les  $C$  étant des coëfficients faciles à calculer; les premiers ont pour valeur

$$C_1 = \frac{B_1}{1 \cdot 2}, \quad C_2 = -\frac{B_2}{3 \cdot 4} + \frac{B_1^2}{8}, \quad \text{etc.}$$

Nous avons dit jusqu'ici que  $x$  croissait indéfiniment, sans dire de quelle manière; mais il a été sous-entendu que cette variable croissait par valeurs réelles positives. Il est toutefois évident que la théorie n'est pas changée quand on suppose que  $x$  tend vers l'infini avec un argument déterminé différent de 0.

Voici maintenant une remarque très importante pour ce qui va suivre:

Une série divergente ne peut pas représenter une même fonction  $J$  quel que soit l'argument avec lequel  $x$  tend vers l'infini.

Je dis en effet que:

$$x^2 \left( J - A_0 - \frac{A_1}{x} - \frac{A_2}{x^2} \right)$$

ne peut pas tendre vers 0 pour tous les arguments de  $x$  (ou du moins ne peut pas tendre uniformément vers 0), sans quoi  $J$  serait une fonction holomorphe de  $\frac{1}{x}$  et la série serait convergente.

On peut se demander si, pour un même argument de  $x$ , une même série peut représenter asymptotiquement plusieurs fonctions différentes. La réponse doit être affirmative.

Il suffit pour s'en assurer, de vérifier qu'il y a des fonctions  $J$  qui sont représentées asymptotiquement par une série dont tous les termes sont nuls, c'est à dire des fonctions telles que:

$$\lim J x^n = 0$$

quelque soit  $n$ , quand  $x$  croît indéfiniment par valeurs positives,

Tel est en effet le cas de la fonction:

$$J = e^{-x}.$$

En revanche pour un même argument de  $x$ , une même fonction ne peut être représentée asymptotiquement que par une seule série.

## § 2. Séries normales.

Je vais maintenant rappeler succinctement les principaux résultats obtenus par MM. FUCHS et THOMÉ au sujet des équations linéaires.

Soit:

$$(1) \quad P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + P_1 \frac{dy}{dx} + P_0 y = 0$$

une équation où les coefficients  $P$  sont des polynômes entiers en  $x$ . Je me propose d'étudier les intégrales pour les valeurs très grandes de  $|x|$ .

Si le degré des polynômes  $P_n, P_{n-1}, \dots, P_0$  va constamment en décroissant, il y a  $n$  séries de la forme suivante:

$$(2) \quad x^a \left( A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \dots \right)$$

qui satisfont formellement à l'équation et qui de plus convergent si  $|x|$  est assez grand. En d'autres termes il y a  $n$  intégrales régulières.

Les valeurs de  $\alpha$  sont données par une certaine équation déterminante; il y a exception dans le cas où la différence de deux racines de cette équation devient un entier; le  $\log x$  peut alors s'introduire dans les séries.

Si le degré des polynômes  $P$  ne va jamais en croissant, mais ne va pas toujours en décroissant et si le degré de  $P_0$  est plus petit que celui de  $P_n$ , il y a dans certains cas  $m$  séries de la forme (2) ( $m < n$ ) qui satisfont formellement à l'équation, mais elles ne convergent pas toujours.

Enfin, si on laisse de côté certains cas limités et exceptionnels dont je parlerai plus loin, on démontre qu'il y a  $n$  séries de la forme suivante:

$$(3) \quad e^{\alpha} x^{\alpha} \left( A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \dots \right)$$

qui satisfont formellement à l'équation.  $Q$  est un polynôme entier en  $x$ . Une pareille série s'appellera une série normale et elle sera d'ordre  $p$  si le polynôme  $Q$  est d'ordre  $p$ .

Malheureusement ces séries normales ne sont pas toujours convergentes. Si l'une d'elles converge, on dira que l'équation admet une intégrale normale. Mais cela n'arrivera qu'exceptionnellement.

Passons maintenant à l'examen de divers cas exceptionnels.

Le polynôme  $Q$  étant supposé connu,  $\alpha$  nous sera donné par une équation déterminante. Dans le cas où cette équation a deux ou plusieurs racines différent entre elles d'un entier, il peut y avoir exception et on peut trouver au lieu d'une série normale proprement dite une série de la forme suivante:

$$e^Q x^\alpha [\psi_0 + \log x \cdot \psi_1 + \log^2 x \cdot \psi_2 + \dots + \log^q x \cdot \psi_q]$$

les  $\psi$  étant des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de  $\frac{1}{x}$ .

Nous appellerons une pareille série, série normale logarithmique d'ordre  $p$ .

Soit  $a$  le coefficient de  $x^p$  dans  $Q$ , et supposons qu'aucune des séries normales qui satisfont à l'équation (1) ne soit d'ordre supérieur à  $p$ . Il arrivera alors que  $a$  nous sera donné par une certaine équation facile à former.

Dans le cas où cette équation a des racines multiples, il peut arriver que le procédé qui permet de former les séries normales devienne illusoire. M. FABRY, dans une thèse récemment soutenue devant la Faculté des sciences de Paris, a fait voir que l'on peut former alors des séries de la forme suivante:

$$e^Q x^\alpha \psi$$

où  $Q$  est un polynôme entier de degré  $> (p - 1)n$  et  $\leq pn$  en  $x^n$  et où  $\psi$  est ordonné suivant les puissances croissantes de  $x^{-\frac{1}{n}}$ . Ces séries généralement divergentes satisfont formellement à l'équation (1).

J'appellerai une pareille série, série anormale d'ordre  $p$ .

Voyons comment l'ordre des séries normales se rattache au degré des polynômes  $P$ . Soit  $M_i$  le degré de  $P_i$ . Soit:

$$N_i = \frac{M_i - M_n}{n - i}.$$

Soit  $h$  la plus grande des  $n$  quantités  $N_i$ . Soit  $p$  l'entier qui est égal ou immédiatement supérieur à  $h$ . On trouve que toutes les séries normales ou anormales qui satisfont formellement à l'équation (1) sont d'ordre  $p$  au plus.

Je vais démontrer la réciproque:

J'appellerai le nombre  $h$ , le rang de l'équation (1). Je vais faire voir que si  $n$  séries normales d'ordre égal ou inférieur à  $p$  satisfont formellement à une équation linéaire de la forme (1), cette équation est au plus de rang  $p$ .

En effet l'équation peut s'écrire en la divisant par  $P_n$

$$\frac{d^n y}{dx^n} + F_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + F_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + F_1 \frac{dy}{dx} + F_0 y = 0$$

les  $F$  étant des séries convergentes ordonnées suivant les puissances décroissantes de  $x$ . La série  $F_i$  commencera par un terme  $x^{M_i - M_n}$  et l'une au moins des séries  $F_i$  commencera par un terme en  $x^{h(n-i)}$ .

Cela posé, soient

$$S_1, S_2, \dots, S_n$$

$n$  séries normales d'ordre  $p$  satisfaisant formellement à l'équation. Appelons  $S_i^k$  la dérivée  $k^{\text{e}}$  de  $S_i$  formée d'après les règles ordinaires du calcul, en différentiant chaque terme comme si la série était convergente, puis en ordonnant. Formons un tableau de  $n$  lignes et de  $n+1$  colonnes où le  $i^{\text{e}}$  terme de la 1<sup>ère</sup> colonne est  $S_i$ , et où le  $i^{\text{e}}$  terme de la  $(k+1)^{\text{e}}$  colonne est  $S_i^k$ . Soit  $\Delta_k$  le déterminant formé en supprimant dans le tableau la  $k^{\text{e}}$  colonne. On calculera ce déterminant par les règles ordinaires du calcul et on obtiendra une série divergente que l'on donnera de la même manière que les séries  $S$ .

Quant au quotient:

$$\frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_{n+1}}$$

si on l'effectue d'après la règle ordinaire de la division des séries, on obtient une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de  $x$  qui doit être identique à  $\pm F_i$  et qui par conséquent est convergente.

Mais on voit sans peine, d'après la loi même de sa formation,

qu'elle ne peut commencer que par un terme d'ordre  $p(n-i)$  en  $x$  au plus.

On a donc

$$h \leq p.$$

C. Q. F. D.

D'ailleurs supposons que l'on ait une équation de rang  $p+1$  et que l'on forme l'équation qui donne le coefficient de  $x^{p+1}$  dans les polynômes  $P$ . Si toutes les séries normales étaient d'ordre  $p$  ou au dessous, toutes les racines de cette équation devraient être nulles, et il est aisément de voir alors que le rang de l'équation différentielle s'abaisserait.

### § 3. Cas du premier ordre.

Nous commencerons par nous restreindre au cas où toutes les séries normales sont de 1<sup>er</sup> ordre, c'est à dire où dans l'équation:

$$(1) \quad P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + P_1 \frac{dy}{dx} + P_0 y = 0$$

le degré d'aucun des polynômes  $P$  ne dépasse le degré  $m$  de  $P_n$ . Soit alors  $A_i$  le coefficient de  $x^m$  dans  $P_i$ ; nous formerons l'équation:

$$(2) \quad A_n a^n + A_{n-1} a^{n-1} + \dots + A_1 a + A_0 = 0.$$

Soient  $a_1, a_2, \dots, a_n$  les racines de cette équation que je supposerai d'abord toutes distinctes. L'équation (1) sera satisfaite alors par  $n$  séries normales du 1<sup>er</sup> ordre de la forme suivante:

$$e^{a_1 x} x^{a_1} \varphi_1, \quad e^{a_2 x} x^{a_2} \varphi_2, \quad \dots, \quad e^{a_n x} x^{a_n} \varphi_n;$$

où  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sont des constantes convenablement choisies et où  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  sont des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de  $\frac{1}{x}$ .

Considérons la transformée de LAPLACE de notre équation (1) pour laquelle je renverrai à mon mémoire *sur les équations linéaires aux diffé-*

rences ordinaires et aux différences finies inséré au Tome 7 de l'American Journal of Mathematics. Cette transformée pourra s'écrire:

$$(3) \quad Q_m \frac{d^m v}{dz^m} + Q_{m-1} \frac{d^{m-1} v}{dz^{m-1}} + \dots + Q_1 \frac{dv}{dz} + Q_0 v = 0.$$

Les  $Q$  sont des polynômes de degré  $n$  au plus en  $z$  et l'on a:

$$Q_m = (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n).$$

L'équation (3) admet alors  $n$  points singuliers simples:

$$z = a_1, \quad z = a_2, \quad \dots, \quad z = a_n.$$

Formons l'équation déterminante relative au point singulier  $z = a_i$ . Les racines de cette équation seront:

$$0, 1, 2, \dots, m-2, \beta_i.$$

Je supposerai d'abord que  $\beta_i$  n'est pas entier positif ou négatif. Il existera alors  $m-1$  intégrales de l'équation (3) qui seront holomorphes dans le voisinage du point  $z = a_i$  et une  $m^{\circ}$  que j'appellerai  $v_i$  et qui sera de la forme suivante:

$$(4) \quad v_i = (z - a_i)^{\beta_i} + C_1(z - a_i)^{\beta_i+1} + C_2(z - a_i)^{\beta_i+2} + \dots$$

Construisons maintenant un contour fermé  $k_i$  de la façon suivante. Du point  $a_i$  comme centre avec un rayon très petit, décrivons un cercle. Par le point  $a_i$  menons une droite parallèle à l'axe des quantités réelles et prolongeons-la indéfiniment dans la direction des quantités réelles négatives; elle coupera notre petit cercle en un certain point  $b_i$ . Cela posé, le contour  $k_i$  sera formé comme il suit; on suivra d'abord la droite que je viens de définir depuis l'infini jusqu'au point  $b_i$ , puis on fera le tour du petit cercle pour revenir au point  $b_i$  et enfin on retournera du point  $b_i$  à l'infini en suivant la droite.

Si l'on se reporte au mémoire cité (American Journal of Mathematics, Tome 7), on verra que l'intégrale suivante:

$$J_i = \int v_i e^{iz} dz$$

prise le long du contour  $k_i$  est une intégrale de l'équation (1) pourvu

que la partie réelle de  $x$  soit suffisamment grande, et en particulier si  $x$  est positif et très grand.

Nous décomposerons cette intégrale  $J_i$  en trois autres:

$$J_i = J'_i + J''_i + J'''_i$$

la première  $J'_i$  étant prise le long de notre droite de l'infini à  $b_i$ ; la seconde  $J''_i$  étant prise le long du petit cercle qui a pour centre le point  $a_i$  et qui passe par le point  $b_i$ ; et la troisième  $J'''_i$  étant prise le long de la droite suivie en retour depuis  $b_i$  jusqu'à l'infini.

J'ai montré dans le mémoire cité qu'on peut trouver deux quantités  $D$  et  $D'$  telles que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{J'_i}{e^{b_i x}} = D, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{J'''_i}{e^{b_i x}} = D'$$

lorsque  $x$  tend vers l'infini par valeurs réelles positives.

Comme, par construction, la partie réelle de  $b_i$  est plus petite que celle de  $a_i$ , on peut en conclure qu'on aura:

$$\lim x^q e^{-a_i x} (J'_i + J'''_i) = 0$$

quelque grand que soit  $q$ .

Ecrivons

$$v_i = (z - a_i)^{\beta_i} + C_1(z - a_i)^{\beta_{i+1}} + \dots + C_k(z - a_i)^{\beta_{i+k}} + R_k$$

$R_k$  étant le reste de la série (4). Je puis prendre le rayon de notre petit cercle assez petit pour que cette série soit convergente.

On a alors:

$$J''_i = \int (z - a_i)^{\beta_i} e^{zx} dz + \dots + C_k \int (z - a_i)^{\beta_{i+k}} e^{zx} dz + \int R_k e^{zx} dz$$

les intégrales étant prises le long du petit cercle.

J'ai montré dans le mémoire cité que l'expression suivante

$$x^q e^{-a_i x} \int R_k e^{zx} dz$$

tend uniformément vers 0 pour toutes les valeurs de  $x$  quand  $k$  croît indéfiniment.

Cela est vrai d'ailleurs quel que soit  $q$ .

D'autre part, l'expression suivante:

$$\int (z - a_i)^h e^{ax} dz$$

est représentée asymptotiquement par l'expression:

$$(e^{2i\pi h} - 1) \Gamma(h + 1) x^{-h-1} e^{a_i x}.$$

Je veux dire que la différence de ces deux expressions multipliée par  $x^h e^{-a_i x}$  tend vers 0 quand  $x$  grandit indéfiniment.

Il résulte de là que  $J'_i$ , et par conséquent  $J_i$ , est représenté asymptotiquement par la série suivante:

$$\begin{aligned} & \frac{e^{2i\pi\beta_i} - 1}{x^{\beta_i + 1}} e^{a_i x} \Gamma(\beta_i + 1) + C_1 \frac{e^{2i\pi\beta_i} - 1}{x^{\beta_i + 2}} e^{a_i x} \Gamma(\beta_i + 2) \\ & + C_2 \frac{e^{2i\pi\beta_i} - 1}{x^{\beta_i + 3}} e^{a_i x} \Gamma(\beta_i + 3) + \dots \end{aligned}$$

Or il est aisément de vérifier que cette série n'est autre chose que la série normale

$$e^{a_i x} x^{\alpha_i} \varphi_i$$

que nous avons définie plus haut. (On a  $\alpha_i = -\beta_i - 1$ .)

Ainsi une série normale du 1<sup>er</sup> ordre, alors même qu'elle est divergente, représente asymptotiquement une des intégrales de l'équation à laquelle elle satisfait formellement.

Cette série normale pourra s'écrire, à un facteur constant près:

$$\frac{e^{a_i x}}{x^{\beta_i + 1}} + C_1(\beta_i + 1) \frac{e^{a_i x}}{x^{\beta_i + 2}} + C_2(\beta_i + 1)(\beta_i + 2) \frac{e^{a_i x}}{x^{\beta_i + 3}} + \dots$$

Ainsi à chaque point singulier simple de l'équation (3) correspondra une intégrale de l'équation (1) et une série normale qui la représente asymptotiquement. J'ai supposé jusqu'ici que  $x$  tendait vers l'infini par valeurs réelles positives; mais cela reste vrai quand  $x$  tend vers l'infini avec un argument donné différent de 0.

Il faut toutefois faire attention à une chose. À chaque point singulier  $a_i$  correspond une intégrale de (1) quel que soit l'argument de  $x$ ;

mais quand cet argument varie, cette intégrale ne reste pas la même; pour certaines valeurs de cet argument, cette intégrale se change brusquement en une autre qui n'en est pas la continuation analytique. C'est ce que j'ai exposé en détail dans le § 5 du mémoire cité.

Comme à un point singulier correspond toujours la même série normale, il en résulte que la même série normale ne représentera pas asymptotiquement la même intégrale quand l'argument  $x$  variera, si ce n'est dans des cas exceptionnels.

Passons maintenant aux cas particuliers.

Nous supposerons d'abord que  $\beta_i$  étant entier, l'intégrale  $v_i$  contienne un logarithme. Soit:

$$v_i = \varphi + \log(z - a_i) \psi$$

$\varphi$  et  $\psi$  étant holomorphes dans le voisinage de  $z = a_i$ . On aura alors:

$$J_i = \int e^{iz} [\varphi + \psi \log(z - a_i)] dz = \int \psi dz \log(z - a_i)$$

les intégrales étant prises le long de  $k_i$ . Ici encore nous aurons:

$$J_i = J'_i + J''_i + J'''_i$$

en divisant le contour  $k_i$  en trois parties comme il a été dit plus haut, et de plus:

$$\lim x^q e^{-a_i x} (J'_i + J'''_i) = 0.$$

Soit

$$\psi = C_0(z - a_i)^{\beta_i} + C_1(z - a_i)^{\beta_i + 1} + \dots$$

une série que nous supposerons convergente tout le long du petit cercle.

Nous aurons alors:

$$x^q e^{-a_i x} J'_i = \sum C_k \int (z - a_i)^{\beta_i + k} e^{iz} \log(z - a_i) e^{-a_i x} x^q dz$$

l'intégrale étant prise le long du petit cercle. La série du second membre sera uniformément convergente quel que soit  $x$ , ainsi qu'il a été dit plus haut. Il reste donc à trouver la valeur asymptotique de l'intégrale:

$$j_{i,k} = \int (z - a_i)^{\beta_i + k} e^{iz} \log(z - a_i) dz$$

prise le long du petit cercle. D'autre part appelons  $j_{ik}$  la même inté-

grale prise le long du contour  $k_i$  tout entier et décomposons-la en trois parties:

$$j_{ik} = j'_{ik} + j''_{ik} + j'''_{ik}$$

comme l'intégrale  $J_i$  elle même. Nous aurons encore:

$$\lim x^q e^{-a_i x} (j'_{ik} + j'''_{ik}) = 0$$

et par conséquent la valeur asymptotique de  $j''_{ik}$  sera la même que celle de  $j_{ik}$ .

Calculons donc  $j_{ik}$ . Il vient:

$$\int (z - a_i)^h e^{zx} dz = (e^{2i\pi h} - 1) \Gamma(h+1) x^{-h-1} e^{a_i x}$$

lorsque l'intégrale est prise le long du contour  $k_i$ . En différentiant par rapport à  $h$  il vient:

$$\int (z - a_i)^h e^{zx} \log(z - a_i) dz = 2i\pi e^{2i\pi h} \Gamma'(h+1) x^{-h-1} e^{a_i x} + (e^{2i\pi h} - 1) D$$

$D$  désignant la dérivée de  $\Gamma(h+1) x^{-h-1} e^{a_i x}$  par rapport à  $h$ . Si l'on fait  $h = \beta_i + k$  et si l'on tient compte de ce fait que  $\beta_i$  est entier, il viendra:

$$j_{ik} = 2i\pi \Gamma(\beta_i + k + 1) x^{-\beta_i - k - 1} e^{a_i x}.$$

Il résulte de là que  $J_i$  est représenté asymptotiquement par la série:

$$\sum C_k j_{ik} = 2i\pi \sum C_k \Gamma(\beta_i + k + 1) x^{-\beta_i - k - 1} e^{a_i x}$$

qui est précisément la série normale:

$$e^{a_i x} x^{\alpha_i} \varphi_i.$$

Le théorème démontré plus haut subsiste donc encore dans ce cas.

La formule qui donne  $J_i$  quand on connaît  $v_i$  devient illusoire quand  $\beta_i$  est entier positif et qu'il n'y a pas de logarithme dans l'intégrale  $v_i$ ; car alors l'intégrale

$$\int v_i e^{zx} dz$$

prise le long du contour  $k_i$  est nulle. Il convient alors de remplacer le contour  $k_i$  par un chemin d'intégration différent. On prendra pour

ce chemin une droite menée à partir de  $a_i$  parallèlement à l'axe des quantités réelles et prolongée indéfiniment dans la direction des quantités réelles négatives. On verra ainsi que le théorème subsiste encore. Je dois ajouter que si  $\beta_i$  est entier positif sans que  $v_i$  contienne de logarithme,  $\beta_i$  devra être supérieur à  $m - 1$ .

Considérons par exemple l'équation suivante

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = (\alpha^2 x^2 + 2)y$$

qui admet pour intégrales

$$e^{\alpha x} \left( \frac{1}{x} - \alpha \right) \quad \text{et} \quad e^{-\alpha x} \left( \frac{1}{x} + \alpha \right)$$

et dont la transformée de LAPLACE est:

$$(z^2 - \alpha^2) \frac{d^2 v}{dz^2} + 4z \frac{dv}{dz} = 0$$

et admet pour intégrales:

$$v_0 = 1 \quad \text{et} \quad v_1 = \int \frac{dz}{(z^2 - \alpha^2)^2} = F + C \log \frac{z - \alpha}{z + \alpha}$$

$C$  étant une constante et  $F$  une fonction rationnelle.

Nous considérerons deux contours fermés  $k$  et  $k'$ , formés comme le contour  $k_i$  défini plus haut, et enveloppant, le premier le point  $\alpha$ , le second le point  $-\alpha$ . Nous prendrons alors les intégrales:

$$\int_k v_1 e^{zx} dz \quad \text{et} \quad \int_{k'} v_1 e^{zx} dz$$

et nous obtiendrons ainsi deux intégrales de l'équation en  $y$ . Or nous avons, à un facteur constant près:

$$v_1 = \log(z - \alpha) - \frac{\alpha}{z - \alpha} + \phi$$

$\phi$  étant holomorphe dans le voisinage du point  $z = \alpha$ . On aura donc:

$$\int_k v_1 e^{zx} dz = \int_k e^{zx} dz \left[ \log(z - \alpha) - \frac{\alpha}{z - \alpha} \right] = 2i\pi e^{\alpha x} \left( \frac{1}{x} - \alpha \right).$$

La seconde intégrale nous donnerait de même:

$$2i\pi e^{-\alpha x} \left( \frac{1}{x} + \alpha \right).$$

Nous avons ainsi intégré l'équation en  $y$ , en nous servant seulement de l'intégrale  $v_1$  et sans employer l'intégrale  $v_0$ . Il importe cependant pour notre objet de montrer qu'on pourrait tirer quelque chose de cette dernière intégrale.

Traçons à partir du point  $\alpha$  une droite et prolongeons-la indéfiniment dans un sens. Si  $v_0$  s'annulait ainsi que sa dérivée au point  $\alpha$ , l'intégrale

$$\int v_0 e^{zx} dz$$

prise le long de cette droite serait une intégrale de l'équation en  $y$  et il n'y aurait rien à ajouter. Mais  $v_0$  ne s'annule pas.

Voici donc ce que nous ferons; posons:

$$y' = e^{\alpha x} \frac{d^2}{dx^2} (ye^{-\alpha x});$$

$y'$  satisfara comme  $y$  à une équation du 2<sup>d</sup> ordre facile à former. Pour obtenir la transformée de LAPLACE de cette équation, il suffira de poser dans la transformée de l'équation en  $y$ :

$$v' = v(z - \alpha)^2.$$

L'une des intégrales sera donc:

$$v'_0 = v_0(z - \alpha)^2 = (z - \alpha)^2.$$

Comme cette intégrale s'annule au point  $\alpha$  ainsi que sa dérivée, l'intégrale

$$\int v'_0 e^{zx} dz = \int (z - \alpha)^2 e^{zx} dz$$

prise le long de la droite qui aboutit au point  $\alpha$  satisfara à l'équation en  $y'$ ; on aura donc:

$$y' = \int (z - \alpha)^2 e^{zx} dz = C \frac{e^{\alpha x}}{x^3}$$

$C$  étant un facteur constant. On en tire:

$$y = Ce^{\alpha x} \left( \frac{1}{x} + \beta + \gamma x \right)$$

$\beta$  et  $\gamma$  étant deux constantes d'intégration. On voit qu'il faut prendre:

$$\beta = -\alpha, \quad \gamma = 0.$$

Si maintenant  $\beta_i$  est entier négatif sans qu'il y ait de logarithme dans  $v_i$ , l'intégrale  $J_i$  se réduit d'elle-même à  $e^{\alpha_i x}$  multiplié par un polynôme entier en  $x$ .

Il reste à examiner le cas où deux des racines de l'équation (2) deviennent égales entre elles. L'équation (3) admet alors un point singulier double que j'appellerai  $a_i$ . Il peut arriver alors que dans le voisinage de ce point les intégrales de (3) soient irrégulières. C'était impossible au contraire dans le cas des points singuliers simples.

Je reviendrai plus tard sur ce cas, en me bornant pour le moment à faire remarquer que c'est celui où l'équation (1) n'admet pas de séries normales, mais seulement de ces séries anormales dont il a été question plus haut.

Mais, à certaines conditions, les intégrales de l'équation (3) pourront être régulières dans le voisinage du point  $z = a_i$ . Il y aura alors une équation déterminante dont les racines seront:

$$0, 1, 2, \dots, m-3, \beta_i, \beta'_i.$$

Il existera alors deux intégrales  $v_i$  et  $v'_i$  qui seront de la forme:

$$v_i = (z - a_i)^{\beta_i} \varphi_i$$

$$v'_i = (z - a_i)^{\beta'_i} \varphi'_i$$

$\varphi_i$  et  $\varphi'_i$  étant holomorphes dans le voisinage de  $z = a_i$ . Alors les intégrales:

$$J_i = \int v_i e^{zx} dz, \quad J'_i = \int v'_i e^{zx} dz$$

prises le long du contour  $k_i$  seront deux intégrales de l'équation (1), qui seront représentées asymptotiquement par deux séries normales faciles à former.

Dans le cas particulier où  $\beta_i$  et  $\beta'_i$  diffèrent d'un entier, l'une des deux intégrales  $v_i$  et  $v'_i$  contient un logarithme et par conséquent l'une des deux séries normales qui représentent asymptotiquement  $J_i$  et  $J'_i$  devient logarithmique.

En résumé lorsque toutes les séries normales sont du 1<sup>er</sup> ordre, une quelconque d'entre elles représente asymptotiquement l'une des intégrales de l'équation (1). Mais l'intégrale ainsi représentée par une même série normale ne restera pas la même, en général, quel que soit l'argument avec lequel  $x$  croît indéfiniment.

#### § 4. Intégrales normales.

Quand une série normale est convergente, elle représente une intégrale de l'équation (1) et on l'appelle intégrale normale.

Nous nous restreindrons, comme dans le paragraphe précédent, au cas où toutes les séries normales sont du 1<sup>er</sup> ordre. Soit alors:

$$(2) \quad v_i = (z - a_i)^{\beta_i} + C_1(z - a_i)^{\beta_i + 1} + C_2(z - a_i)^{\beta_i + 2} + \dots$$

une intégrale de l'équation (3) transformée de LAPLACE de l'équation (1). A cette intégrale correspondra une intégrale  $J_i$  de l'équation (1):

$$J_i = A \int v_i e^{zx} dz$$

( $A$  étant un facteur constant) qui sera représentée asymptotiquement comme nous l'avons vu par la série normale:

$$(4) \quad \frac{e^{a_i x}}{x^{\beta_i + 1}} + C_1(\beta_i + 1) \frac{e^{a_i x}}{x^{\beta_i + 2}} + C_2(\beta_i + 1)(\beta_i + 2) \frac{e^{a_i x}}{x^{\beta_i + 3}} + \dots$$

Pour que cette série normale converge pour les valeurs suffisamment grandes de  $x$ , il faut et il suffit que l'expression:

$$\sqrt[n]{C_n(\beta_i + 1)(\beta_i + 2) \dots (\beta_i + n)}$$

tende vers une limite finie pour  $n$  infini. Mais d'autre part on a:

$$\lim \sqrt[n]{(\beta_i + 1)(\beta_i + 2) \dots (\beta_i + n)} = \infty \quad \text{pour } n = \infty.$$

Donc pour que la série (4) converge, il faut que

$$\lim \sqrt[n]{C_n} = 0$$

et que par conséquent la série (2) converge dans toute l'étendue du plan.

Il faut donc que  $v_i$  soit de la forme suivante:

$$(z - a_i)^{\beta_i} \varphi(z)$$

$\varphi(z)$  étant holomorphe dans toute l'étendue du plan.

Je dis que cette condition est suffisante.

Si elle est remplie et si on se reporte au mémoire cité, on verra qu'on peut toujours trouver 3 nombres positifs  $b$ ,  $c$  et  $h$  tels que:

$$|v_i| < b e^{c|z-a_i|}$$

si

$$|z - a_i| > h.$$

Envisageons ensuite l'intégrale suivante:

$$J_i = \int v_i e^{zx} dz$$

cette intégrale étant prise le long d'une droite menée à partir du point  $i$  et prolongée indéfiniment avec un argument  $\omega + \pi$ ,  $\omega$  étant l'argument de  $x$ . Cette intégrale sera toujours finie et ce sera une fonction de  $x$  qui sera holomorphe pour toutes les valeurs très grandes de  $x$ . De plus  $J_i x^{\beta_i}$  sera uniforme et se reproduira quand on fera décrire à  $x$  un contour fermé infiniment grand.

Je décomposerai cette intégrale en deux parties:  $J'_i$  prise le long d'une partie de la droite définie plus haut depuis le point  $z = a_i$  jusqu'au point

$$z = a_i - h e^{i\omega}$$

et  $J''_i$  prise le long de la seconde partie de cette droite depuis ce dernier point jusqu'à l'infini.

Il vient alors, en posant  $z = a_i + t$ :

$$|J''_i e^{-a_i x}| < \int_h^\infty b e^{[c - |x|]t} dt$$

d'où l'on déduit aisément que quel que soit l'argument de  $x$ , l'expression

$$x^{\beta_i + 2} J_i'' e^{-a_i x}$$

tend uniformément vers 0.

Quant à  $J_i'$ , il est aisément de l'évaluer; soit:

$$v_i = (z - a_i)^{\beta_i} + C_1(z - a_i)^{\beta_i + 1} + w_i$$

$w_i$  désignant une suite de termes dont le premier est  $C_2(z - a_i)^{\beta_i + 2}$ .

On a:

$$J_i' = \int [(z - a_i)^{\beta_i} + C_1(z - a_i)^{\beta_i + 1}] e^{zx} dz + \int w_i e^{zx} dz.$$

On démontre que:

$$x^{\beta_i + 2} J_i' e^{-a_i x}$$

tend uniformément vers 0. De même en posant:

$$J_i''' = \int [(z - a_i)^{\beta_i} + C_1(z - a_i)^{\beta_i + 1}] dz$$

et si les deux premiers termes de la série normale qui représente asymptotiquement  $J_i$  sont

$$Ae^{a_i x} x^{-\beta_i - 1} + Be^{a_i x} x^{-\beta_i - 2} = H$$

on verrait que

$$x^{\beta_i + 3} e^{-a_i x} (J_i''' - H)$$

tend uniformément vers 0.

Posons donc:

$$x = \frac{1}{t}; \quad L_i = J_i e^{-a_i x} x^{\beta_i + 1}$$

on trouvera, en regardant  $L_i$  comme une fonction de  $t$

$$L_i = A + (B + \varepsilon)t$$

où  $\varepsilon$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers 0 et cela uniformément quel que soit l'argument de  $t$ . De plus, ce sera une fonction uniforme de  $t$ . Ce sera donc une fonction holomorphe de  $t$  dans le voisinage de  $t = 0$ . Donc  $L_i$  pourra se développer en série convergente suivant les puissances de  $t$ .

C. Q. F. D.

Ce raisonnement suppose implicitement que  $\beta_i$  est positif et plus

grand que  $n$ , puisque ce n'est que dans ce cas que l'intégrale  $J_i$  est finie et appartient à l'équation (1) quand on la prend le long de la droite dont nous nous sommes servis et qui aboutit au point  $a_i$ . Si cela n'avait pas lieu, on remplacerait cette droite par un contour fermé, analogue au contour  $k_i$  du paragraphe précédent et formé d'un petit cercle et d'une droite parcourue deux fois en sens contraire. Cette droite devra avoir l'argument  $\omega + \pi$ ,  $\omega$  étant celui de  $x$ . Le raisonnement serait du reste absolument le même.

Il faut observer encore que dans le raisonnement qui précède nous n'avons pas été obligés de nous appuyer sur ce fait que  $v_i$  était une intégrale d'une équation linéaire, ou plutôt nous ne nous en sommes servis que pour établir l'existence des trois nombres positifs  $b$ ,  $c$  et  $h$  tels que

$$|v_i| < be^{c|z-a_i|} \quad \text{si} \quad |z - a_i| > h.$$

En d'autres termes nous avons eu seulement à supposer que la dérivée logarithmique de  $v_i$  tend uniformément vers une limite finie quand  $z$  croît indéfiniment avec un argument donné.

Soit donc une fonction entière quelconque  $\varphi(z)$  jouissant de cette propriété. Soit

$$\varphi(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \dots$$

Nous supposons que quand  $z$  croît indéfiniment avec un argument donné, la dérivée logarithmique de  $\varphi$  tend vers une limite finie et déterminée, qui peut d'ailleurs varier quand l'argument de  $z$  varie.

Formons l'intégrale

$$J = \int \varphi(z) e^{zx} dz$$

prise le long d'une droite partant du point  $o$  et s'étendant indéfiniment avec l'argument  $\omega + \pi$ ,  $\omega$  étant l'argument de  $x$ .

$J$  sera représenté asymptotiquement par la série

$$\frac{C_0}{x} + \frac{C_1}{x^2} + \frac{2C_2}{x^3} + \dots + \frac{C_n |n|}{x^n} + \dots$$

D'après le raisonnement précédent, cette série devra converger pour les grandes valeurs de  $x$ . Donc:

$$\sqrt[n]{|n| C_n}$$

tend vers une limite finie quand  $n$  croît indéfiniment. Cette propriété appartient à toutes les fonctions entières  $\varphi(z)$  qui satisfont à la condition énoncée plus haut.

Ce résultat doit être rapproché de celui que j'ai obtenu dans une note intitulée: *Sur les fonctions entières* (Bulletin de la Société Mathématique de France, T. 11, 1883, n° 4, p. 136—144).

De cette analyse, il suit que pour qu'une série normale converge, il faut et il suffit que l'intégrale  $v_i$  qui lui correspond dans la transformée de LAPLACE soit égale à une fonction holomorphe multipliée par une puissance de  $z - a_i$ .

Mais il convient d'ajouter que nous avons laissé de côté le cas où  $v_i$  contient des logarithmes et où  $\beta_i$  est entier.

Soit donc:

$$v_i = v'_i + w'_i \log(z - a_i)$$

$v'_i$  sera holomorphe ou méromorphe dans le voisinage du point  $z = a_i$ . S'il est méromorphe, nous écrirons:

$$v'_i = v''_i + w''_i = v''_i + \frac{G_1}{z - a_i} + \frac{G_2}{(z - a_i)^2} + \dots + \frac{G_r}{(z - a_i)^r}.$$

Quant à  $w'_i$  nous l'écrirons

$$w'_i = C_0 + C_1(z - a_i) + C_2(z - a_i)^2 + \dots$$

Nous aurons alors:

$$J_i = \int v''_i e^{ix} dz + \int w''_i e^{ix} dz + \int w'_i \log(z - a_i) e^{ix} dz.$$

La première intégrale est nulle; la seconde est égale à  $e^{ia_i x}$  multiplié par un polynôme entier de degré  $r - 1$  en  $x$ ; quant à la troisième elle est représentée asymptotiquement par la série

$$e^{ia_i x} 2i\pi (C_0 I'(1)x^{-1} + C_1 I'(2)x^{-2} + C_2 I'(3)x^{-3} + \dots).$$

Pour que cette série soit convergente, il faut évidemment que

$$\lim \sqrt[n]{C_n} = 0$$

et par conséquent que  $w'_i$  soit une fonction holomorphe dans tout le plan,  $v'_i$  pouvant d'ailleurs être quelconque.

Cette condition est d'ailleurs suffisante; on a en effet, quel que soit l'argument de  $x$

$$J_i = \int v_i'' e^{zx} dz + \int w_i' \log(z - a_i) e^{zx} dz.$$

La première intégrale étant égale à  $e^{ax}$  multiplié par un polynôme entier en  $x$ , nous n'avons pas à nous en occuper. Quant à la seconde, si  $w_i'$  est holomorphe dans tout le plan, elle sera toujours représentée asymptotiquement par la même série normale, et si on fait varier l'argument de  $x$ , elle représentera une même fonction de  $x$ , uniforme et continue. En raisonnant encore comme plus haut, on verrait donc que la série normale correspondante doit être convergente.

C. Q. F. D.

Si  $\beta_i$  est entier positif sans qu'il y ait de logarithme dans  $v_i$ , ce qui exige que

$$\beta_i > m - 1$$

alors la condition nécessaire et suffisante pour que la série normale correspondante converge, c'est que  $v_i$  soit holomorphe dans tout le plan.

Si enfin  $\beta_i$  est entier négatif sans qu'il y ait de logarithme dans  $v_i$ , la série normale correspondante convergera toujours, car elle se réduira à un polynôme entier multiplié par une exponentielle.

J'ai peu de chose à ajouter sur le cas où deux points singuliers simples  $a_i$  et  $a_j$  se confondent en un seul point singulier double  $a_i$ . Si les intégrales sont irrégulières, il n'y a pas de série normale et nous devons laisser ce cas de côté. Si les intégrales sont régulières, il y a une équation déterminante qui aura pour racines

$$0, 1, 2, \dots, m - 3, \beta_i, \beta'_i.$$

Si  $\beta_i$  et  $\beta'_i$  ne diffèrent pas d'un entier, il n'y a rien à changer à ce qui précède; si  $\beta_i$  et  $\beta'_i$  diffèrent d'un entier, il arrivera en général qu'une intégrale  $v_i$  sera de la forme suivante:

$$(z - a_i)^{\beta_i} [\varphi + \varphi' \log(z - a_i)]$$

$\varphi$  et  $\varphi'$  étant holomorphes dans le voisinage du point  $z = a_i$ . Pour que

la série normale correspondante converge, il faut et il suffit que  $\varphi$  et  $\varphi'$  soient holomorphes dans tout le plan.

Considérons maintenant une équation (1) et sa transformée (3); supposons que cette dernière n'ait que des points singuliers simples et qu'aucun des  $\beta_i$  ne soit entier. Alors nous aurons  $n$  séries normales à chacune desquelles correspondra une fonction:

$$v_i = (z - a_{ij})^{\beta_i} \varphi_i$$

$\varphi_i$  holomorphe pour  $z = a_i$ .

Une série normale sera convergente si la fonction  $\varphi_i$  correspondante est une fonction entière; l'équation (1) aura précisément autant d'intégrales normales que l'équation (3) aura d'intégrales égales à une fonction entière multipliée par une puissance de  $z - a$ .

A une même intégrale de (3) ne pourront pas correspondre plusieurs intégrales normales de (1). Il n'en sera plus de même si plusieurs des  $\beta_i$  sont entiers et s'il y a des logarithmes. Supposons par exemple que l'on ait pour une intégrale de (3):

$$v_i = \varphi + \psi \log(z - a) + \theta \log(z - b)$$

$\psi$  et  $\theta$  étant holomorphes dans tout le plan et  $\varphi$  étant holomorphe dans le voisinage des points  $a$  et  $b$ , mais d'ailleurs quelconques.

Les deux intégrales

$$\int_k v_i e^{zx} dz \quad \text{et} \quad \int_{k'} v_i e^{zx} dz$$

( $k$  et  $k'$  étant deux contours analogues à  $k_i$  et enveloppant le premier le point  $a$ , le second le point  $b$ ) seront deux intégrales normales de l'équation (1).

Envisageons par exemple l'équation suivante:

$$(1') \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = (\alpha^2 x^2 + \beta) y$$

dont la transformée de LAPLACE sera:

$$(3') \quad (z^2 - \alpha^2) \frac{d^2 v}{dz^2} + 4z \frac{dv}{dz} + (z - \beta)v = 0.$$

C'est une équation hypergéométrique, dont les points singuliers sont

$$\alpha, -\alpha, \infty$$

avec des équations déterminantes, dont les points singuliers sont respectivement:

$$0, -1; 0, -1; -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \beta}.$$

Pour que dans le voisinage du point singulier  $\alpha$  par exemple, une intégrale prenne la forme:

$$\psi + \varphi \log(z - \alpha)$$

$\varphi$  étant holomorphe dans tout le plan, il faut que l'une des racines de l'équation déterminante relative au point  $z = \infty$  soit entière. Cela n'arrive que si

$$\beta = n(n+1)$$

$n$  étant entier. Supposons donc  $\beta = n(n+1)$ . Alors l'équation (3') admet pour intégrale un polynôme entier  $P$  en  $z$ . Une seconde intégrale sera de la forme:

$$v = P \log \frac{z - \alpha}{z + \alpha} + Q$$

$Q$  étant méromorphe dans le voisinage des points  $z = \alpha$ ,  $z = -\alpha$ . Donc l'intégrale:

$$\int v e^{zx} dz$$

prise successivement le long de deux contours analogues à  $k_i$  et enveloppant respectivement le point  $z = \alpha$  et le point  $z = -\alpha$ , nous donnera deux intégrales normales de l'équation (1). Nous retrouvons ainsi un résultat donné autrefois par LIOUVILLE et qui, depuis les travaux de M. HALPHIEN, n'est plus qu'un cas particulier d'une théorie plus générale.

Comme second exemple, nous choisirons l'équation suivante considérée par M. HALPHIEN (*Sur la réduction des équations linéaires aux formes intégrables*, p. 180)

$$(1'') \quad x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + (1 - n^2)x \frac{dy}{dx} - \left(1 - n^2 + \frac{1}{2}mx^3\right)y = 0.$$

Formons la transformée de LAPLACE, il viendra:

$$(3') \quad \left( z^3 - \frac{1}{2}m \right) \frac{d^3 v}{dz^3} + 9z^2 \frac{d^2 v}{dz^2} + (19 - n^2)z \frac{dv}{dz} + v(8 - 2n^2) = 0.$$

Posons

$$\frac{1}{2}m = +\alpha^3$$

et soit  $j$  une racine cubique de l'unité.

Les points singuliers seront:

$$\alpha, \alpha j, \alpha j^2 \text{ et } \infty.$$

Les racines de l'équation déterminante seront pour les points singuliers à distance finie:

$$1, 0 \text{ et } -1.$$

Pour le point singulier  $\infty$  elles seront données par:

$$\rho(\rho-1)(\rho-2) + 9\rho(\rho-1) + (19-n^2)\rho + 8 - 2n^2 = 0$$

ou

$$\rho^3 + 6\rho^2 + (12 - n^2)\rho + 8 - 2n^2 = 0.$$

Cette équation admet la racine  $-2$ ; en la faisant disparaître, il reste:

$$\rho^2 + 4\rho + 4 - n^2 = 0$$

dont les racines sont  $-2 \pm n$ .

Dans le voisinage du point  $z = \alpha$ , l'intégrale logarithmique  $v$  peut se mettre sous la forme:

$$\varphi + \psi \log(z - \alpha)$$

$\varphi$  étant méromorphe et  $\psi$  holomorphe dans le domaine de ce point.

Pour que la série normale correspondante converge, il faut et il suffit que  $\psi$  soit holomorphe dans tout le plan. Alors  $\psi$  doit correspondre à la racine  $-2 + n$  de la troisième équation déterminante et être un polynôme entier de degré  $n - 2$ . Il faut alors que  $n$  soit entier. De plus  $\psi$  doit être une intégrale de l'équation (3).

D'ailleurs tout se passe de même dans le voisinage des points  $z = \alpha j$ ,  $z = \alpha j^2$ , de sorte que, pour que l'équation (1) admette une intégrale nor-

male, il faut que l'équation (3) admette comme intégrale un polynôme entier.

Posons donc:

$$\psi = \sum A_i z^i$$

il viendra:

$$(i+2)(i+n+2)(i-n+2)A_i = \alpha^3 i(i-1)(i-2)A_{i+3}.$$

Nous prendrons le polynôme de degré  $n-2$ ; nous prendrons:

$$i \equiv n-2 \pmod{3}$$

et cette équation nous permettra de calculer par récurrence tous les coefficients du polynôme  $\psi$ , à moins que l'un des facteurs

$$i+2, \quad i+n+2, \quad i-n+2$$

ne s'annule, ce qui ne pourra avoir lieu puisque

$$i > 0, \quad i < n-2.$$

Donc il existera toujours si  $n$  est entier et plus grand que 2 un polynôme entier satisfaisant à l'équation (3).

Pour aller plus loin, posons  $z^3 = t$ ; l'équation (3) deviendra:

$$\begin{aligned} & 27(t-\alpha^3)t^2 \frac{d^3 v}{dt^3} + 54t(t-\alpha^3) \frac{d^2 v}{dt^2} + 6(t-\alpha^3) \frac{dv}{dt} \\ & + 81t^2 \frac{d^2 v}{dt^2} + 54t \frac{dv}{dt} + 3t(19-n^2) \frac{dv}{dt} + (8-2n^2)v = 0. \end{aligned}$$

Il n'y a plus que trois points singuliers:

$$0, \ 1, \text{ et } \infty$$

et les racines des équations déterminantes sont respectivement

$$0, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3};$$

$$0, \quad 1, \quad -1;$$

$$-\frac{2}{3}, \quad -\frac{2}{3} + \frac{n}{3}, \quad -\frac{2}{3} - \frac{n}{3};$$

Supposons que  $n$  ne soit pas divisible par 3 et pour fixer davantage les idées soit

$$n \equiv 1 \pmod{3}.$$

Soient  $X, Y, Z$  trois intégrales de l'équation en  $t$ , la seconde se réduisant à  $\phi$ . Je choisirai ces trois intégrales de telle façon que quand le point  $t$  tournera autour du point  $\infty$ , elles subissent la substitution linéaire:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{vmatrix}.$$

Quand on tournera autour du point 1, nos intégrales subiront la substitution linéaire:

$$\begin{vmatrix} a & b - c \\ 0 & 1 & 0 \\ a' & b' - c' \end{vmatrix}$$

Les racines de l'équation déterminante étant 0, 1 et  $-1$ ; on devra avoir identiquement par rapport à  $S$ :

$$\begin{vmatrix} a - S & b & -c \\ 0 & 1 - S & 0 \\ a' & b' & c' - S \end{vmatrix} = (1 - S)^2.$$

De plus comme une seule intégrale est logarithmique, il faut que:

$$ab' - ba' = b'; \quad cb' - c'b = -b.$$

Quand le point  $t$  décrira un contour de rayon très grand, les trois intégrales subiront la substitution linéaire:

$$\begin{vmatrix} a & bj & ej^2 \\ 0 & j & 0 \\ a' & b'j & c'j^2 \end{vmatrix}$$

Mais en ce qui concerne le point  $t = \infty$ , les racines de l'équation deter-

minante sont  $-\frac{2}{3}$ ,  $\frac{n-2}{3}$ ,  $-\frac{n-2}{3}$  et par conséquent sont égales, à des entiers près, à 0,  $\frac{1}{3}$  et  $\frac{2}{3}$ . Il en résulte que l'on a identiquement:

$$\begin{vmatrix} a - S & bj & cj^2 \\ 0 & j - S & 0 \\ a' & b'j & c'j^2 - S \end{vmatrix} = 1 - S^3.$$

Ces conditions suffisant pour montrer que

$$a = c = 1, \quad a'c = 0$$

ceci nous conduirait aux hypothèses suivantes:

$$1^{\circ} \quad a' = c = 0$$

$$2^{\circ} \quad a' = 1, \quad c = 0, \quad b = 0$$

$$3^{\circ} \quad c = 1, \quad a' = 0, \quad b' = 0.$$

Les deux dernières hypothèses sont inacceptables, car elles conduiraient à admettre que l'équation (3'') a une seconde intégrale holomorphe dans tout le plan et qui ne pourrait être qu'un polynôme entier. Or cela est manifestement impossible.

Nous devons donc adopter la première hypothèse, et nous pouvons conclure que l'équation (3'') a une intégrale de la forme:

$$v = \psi \log(z^3 - \alpha^3) + M$$

$\psi$  étant le polynôme défini plus haut et  $M$  étant méromorphe dans tout le plan.

On arriverait au même résultat si on avait

$$n \equiv 2 \pmod{3}.$$

On conclut de là que l'intégrale:

$$\int v e^{zx} dz$$

prise successivement le long de trois contours analogues à  $k_i$  et envelop-

pant respectivement le point  $\alpha$ , le point  $\omega j$  et le point  $\omega j^2$  nous fournira trois intégrales normales de l'équation (1).

Si  $\beta_i$  est entier négatif et si l'intégrale  $v_i$  correspondante n'est pas logarithmique, l'intégrale  $J_i$  correspondante sera toujours normale. Reprenons par exemple les équations (1'') et (3'') et faisons-y  $n = 1$ . La théorie précédente semble alors en défaut, car l'équation (3'') n'admet plus comme intégrale un polynôme entier. L'intégrale générale de l'équation (3'') est alors:

$$v = \frac{A + Bz + Cz^2}{z^3 - \alpha^3}$$

$A$ ,  $B$  et  $C$  étant des constantes arbitraires. Nous n'avons plus alors ni intégrale entière, ni intégrale logarithmique, mais les intégrales sont méromorphes dans le voisinage des trois points singuliers. L'équation (1'') doit donc encore admettre trois intégrales normales, ce qu'il est d'ailleurs aisément de vérifier.

Dans le cas où  $\beta_i$  est entier positif, et où l'intégrale  $v_i$  n'est pas logarithmique, une même intégrale de (3), holomorphe dans tout le plan, peut fournir plusieurs intégrales normales de (1). Ainsi si l'équation (3) admet une intégrale holomorphe dans tout le plan et s'annulant ainsi que ses  $n - 1$  premières dérivées en  $k$  points différents (qui doivent être alors des points à apparence singulière), l'équation (1) admettra  $k$  intégrales normales.

Dans les exemples que nous avons considérés plus haut (équations (1') et (1'')) les transformées de LAPLACE (3') et (3'') avaient toutes leurs intégrales régulières. Cela arrivera toutes les fois que  $P_n$  sera de degré  $n$  et divisible par  $x^n$ ,  $P_{n-1}$  divisible par  $x^{n-1}$ ,  $P_{n-2}$  divisible par  $x^{n-2}$ , ...,  $P_1$  divisible par  $x$ .

Supposons que l'équation (1) satisfasse à ces conditions. Alors l'équation (3) aura toutes ses intégrales régulières tant à distance finie que dans le domaine du point  $z = \infty$ . Si donc elle admet une intégrale égale à une fonction entière multipliée par une puissance de  $z - a_i$ , cette fonction entière ne pourra être qu'un polynôme.

D'où, cette conclusion, que si l'équation (1) satisfait aux conditions énoncées, une série normale ne pourra converger qu'à la condition d'être limitée.

Il est aisé de former des équations admettant un nombre déterminé d'intégrales normales.

Soit une équation linéaire:

$$Q_n \frac{d^n u}{dz^n} + Q_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dz^{n-1}} + \dots + Q_1 \frac{du}{dz} + Q_0 u = 0$$

où les polynômes  $Q$  sont de degré  $m < n$ . Cette équation admettra  $n - m$  intégrales holomorphes dans tout le plan. Posons ensuite

$$u = v(z - a)^\alpha.$$

Alors  $v$  satisfera aussi à une équation linéaire (3'') facile à former. La transformée de LAPLACE de (3'') aura alors évidemment  $n - m$  intégrales normales.

### § 5. Cas du second ordre.

Nous allons chercher maintenant à étendre au cas général les résultats qui n'ont été jusqu'ici obtenus qu'en supposant que toutes les séries normales sont du 1<sup>er</sup> ordre et par conséquent que tous les polynômes  $P$  sont de degré égal ou inférieur à celui de  $P_n$ .

Considérons une équation:

$$(1) \quad P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + P_1 \frac{dy}{dx} + P_0 y = 0$$

où les degrés des polynômes  $P_n$  vont en croissant, mais de la manière suivante:  $P_n$  sera par exemple de degré  $m$ ;  $P_{n-1}$  sera de degré  $m + 1$  au plus;  $P_{n-2}$  de degré  $m + 2$  au plus; ...;  $P_1$  de degré  $m + n - 1$  au plus, et  $P_0$  de degré  $m + n$  au plus. Il arrivera alors en général que l'équation (1) admettra  $n$  séries normales du 2<sup>d</sup> ordre:

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x).$$

On aura d'ailleurs:

$$\varphi_i(x) = e^{\alpha_i x^2 + \beta_i x} x^{\alpha_i} \psi\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\psi\left(\frac{1}{x}\right)$  étant une série ordonnée suivant les puissances croissantes de  $\frac{1}{x}$ , mais généralement divergentes.

Soit  $y = f(x)$  une intégrale quelconque de l'équation (1). Posons:

$$u = f(x)f(-x).$$

Il est aisé de voir que  $u$  satisfait   une équation linéaire d'ordre  $n^2$ :

$$(2) \quad Q_{n^2} \frac{d^{n^2} u}{dx^{n^2}} + Q_{n^2-1} \frac{d^{n^2-1} u}{dx^{n^2-1}} + \dots + Q_1 \frac{du}{dx} + Q_0 u = 0$$

où les coefficients  $Q$  sont des polynômes entiers en  $x$ .

Cette équation admettra les  $n^2$  séries normales suivantes:

$$\varphi_1(x)\varphi_1(-x), \varphi_2(x)\varphi_1(-x), \dots, \varphi_n(x)\varphi_1(-x);$$

$$\varphi_1(x)\varphi_2(-x), \varphi_2(x)\varphi_2(-x), \dots, \varphi_n(x)\varphi_2(-x);$$

• • • • • • • • • • • • • • • •

$$\varphi_1(x)\varphi_n(-x), \varphi_2(x)\varphi_n(-x), \dots, \varphi_n(x)\varphi_n(-x);$$

qui sont toutes du 2<sup>d</sup> ordre. Donc les degrés des polynômes  $Q$  iront en croissant de telle façon que le degré de  $Q_{n^2-h}$  ne puisse dépasser celui de  $Q_{n^2}$  de plus de  $h$  unités.

De plus cette équation (2), d'après son mode de formation, ne devra pas changer quand on changera  $x$  en  $-x$ ; d'où il résulte qu'un même polynôme  $Q$  ne pourra contenir que des puissances de  $x$  d'une même parité. Chacun des polynômes  $Q$  sera ou une fonction paire ou une fonction impaire; si  $Q_{n^2}$  est pair,  $Q_{n^2-1}$  sera impair,  $Q_{n^2-2}$  sera pair et ainsi de suite; ce sera le contraire si  $Q_{n^2}$  est impair.

## Posons maintenant:

$$\partial^2 = f$$

nous aurons;

$$\frac{d^p u}{dx^p} = \sum \frac{|p|}{|p-q||2q-p|} (2x)^{2q-p} \frac{d^q u}{dt^q} \quad (q \leq p; p \leq 2q)$$

L'équation (2) qu'on peut écrire:

$$\sum Q_p \frac{d^p u}{d x^p} = 0, \quad (p \geq 0; p \leq n^*)$$

deviendra donc:

$$\sum \sum Q_p (2x)^{2q-p} \frac{|p|}{|p-q|^{2q-p}} \frac{d^q u}{dt^q} = \circ$$

ou bien:

$$\sum R_q \frac{d^q u}{dt^q} = 0$$

les  $R_q$  étant des polynômes définis par la manière suivante:

$$R_q = \sum Q_p (2x)^{2q-p} \frac{|p|}{|p-q||2q-p|}. \quad (p \geq q; p \leq 2q; p \leq n^2)$$

Nous aurons en particulier:

$$R_{n^2} = Q_{n^2} (2x)^{n^2}.$$

Soit  $m$  le degré de  $Q_{n^2}$ ; celui de  $Q_p$  sera au plus égal à  $m + n^2 - p$ . Le degré de  $R_{n^2}$  (en  $x$ ) sera égal à  $m + n^2$ . Le degré de  $Q_p (2x)^{2q-p}$  sera au plus égal à  $m + n^2 + 2q - 2p$ ; mais si l'on observe que  $q - p$  est au plus égal à 0, on verra que le degré de  $Q_p (2x)^{2q-p}$  et par conséquent celui de  $R_q$  est au plus égal à  $m + n^2$ .

Donc le degré d'un quelconque des polynômes  $R_q$  est au plus égal au degré de  $R_{n^2}$ .

Nous pouvons toujours supposer que  $m + n^2$  est pair. Car si cela n'était pas nous multiplierions l'équation (2) par  $x$ , augmentant ainsi  $m$  d'une unité. Alors  $Q_{n^2}$  sera une fonction paire ou impaire selon que  $m$  sera pair ou impair, et par conséquent selon que  $n^2$  sera pair ou impair. De plus les polynômes  $Q_p$  devront être alternativement des fonctions paires ou impaires, d'où il suit que  $Q_p (2x)^{2q-p}$  et par conséquent  $R_q$  est toujours pair.

Si donc on remplace  $x^2$  par  $t$ ,  $R_q$  est un polynôme entier en  $t$ .

L'équation (3) est alors une équation de même forme que (1), mais qui sera de rang 1 et non plus de rang 2, pour employer l'expression du paragraphe 2.

Soit par exemple l'équation:

$$(1') \quad x \frac{d^2 y}{dx^2} - (x^3 + 1)y = 0.$$

Soit  $y_1$  ce qu'on obtient en changeant  $x$  en  $-x$  dans  $y$ ; on aura:

$$x \frac{d^2 y_1}{dx^2} - (x^3 - 1)y_1 = 0.$$

Soit  $u = yy_1$ ; nous désignerons par  $y$ ,  $y'_1$ ,  $u'$ ,  $y''_1$ , etc. les dérivées successives de  $y$ ,  $y_1$  et  $u$ . On obtiendra en tenant compte des équations différentielles:

$$(5') \quad \begin{aligned} u &= yy_1 \\ u' &= y'y_1 + yy'_1 \\ u'' &= 2x^2yy_1 + 2y'y'_1 \\ u''' &= 4xyy_1 + \left(4x^2 + \frac{2}{x}\right)yy'_1 + \left(4x^2 - \frac{2}{x}\right)y'y_1 \\ u^{IV} &= \left(8x^4 + 4 - \frac{4}{x^2}\right)yy_1 + \left(12x - \frac{2}{x^2}\right)yy'_1 + \left(12 + \frac{2}{x^2}\right)y'y_1 + 8x^2y'y'_1. \end{aligned}$$

En éliminant entre ces cinq équations (5') les quatre quantités  $yy_1$ ,  $y'y_1$ ,  $yy'_1$ ,  $y'y'_1$ , on arrive à l'équation:

$$(2') \quad x^2 \frac{d^4u}{dx^4} + x \frac{d^3u}{dx^3} - 4x^4 \frac{d^2u}{dx^2} - 16x^3 \frac{du}{dx} - (8x^2 - 4)u = 0.$$

Il est aisément vérifiable que cette équation est de rang 2.

On trouve ensuite:

$$\begin{aligned} R_4 &= Q_4(2x)^4 = 16x^6 \\ R_3 &= Q_4(2x)^2 \cdot 12 + Q_3(2x)^3 = 56x^4 \\ R_2 &= Q_4 \cdot 12 + Q_3(2x) \cdot 6 + Q_2(2x)^2 = -16x^6 + 24x^2 \\ R_1 &= Q_2 \cdot 2 + Q_1(2x) = -40x^4 \\ R_0 &= Q_0 = -8x^2 + 4 \end{aligned}$$

d'où enfin l'équation:

$$(3') \quad 4t^3 \frac{d^4u}{dt^4} + 14t^2 \frac{d^3u}{dt^3} - (4t^3 + 6t) \frac{d^2u}{dt^2} - 10t^2 \frac{du}{dt} - (2t - 1)u = 0$$

qui, comme on le voit est de rang 1.

L'intégration de l'équation (1) est ainsi ramenée à celle de l'équation (3) qui est de rang 1. On formera donc la transformée de LAPLACE (4) de cette équation (3) et on obtiendra ainsi  $u$  sous la forme d'une intégrale définie.

Comment lorsqu'on connaîtra  $u$  pourra-t-on obtenir  $y$ ?

Appelons  $y_1$  ce que devient  $y$  quand on y change  $x$  en  $-x$ . On trouvera  $n^2 + 1$  équations de la forme suivante:

$$(5) \quad \frac{d^\alpha u}{dx^\alpha} = \sum_{\beta, \gamma} F_{\alpha\beta\gamma} \frac{d^\beta y}{dx^\beta} \frac{d^\gamma y_1}{dx^\gamma}. \quad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, 2, \dots, n^2 \\ \beta = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ \gamma = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{pmatrix}$$

Dans ces équations  $F_{\alpha\beta\gamma}$  désigne une série de fonctions rationnelles en  $x$ .

D'ailleurs naturellement  $\frac{d^\alpha u}{dx^\alpha}$  représente  $u$ . Ces équations sont analogues aux équations (5') écrites plus haut.

Si l'on élimine par un déterminant, entre ces  $n^2 + 1$  équations les  $n^2$  produits

$$(6) \quad \frac{d^\beta y}{dx^\beta} \frac{d^\gamma y_1}{dx^\gamma}$$

on obtiendra l'équation (2). Ne retenons plus maintenant que les  $n^2$  premières équations (5), celles où l'on a pour  $\alpha$  successivement les valeurs:

$$\alpha = 0, 1, 2, \dots, n^2 - 1.$$

On pourra alors résoudre les  $n^2$  équations par rapport aux  $n^2$  produits (6) (comme si ces  $n^2$  produits étaient des variables indépendantes) pourvu toutefois que le déterminant correspondant ne soit pas nul, ce que nous supposerons. Nous nous réservons d'ailleurs de revenir plus loin sur le cas particulier où ce déterminant est nul.

On tirera en particulier:

$$yy_1 \quad \text{et} \quad y_1 \frac{dy}{dx}$$

sous la forme suivante:

$$yy_1 = \Phi_0 u + \Phi_1 \frac{du}{dx} + \Phi_2 \frac{d^2 u}{dx^2} + \dots + \Phi_{n^2-1} \frac{d^{n^2-1} u}{dx^{n^2-1}}$$

$$y_1 \frac{dy}{dx} = \Phi'_0 u + \Phi'_1 \frac{du}{dx} + \dots + \Phi'_{n^2-1} \frac{d^{n^2-1} u}{dx^{n^2-1}}.$$

ce qui donnera enfin:

$$\frac{dy}{y dx} = \frac{\sum \Phi'_p \frac{d^p u}{dx^p}}{\sum \Phi_p \frac{d^p u}{dx^p}}.$$

Si  $u$  est connu, cette équation donnera  $y$  par une simple quadrature.

On peut d'ailleurs obtenir ce résultat d'une infinité de manières; en calculant:

$$y \frac{d^a y_1}{dx^a} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx}, \frac{d^a y_1}{dx^a}.$$

Il n'arrivera pas que toutes ces quantités soient nulles à la fois.

Voyons maintenant ce qu'il faudrait faire si le déterminant était nul et si par conséquent on ne pouvait pas résoudre les équations (5) par rapport aux  $n^2$  produits (6).

Pour le voir, faisons  $n = 2$  et écrivons les équations (5) en reprenant la notation de LAGRANGE

$$(5'') \quad \begin{aligned} u &= yy_1 \\ u' &= y'y_1 + yy'_1 \\ u'' &= Ayy_1 + Byy'_1 + Cy'y_1 + Dy'y'_1 \\ u''' &= A'yy_1 + B'yy'_1 + C'y'y_1 + D'y'y'_1 \end{aligned}$$

$A, B, C, D, A', B', C', D'$  seront des fonctions rationnelles de  $x$  telles que le déterminant

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{array} \right|$$

soit nul. Nous supposerons toutefois que les mineurs du 1<sup>er</sup> ordre ne soient pas tous nuls à la fois. Nous pourrons alors écrire:

$$\begin{aligned} yy' &= u \\ yy'_1 &= \alpha u + \beta u' + \gamma u'' + \delta u''' + \varepsilon y'y'_1 \\ y'y_1 &= \alpha'u + \beta'u' + \gamma'u'' + \delta'u''' + \varepsilon'y'y'_1 \end{aligned}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \text{ etc.}$  étant rationnels en  $x$ . En faisant le produit des deux dernières équations et en y remplaçant  $yy_1$  par  $u$ , on obtient une équation du second degré en  $y'y'_1$ . Il en résulte que  $y'y'_1$  et par conséquent  $yy_1$ ,  $yy'_1$ ,  $y'y_1$  et enfin  $\frac{y'}{y}$  sont des fonctions algébriques de  $x$ ,  $u$ ,  $u'$ ,  $u''$  et  $u'''$ .

Toutes les fois donc que le déterminant:

$$\Sigma \pm F_{\alpha\beta\gamma} \quad \begin{cases} \alpha=0, 1, 2, \dots, n^2-1 \\ \beta=0, 1, 2, \dots, n-1 \\ \gamma=0, 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

sera nul, l'expression

$$\frac{dy}{ydx}$$

sera non plus une fonction rationnelle, mais une fonction algébrique de  $x$ , de  $u$  et de ces dérivées. Donc quand on connaîtra  $u$ , on en déduira  $y$  par une simple quadrature.

Il est facile maintenant d'étendre au cas général ce que nous venons de dire des équations de rang 2. Supposons que (1) soit une équation de rang  $p$  et soit satisfaite par  $n$  séries normales d'ordre  $p$ . Soit:

$$y = f(x)$$

une intégrale quelconque de l'équation (1). Posons:

$$u = f(x)f(\alpha x)f(\alpha^2 x) \dots f(\alpha^{p-1} x)$$

$\alpha$  étant une des racines  $p^{\text{es}}$  primitives de l'unité.

Il arrivera alors que  $u$  satisfera à une équation différentielle linéaire (2) de rang  $p$  et d'ordre  $n^p$  dont les coefficients seront des polynômes en  $x$ . L'équation ne devra pas changer si l'on change  $x$  en  $\alpha x$ . Il en résulte que si l'on écrit cette équation sous la forme:

$$(2) \quad \sum Q_n \frac{d^h u}{dx^h} = \sum A_{hk} x^k \frac{d^h u}{dx^h}$$

on devra avoir

$$k - h \equiv \text{une constante } (\text{mod } p).$$

En multipliant l'équation par une puissance convenablement choisie de  $x$ , on aura alors:

$$k \equiv h \pmod{p}.$$

Faisons maintenant

$$x^p = t.$$

L'équation (2) deviendra par ce changement de variable

$$(3) \quad \sum R_q \frac{d^q u}{dt^q} = 0$$

les  $R_q$  étant des polynômes entiers en  $t$ . Cette équation (3) sera de rang 1.

Supposons qu'on en tire  $u$ ; comment obtiendra-t-on  $y$ ? On obtiendra  $n^p + 1$  équations

$$(5) \quad \frac{d^{\alpha} u}{dx^{\alpha}} = \sum F_{\alpha\beta\gamma\ldots\lambda} \frac{d^{\beta} y}{dx^{\beta}} \frac{d^{\gamma} y_1}{dx^{\gamma}} \cdots \frac{d^{\lambda} y_{p-1}}{dx^{\lambda}}$$

$$(\alpha = 0, 1, 2, \dots, n^p; \beta, \gamma, \dots, \lambda = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Dans ces équations les  $F$  sont des fonctions rationnelles de  $x$  et  $y_q$  désigne la fonction  $f(\alpha^q x)$ .

Des  $n^p$  premières équations (5) on tirera les  $n^p$  produits:

$$\frac{d^{\beta} y}{dx^{\beta}} \frac{d^{\gamma} y}{dx^{\gamma}} \cdots \frac{d^{\lambda} y_{p-1}}{dx^{\lambda}}.$$

Si on considère en effet ces  $n^p$  produits comme des variables indépendantes, les  $n_p$  premières équations (5) seront linéaires par rapport à ces  $n^p$  variables. On pourra donc les résoudre, pourvu que leur déterminant ne soit pas nul.

On obtiendra ainsi:

$$yy_1y_2 \cdots y_{p-1} = \sum \phi_q \frac{d^q u}{dx^q}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} yy_1y_2 \cdots y_{p-1} &= \sum \Phi'_q \frac{d^q u}{dx^q} \\ (q &= 0, 1, 2, \dots, n^p - 1) \end{aligned} \right.$$

les  $\Phi$  étant rationnelles en  $x$ . On en tirera:

$$\frac{dy}{y dx} = \frac{\sum \phi'_q \frac{d^q u}{dx^q}}{\sum \phi_q \frac{d^q u}{dx^q}}$$

de sorte que la dérivée logarithmique de  $y$  est une fonction rationnelle de  $x$ , de  $u$  et de ses dérivées.

Si le déterminant des équations (5) était nul, cette dérivée logarithmique ne serait plus une fonction rationnelle, mais algébrique de  $x$ , de  $u$  et de ses dérivées.

Dans tous les cas, si l'on suppose  $u$  connu,  $y$  s'obtiendra par une simple quadrature.

### § 6. Généralisation des §§ 3 et 4.

Quelle est la condition pour que l'équation (1) envisagée dans le paragraphe précédent, ait une intégrale normale, c'est à dire pour que l'une des séries normales qui y satisfont converge?

Supposons pour fixer les idées que cette équation

$$(1) \quad P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + P_0 y = 0$$

soit de rang 2 et soit

$$e^{ax^2+bx} \varphi(x)$$

une série normale qui y satisfasse; nous allons chercher la condition pour que cette série converge. Si elle converge, il en sera de même de

$$e^{ax^2-bx} \varphi(x)$$

ou encore du produit:

$$S = e^{2at} \varphi(\sqrt{t}) \varphi(-\sqrt{t})$$

où l'on a posé:

$$t = x^2.$$

Mais cette série normale  $S$  qui est du 1<sup>er</sup> ordre, satisfara formellement à l'équation:

$$(3) \quad \sum R_q \frac{d^q u}{dt^q} = 0$$

que l'on formera comme dans le paragraphe précédent, en appelant  $y_1$  ce que devient  $y$  quand on change  $x$  en  $-x$ , et en faisant  $u = yy_1$  et  $t = x^2$ .

Mais cette équation (3) est de rang 1; pour qu'elle admette une intégrale normale, il faut donc et il suffit que sa transformée de LAPLACE (4) admette une intégrale de la forme suivante:

$$v = (z - a)^a G(z)$$

$G(z)$  étant une fonction entière de  $z$ .

Cette condition est donc aussi nécessaire pour que l'équation (1) ait une intégrale normale.

Je dis qu'elle est également suffisante. Supposons en effet qu'elle soit remplie; alors on pourra trouver une intégrale de l'équation (3) qui soit de la forme:

$$(6) \quad u = e^{2at} t^{\lambda} \varphi(t) = e^{2ax^2} x^{2\lambda} \varphi(x^2)$$

$\varphi$  désignant une fonction holomorphe en  $\frac{1}{t}$  pour  $t = \infty$ .

Nous avons vu au paragraphe précédent qu'en supposant que le déterminant des équations (5) ne soit pas nul, on aura:

$$yy_1 = \sum \Phi_q \frac{d^q u}{dx^q}$$

$$\frac{dy}{dx} y_1 = \sum \Phi'_q \frac{d^q u}{dx^q}$$

les  $\Phi$  et les  $\Phi'$  étant rationnels en  $x$ . Si dans ces équations nous remplaçons  $u$  par sa valeur (6), puis que nous les divisions l'une par l'autre, il vient:

$$\frac{dy}{ydx} = 2ax + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} + \frac{e}{x^3} + \dots$$

Car on voit aisément que:

$$\frac{\sum \Phi'_q \frac{d^q u}{dx^q}}{\sum \Phi_q \frac{d^q u}{dx^q}}$$

peut se développer en série suivant les puissances croissantes de  $\frac{1}{x}$ .

On en déduit aisément:

$$y = e^{ax^2+bx} \psi(x) x^c$$

$\psi$  étant une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de  $\frac{1}{x}$ . La condition énoncée plus haut comme nécessaire est donc aussi suffisante.

Elle l'est encore si le déterminant des équations (5) est nul. Il arrive alors que l'on a:

$$\frac{dy}{ydx} = F\left(x, u, \frac{du}{dx}, \dots, \frac{d^{n^2-1}u}{dx^{n^2-1}}\right)$$

$F$  étant l'algorithme d'une fonction algébrique. De plus la fonction  $F$  est homogène et de degré  $\sigma$  par rapport à  $u$ ,  $\frac{du}{dx}, \dots, \frac{d^{n^2-1}u}{dx^{n^2-1}}$ .

Si donc on y remplace  $u$  par son expression (6), l'exponentielle  $e^{2ax^2}$  qui entre dans cette expression disparaîtra, ce qui montre qu'après cette substitution le point  $x = \infty$  sera pour la fonction  $F$  (qui ne dépend plus maintenant que de  $x$  puisqu'on a remplacé  $u$  par une fonction connue de  $x$ ) un point singulier algébrique.

On pourra donc développer  $F$  suivant les puissances décroissantes (entières ou fractionnaires) de  $x$ . Si l'on n'a que des puissances entières, il viendra

$$\frac{dy}{ydx} = 2ax + b + \frac{c}{x} + \dots$$

et on retombera sur le cas précédent. Si au contraire on avait des puissances fractionnaires, on trouverait

$$y = e^{\varphi(x^{\frac{1}{p}})} x^\sigma \psi(x^{-\frac{1}{p}})$$

$\varphi$  étant l'algorithme d'un polynôme entier et  $\psi$  celui d'une fonction holomorphe.

L'équation (1) devrait donc être satisfaite par une série anormale, ce que nous n'avons pas supposé.

On doit donc conclure que la condition énoncée est dans tous les cas nécessaire et suffisante pour qu'une équation de rang 2 ait une intégrale normale et on verrait de la même manière qu'il en est de même pour une équation de rang quelconque.

Supposons maintenant que la série normale que nous envisageons et qui satisfait à l'équation (1) ne soit pas convergente. Soit:

$$S = e^{ax^2+bx} x^\lambda \varphi(x)$$

cette série normale divergente; formons la série:

$$S_1 = e^{ax^2-bx} x^\lambda \varphi(-x)$$

et multiplions ces deux séries membre à membre, nous trouverons:

$$S' = SS_1 = e^{2ax^2} t^\lambda \varphi(\sqrt{t}) \varphi(-\sqrt{t}) \quad (t=x^2)$$

et  $S'$  sera une série normale du 1<sup>er</sup> ordre en  $t$  et qui satisfera formellement à l'équation (3) qui est de rang 1. Cette série  $S'$  représentera alors asymptotiquement une certaine intégrale  $u$  de cette équation d'après ce que nous avons démontré au § 3.

Si l'on pose ensuite:

$$\frac{dy}{ydx} = \frac{\sum \phi'_q \frac{d^q u}{dx^q}}{\sum \phi_q \frac{d^q u}{dx^q}}$$

(les  $\phi$  et les  $\phi'$  ayant même signification que plus haut)  $y$  sera une intégrale de l'équation (1).

Je dis que  $y$  sera représenté asymptotiquement par la série  $S$ .

En effet, on pourra former d'après les règles ordinaires du calcul, les séries suivantes:

$$\sum \phi'_q \frac{d^q S}{dx^q} \quad \text{et} \quad \sum \phi_q \frac{d^q S'}{dx^q}.$$

On obtiendra ainsi deux séries divergentes qui représenteront asymptotiquement.

$$\sum \phi'_q \frac{d^q u}{dx^q} \quad \text{et} \quad \sum \phi_q \frac{d^q u}{dx^q}.$$

Cela demande un mot d'explication; pour établir les égalités asymptotiques:

$$(7) \quad \sum \phi'_q \frac{d^q S'}{dx^q} = \sum \phi'_q \frac{d^q u}{dx^q}; \quad \sum \phi_q \frac{d^q S'}{dx^q} = \sum \phi_q \frac{d^q u}{dx^q}$$

il faut admettre que  $\frac{d^q u}{dx^q}$  est représenté asymptotiquement par  $\frac{d^q S'}{dx^q}$ , de la même manière que  $u$  est représenté par  $S'$ . Or les principes du § 1 ne permettent pas en général de différencier une égalité asymptotique comme une égalité ordinaire.

Mais ici cette difficulté ne peut nous arrêter. En effet  $u$  satisfait à une équation linéaire d'ordre  $n^2$  et de rang 1, qui est l'équation (3).

Il en résulte immédiatement que  $\frac{d^q u}{dt^q}$  doit satisfaire à une équation linéaire (8) qui sera comme l'équation (3) d'ordre  $n^2$  et de rang 1. En raisonnant sur l'équation (8) comme sur l'équation (3), on verrait que

cette équation est satisfaite formellement par une série normale et que cette série représente asymptotiquement une des intégrales de l'équation.

On vérifierait ensuite sans peine que cette intégrale est  $\frac{d^q u}{dt^q}$  et que cette série est  $\frac{d^q S'}{dt^q}$ . On a donc asymptotiquement

$$\frac{d^q u}{dt^q} = \frac{d^q S'}{dt^q}$$

et par conséquent:

$$\frac{d^q u}{dx^q} = \frac{d^q S'}{dx^q}.$$

On a donc aussi asymptotiquement

$$yy_1 = \sum \Phi_q \frac{d^q S'}{dx^q} = e^{2ax^2} (\alpha_0 x^\lambda + \alpha_1 x^{\lambda-1} + \alpha_2 x^{\lambda-2} + \dots)$$

$$\frac{dy}{dx} y_1 = \sum \Phi'_q \frac{d^q S'}{dx^q} = e^{2ax^2} (\beta_0 x^{\lambda+1} + \beta_1 x^\lambda + \beta_2 x^{\lambda-1} + \dots).$$

Il est d'ailleurs aisé de vérifier que:

$$\beta_0 = a\alpha_0.$$

On aura donc asymptotiquement:

$$\frac{e^{-2ax^2}}{\alpha_0 x^\lambda} yy_1 = 1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_0} x^{-1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_0} x^{-2} + \dots = 1 + \Sigma_1$$

$$\frac{e^{-2ax^2}}{\alpha_0 x^\lambda} \frac{dy}{dx} y_1 = ax + \frac{\beta_1}{\beta_0} + \frac{\beta_2}{\beta_0} x^{-1} + \dots = \Sigma_2.$$

Si donc nous posons:

$$\frac{e^{-2ax^2}}{\alpha_0 x^\lambda} yy_1 = 1 + \omega_1$$

$$\frac{e^{-2ax^2}}{\alpha_0 x^\lambda} \frac{dy}{dx} y_1 = \omega_2$$

les fonctions  $\omega_1$  et  $\omega_2$  seront représentées asymptotiquement par les séries  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , et on aura:

$$\frac{dy}{y dx} = \frac{\omega_2}{1 + \omega_1}.$$

Mais

$$\frac{1}{1 + \omega_1} = 1 - \omega_1 + \omega_1^2 - \dots$$

est une fonction holomorphe de  $\omega_1$ , pour  $\omega_1 = 0$ . On peut donc, d'après les principes du § 1 y substituer son expression asymptotique  $\Sigma_1$ , d'après les règles ordinaires du calcul; on obtiendra une série divergente  $\Sigma_3$  qui représentera asymptotiquement  $\frac{1}{1 + \omega_1}$ .

Mais d'après les principes du même paragraphe, nous avons le droit de multiplier les deux égalités asymptotiques:

$$\omega_2 = \Sigma_2$$

$$\frac{1}{1 + \omega_1} = \Sigma_3$$

d'après les règles ordinaires du calcul, ce qui nous donne asymptotiquement

$$\frac{dy}{y} = dx \Sigma_3 \Sigma_2.$$

Si je rappelle en outre que les principes du § 1 nous permettent d'intégrer les égalités asymptotiques comme les égalités ordinaires, j'écrirai:

$$\log y = \int dx \Sigma_3 \Sigma_2$$

ce qui montre que  $\log y$  peut être représenté asymptotiquement par une certaine série que l'on peut former aisément et que nous écrirons:

$$ax^2 + bx + \lambda \log x + \frac{r_1}{x} + \frac{r_2}{x^2} + \dots = ax + b + \lambda \log x + \Sigma_4.$$

Posons alors:

$$y = e^{ax^2+bx} x^\lambda e^\eta$$

$\eta$  sera représenté asymptotiquement par  $\Sigma_4$ . Mais  $e^\eta$  est une fonction holomorphe de  $\eta$  pour  $\eta = 0$ ; j'y puis donc substituer à la place de  $\eta$  son expression asymptotique  $\Sigma_4$ , ce qui donne asymptotiquement

$$y = e^{ax^2+bx} x^\lambda e^{\Sigma_4}.$$

Il en résulte que  $y$  est représenté asymptotiquement par une série de forme normale qui ne peut être différente de  $S$ .

L'égalité asymptotique

$$y = S$$

est donc démontrée.

Mais il convient d'observer que toutes les intégrales de l'équation linéaire (2) ne peuvent pas être regardées comme le produit d'une intégrale  $y$  de l'équation (1) par ce que devient cette même intégrale lorsqu'on change  $x$  en  $-x$ , ni même comme le produit d'une intégrale  $y$  de l'équation (1) par une intégrale  $y_1$  de l'équation (1') obtenue en changeant  $x$  en  $-x$  dans l'équation (1). Cette propriété n'appartient qu'à certaines intégrales particulières de l'équation (2).

Il résulte de là que si l'on tire  $y$  de l'égalité:

$$(8) \quad \frac{dy}{ydx} = \frac{\sum \phi'_q \frac{d^q u}{dx^q}}{\sum \phi_q \frac{d^q u}{dx^q}}$$

la valeur de  $y$  ainsi obtenue ne sera une intégrale de l'équation (1) que si l'on a choisi pour  $u$  certaines intégrales particulières de l'équation (2). Parmi ces intégrales particulières on peut toutefois en trouver  $n^2$  qui sont linéairement indépendantes.

Il est aisément de voir que parmi les intégrales de l'équation (2) il y en a une (que j'appellerai  $u_1$ ), qui est représentée asymptotiquement par une série normale  $S_1$ , (en supposant par exemple, pour fixer les idées, que  $x$  croisse indéfiniment par valeurs réelles positives) et qui est telle qu'on en puisse trouver  $n^2 - 1$  autres dont le rapport à  $u_1$  tende vers 0 quand  $x$  croît indéfiniment.

En appelant  $u_2, u_3, \dots, u_{n^2}$  ces  $n^2 - 1$  intégrales, on aura:

$$\lim \frac{u_2}{u_1} = 0, \quad \lim \frac{u_3}{u_1} = 0, \quad \dots, \quad \lim \frac{u_{n^2}}{u_1} = 0.$$

L'intégrale générale de l'équation (2) sera alors de la forme:

$$A_1 u_1 + A_2 u_2 + \dots + A_{n^2} u_{n^2}$$

et elle sera représentée asymptotiquement par la série  $A_1 S_1$  pourvu que  $A_1$  ne soit pas nul. Ainsi l'intégrale la plus générale de l'équation (2) sera représentée asymptotiquement par une série normale.

Considérons maintenant, non plus l'intégrale la plus générale de l'équation (2), mais la plus générale parmi celles qui substituées à  $u$  dans l'équation (8) donnent pour  $y$  une intégrale de l'équation (1). Si l'on veut qu'il en soit ainsi, on ne peut pas choisir les constantes d'intégration  $A_1, A_2, \dots, A_n$  d'une façon arbitraire; il faut qu'il y ait entre elles certaines relations quadratiques (9). Mais quand même on suppose que ces équations quadratiques (9) sont satisfaites,  $A_1$  ne sera pas nul en général. Donc l'intégrale de l'équation (2) la plus générale parmi celles qui satisfont aux relations (9) est encore représentée asymptotiquement par une série normale.

Il suit de là et des raisonnements développés plus haut, que l'intégrale *la plus générale* de l'équation (1) sera représentée asymptotiquement par une série normale.

C'est dans ce sens que les résultats du § 3 peuvent être regardés comme généralisés.

Le raisonnement qui précède s'applique encore si, le déterminant des équations (5) étant nul, l'expression  $\frac{dy}{ydx}$  n'est plus une fonction rationnelle mais algébrique de  $x$ , de  $u$  et de ses dérivées. Ce raisonnement est fondé en effet sur ce principe, démontré au § 1, que toutes les opérations du calcul sont applicables aux égalités asymptotiques, si l'on excepte la différentiation. Il n'est pas permis en général de différentier une égalité asymptotique. Mais d'après ce que nous avons vu plus haut, dans le cas particulier où  $u$  est une intégrale d'une équation linéaire, il est permis de différentier l'égalité asymptotique

$$u = S.$$

Il ne se présente donc aucune difficulté.

Il n'y aurait rien à changer aux développements qui précèdent, si l'équation (1) au lieu d'être de rang 2 était de rang quelconque.

Les résultats des §§ 3 et 4 peuvent donc s'étendre au cas le plus général, avec les restrictions énoncées plus haut.

Je puis donc énoncer le résultat suivant qui sera la conclusion de ce mémoire.

L'intégrale la plus générale d'une équation de rang quelconque est représentée asymptotiquement par une des séries normales qui satisfont formellement à cette même équation.

Il peut y avoir exception si l'équation admet des séries anormales.

Paris, 7 Février 1886.

---

## LES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE

À UN NOMBRE QUELCONQUE DE PÉRIODES

(Premier Mémoire<sup>1</sup>)

PAR

F. CASORATI.

à PAVIE.

## § 1.

Lorsque j'étudiai, il y a longtemps, le célèbre Mémoire: *De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur* publié par JACOBI en 1835 (Journal de CRELLE, T. 13), je n'y ai pas trouvé de raisons suffisantes pour regarder comme impossible l'inversion des intégrales Abéliennes, une à une, et, plus en général, pour regarder comme absurde la périodicité plus que double dans les fonctions analytiques d'une seule variable. L'admiration, que je ressentais pour le grand géomètre, et l'importance de la question m'engagèrent à insister sur ce point, dans l'espoir que, à l'aide des principes de la variabilité complexe, j'aurais pu parvenir à l'honneur de l'éclaircir.

JACOBI a démontré rigoureusement que, trois grandeurs  $\omega$ ,  $\omega'$ ,  $\omega''$  étant données, on peut, en général, choisir des nombres entiers  $m$ ,  $m'$ ,  $m''$  de manière que le module de

$$m\omega + m'\omega' + m''\omega''$$

soit moindre qu'une grandeur donnée, si petite qu'elle soit.

Cette proposition, pour ainsi dire, arithmétique, transportée dans la théorie des fonctions, fait voir immédiatement qu'il ne peut pas exister

<sup>1</sup> Ce premier Mémoire est la reproduction, corrigée par l'auteur, d'une brochure imprimée à Milan en 1885, et sert d'introduction au Mémoire plus étendu qui suit, et qui était inédit.

de fonctions *uniformes* ayant plus de deux périodes.<sup>1</sup> Mais qu'est-ce qu'elle nous dit par rapport aux fonctions non uniformes? C'est la demande que je me suis faite à un certain point du Mémoire du tome 13.

Pour les fonctions ayant un nombre fini de valeurs pour chaque valeur de la variable on fait bien aisément la même conclusion que pour les fonctions uniformes. Mais pour les fonctions ayant une *infinité de valeurs* (j'entends, toujours, pour chaque valeur de la variable), une conclusion n'était pas aussi facile à atteindre.

C'est pour cela que j'ai entrepris l'analyse de quelques équations différentielles très simples, dont chaque intégrale devait admettre une infinité de valeurs et posséder une périodicité qui serait impossible dans une fonction uniforme. J'ai trouvé que ces intégrales, bien loin d'être absurdes ou de ne pas posséder les caractères de fonctions analytiques, non seulement se comportaient comme les fonctions analytiques les plus usuelles dans le voisinage de chaque valeur particulière de la variable (ce que le théorème de CAUCHY sur l'existence des fonctions intégrales nous apprenait bien déjà); mais aussi, qu'elles pouvaient être continuées de proche en proche indéfiniment, sans obstacles, comme les dites fonctions.

Alors je présentai une partie de ces recherches à l'Académie des sciences de Paris, qui les faisait imprimer dans ses Comptes rendus de décembre 1863 et janvier 1864. Je ne manquais pas de dire que, en affirmant l'absurdité de la périodicité multiple, JACOBI *n'avait probablement en vue que la classe de fonctions de laquelle font partie les fonctions circulaires et elliptiques*,<sup>2</sup> c'est-à-dire, la classe des fonctions uniformes. Mais j'avais dû aussi faire remarquer que la limite supérieure  $Z^3$  de l'intégrale

$$z = \int_0^Z \frac{\alpha + \beta Z}{\sqrt{Z(1-Z)(1-z^2Z)(1-\lambda^2Z)(1-\mu^2Z)}} dZ$$

*n'était pas monodrome* (lisez uniforme), ni avait un nombre fini de valeurs.

<sup>1</sup> Deux périodes aussi seraient impossibles (§ 1 du Mémoire de JACOBI) dans une fonction uniforme, si leur rapport devait être réel et incommensurable. Lorsque nous dirons *périodicité multiple que l'on croit absurde*, on doit y comprendre aussi le cas de deux périodes en rapport réel et incommensurable entre elles.

<sup>2</sup> Comptes rendus, T. 57, p. 1019.

<sup>3</sup> Comptes rendus, T. 58, p. 207. — Cette fonction  $Z$  s'y trouve désignée aussi par  $\phi(z)$ .

J'ai pensé que JACOBI n'avait pas soupçonné l'existence d'une infinité de valeurs pour cette fonction; car, en cas contraire, il n'aurait pas appliqué sa conclusion (*functio tripliciter periodica non datur*) à cette limite Z, et détourné les géomètres de toute recherche sur les fonctions (d'une seule variable) inverses des intégrales.<sup>1</sup>

Bien que publiées dans un recueil très répandu, mes recherches n'eurent pas le bonheur d'attirer l'attention des géomètres.<sup>2</sup> On continua de croire à l'absurdité *absolue* de la périodicité multiple pour les fonctions analytiques d'une seule variable.

Des causes étrangères à la science m'ont éloigné ensuite de cette question. Cependant, je ne savais douter des résultats que j'avais obtenus, et je pensais que l'usage des variables complexes s'étendant toujours plus, et les conséquences de cette croyance erronée s'accumulant et s'aggravant de plus en plus, le moment serait venu, où j'aurais pu rappeler avec plus de succès l'attention bienveillante des savants sur ma thèse de 1863.

Ce moment me paraît à présent arrivé. M. FUCHS, l'éminent géomètre auquel la doctrine des équations différentielles doit tant de progrès, s'appuyant sans soupçon sur l'interprétation dominante du Mémoire de JACOBI, commence d'en tirer les conséquences les plus immédiates à l'égard des équations différentielles.<sup>3</sup> En rappelant que le résultat de JACOBI peut s'énoncer en disant que *les intégrales de l'équation*

$$(a) \quad \frac{dx}{du} = \sqrt{R(x)},$$

où R(x) est une fonction entière de degré supérieur à 4, ne peuvent pas être regardées comme des fonctions analytiques de u, il ajoute: *Es ist aber ein für die Grundlagen der Theorie der Differentialgleichungen wesentlicher Umstand dass es auch unter den Differentialgleichungen jeder Ordnung und*

<sup>1</sup> Il est, au reste, presque superflu de remarquer que l'étude de ces fonctions ne va pas amoindrir mais augmenter la haute valeur des résultats déjà acquis dans la direction tracée par JACOBI.

<sup>2</sup> Quelques fautes d'impression en rendaient, peut-être, la lecture difficile dès le premier paragraphe. L'obscurité de l'auteur aura fait le reste.

<sup>3</sup> Voir sa communication du 15 janvier 1885 à l'Académie des sciences de Berlin, sous le titre: *Über den Charakter der Integrale von Differentialgleichungen zwischen complexen Variablen.*

jeden Grades, welche nicht nur Transformationen von ( $\alpha$ ) sind, Classen solcher Art gibt, welche zwischen der unabhängigen und abhängigen Veränderlichen keine funktionale Beziehung im gewöhnlichen Sinne des Wortes festsetzen, so lange jene Veränderlichen komplexe Werthe annehmen dürfen.

Il me semble que la gravité de ces conséquences peut bien faire désirer un nouvel examen de leur source.

## § 2.

Rien de plus facile aujourd’hui que de vérifier sur le Mémoire même de JACOBI l’exactitude de mes remarques. Mais je laisse de côté maintenant toute autre observation rétrospective et je prie mes collègues, et en particulier M. FUCHS, dont je connais l’affabilité comme j’admire les talents, d’avoir la bonté de lire ce peu de pages, où je présente le commencement de mes recherches<sup>1</sup> d’une manière qui me paraît extrêmement claire et facile.<sup>2</sup> En 1863 je n’avais pas connaissance de ces lieux représentatifs des fonctions et de leurs transformations conformes, qui aujourd’hui sont devenus beaucoup plus familiers. Avec leur secours, l’intuition et l’étude de ces fonctions périodiques, que l’on croit impossibles ou trop étranges, deviennent aussi faciles que pour les fonctions usuelles.

Je commence par expliquer mon procédé, et les dénominations qui s’y rattachent, sur une de ces transcendantes que l’on dit élémentaires.<sup>3</sup> Je prends la fonction  $Z$  définie par l’équation

$$\frac{AdZ}{Z-a} - dz = 0,$$

<sup>1</sup> Ne s’agissant ici que de la question de possibilité de la périodicité multiple dans les fonctions analytiques, je ne considère que deux cas très-simples; l’un bien connu à une période et l’autre à deux périodes. Le lecteur verra de lui-même, assez clairement pour notre but, ce qu’il arrive dans tout autre cas.

<sup>2</sup> Mon exposition paraîtra même trop développée. C’est que j’ai voulu être facile aussi pour d’autres lecteurs moins exercés.

<sup>3</sup> J’entre dans beaucoup de détails relativement à ce cas connu, afin d’être clair et bref dans le cas successif.

avec la condition initiale  $Z = 0$  pour  $z = 0$ .<sup>1</sup> C'est la fonction inverse de l'intégrale

$$(1) \quad z = \int_0^Z \frac{A}{Z-a} dZ,$$

ou bien la fonction  $Z$  implicite dans l'équation  $z = A \log \left( 1 - \frac{Z}{a} \right)$ . Nous savons que cette fonction n'est autre chose que l'exponentielle

$$Z = a \left( 1 - e^{\frac{z}{A}} \right);$$

mais nous voulons l'étudier, sans rien savoir, à l'aide de l'équation différentielle ou de l'équation (1).

Le second membre de cette équation a une infinité de valeurs pour chaque valeur de  $Z$ . Pour le rendre monodrome par rapport à  $Z$ , nous savons qu'il suffit d'empêcher  $Z$  d'accomplir des tours autour du point  $a$ .<sup>2</sup> À cet effet et pour notre but, il convient d'envisager comme lieu du point  $Z$  une surface étendue sur le plan  $Z$ , recouvrant partout ce plan une seule fois, et coupée suivant une ligne (droite, si l'on veut) allant du point  $a$  à l'infini. Je nomme cette surface la *surface monodromique* pour l'intégrale (1). Chaque point de cette surface est censé représenter la même valeur de  $Z$  que le point qui lui est au-dessous dans le plan  $Z$ . Mais nous devons aussi imaginer que l'on dépose en chaque point de cette surface la valeur de l'intégrale, c'est-à-dire la valeur de  $z$  donnée par l'intégration de la différentielle

$$\frac{A}{Z-a} dZ$$

le long d'un chemin conduisant d'une manière quelconque dans cette surface du point  $Z = 0$  au point envisagé. Chaque point de la surface

<sup>1</sup> Cette condition, que j'ajoute pour fixer les idées, ici comme dans la suite, n'entame en rien la nature de la recherche. Si l'on fixait un autre système  $z_0, Z_0$  de valeurs initiales, on reviendrait au premier en posant  $z = z_0 + z'$ ,  $Z = Z_0 + Z'$ ;  $z'$  et  $Z'$  étant les nouvelles variables.

<sup>2</sup> J'emploie la représentation usuelle des valeurs d'une variable complexe par les points d'un plan. Le point  $a$  est donc le point du plan  $Z$  qui représente la valeur  $a$  de  $Z$ . Il en est de même pour  $z$  et pour le plan  $z$ .

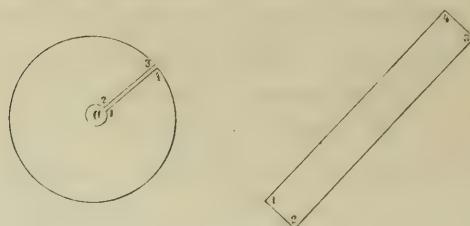
monodromique *portera* donc (pour ainsi dire) un couple de valeurs correspondantes de  $z$  et  $Z$ .<sup>1</sup>

Je transporte la surface ainsi *chargée* sur le plan  $z$ , en l'y étendant de manière que chaque valeur de  $z$  tombe au-dessus du point qui la représente dans le plan  $z$ . J'appelle la surface ainsi transformée *lieu fondamental* de la fonction  $Z$ , sur le plan de la variable indépendante  $z$ .<sup>2</sup>

Dans notre cas, tout le monde sait que ce *lieu* recouvre une bande infinie de plan  $z$  contournée par deux lignes congruentes, ayant entre elles la différence  $A \cdot 2\pi i$ .<sup>3</sup> Mais je vais chercher la forme de ce lieu, comme si elle nous était inconnue. Pour faire cette recherche, il n'est pas nécessaire de déterminer beaucoup de choses relativement à la transformation que subit la *surface monodromique* en devenant *lieu fondamental*. Il suffit de déterminer la transformée du contour, et de plus, dans les cas successifs, les positions que viennent prendre certains points singuliers.

J'envisagerai la surface monodromique comme bornée à l'infini par

Fig. 1 (sur le plan  $Z$ ). Fig. 1' (sur le plan  $z$ ).



un cercle.<sup>4</sup> Partant, son contour sera formé par ce cercle, par un cercle infiniment petit (fig. 1) autour du point  $a$ , et par deux lignes  $2 \dots 3$  et  $1 \dots 4$ , qui sont les bords, droit et gauche, de la coupure imaginée.

Pour trouver la transformée de ce contour, faisons-le parcourir par  $Z$ , dans sa direction positive,<sup>5</sup> et cherchons le chemin correspondant de  $z$  sur le plan  $z$ .

<sup>1</sup> Nous concevons ce point et son couple comme indissolublement liés entre eux dorénavant.

<sup>2</sup> Les figures dans ce lieu sont, comme on sait, des représentations conformes des figures correspondantes dans la surface monodromique.

<sup>3</sup> Je dis que deux lignes ou figures sont congruentes entre elles lorsque l'une peut venir coïncider avec l'autre par une simple translation. Et dans notre plan  $z$ , je dirai que la différence (de position)  $M - N$  de deux figures congruentes  $M$  et  $N$  est une certaine quantité complexe lorsque cette quantité exprime en grandeur et en direction la plus petite translation par laquelle  $N$  peut aller coïncider avec  $M$ .

<sup>4</sup> Si au plan  $z$  on substituait la sphère  $z$ , ce cercle infiniment grand serait conçu comme un cercle infiniment petit autour du point  $z = \infty$ .

<sup>5</sup> Je conserve les définitions, que je crois usuelles, de *direction positive d'un contour*

Nous désignerons par  $z_1, Z_1; z_2, Z_2$ ; etc., les valeurs des variables dans les points marqués 1, 2, etc. dans la surface monodromique comme dans le lieu fondamental.

$Z$  partant du point marqué 1 dans fig. 1 et décrivant le petit cercle 1..2,  $z$  partira du point marqué 1 dans fig. 1', qui représente le lieu fondamental, et décrira la droite 1..2.<sup>1</sup> La différence  $z_2 - z_1$  étant le résultat de l'intégration de la différentielle

$$\frac{A}{Z-a} dZ$$

pendant le tour négatif de  $Z$  autour de  $a$ , on aura

$$z_2 - z_1 = -A \cdot 2\pi i.$$

De même, lorsque  $Z$  décrira le grand cercle 3..4,  $z$  décrira la droite 3..4 de fig. 1'; et l'on aura  $z_4 - z_3 = A \cdot 2\pi i$ .

$Z$  décrivant la ligne 2..3,  $z$  décrira une ligne correspondante 2..3.<sup>2</sup> Enfin, quant à la quatrième portion 4..1 du contour, je remarque que, si  $Z$  partait de 1 pour aller à 4,  $z$  décrirait (sur le plan  $z$ ) une ligne 4..1 congruente de la ligne 2..3 décrise auparavant; car l'intégration de la différentielle sur les deux bords de la coupure donnerait mêmes résultats. Mais  $Z$  devant parcourir toute portion du contour dans la

et de *tour positif* autour d'un point adoptées aussi dans ma *Teorica delle funzioni di variabili complesse* (§ 70). Ici,  $Z$  décrira *positivement* le contour, si en partant du point 1, elle ira successivement aux points 2, 3, 4, 1.

<sup>1</sup> Je rappelle que, pendant ce mouvement, on peut poser  $Z-a=re^{i\theta}$ ,  $dZ=re^{i\theta}id\theta$ ,  $dz=aid\theta$ .

Si, ayant fixé un point 1 dans la fig. 1, on voulait déterminer le point 1 correspondant dans la fig. 1', on ferait marcher  $Z$  de son 0 au point 1 par tel chemin que l'on veut dans la fig. 1, et l'on déterminerait le chemin correspondant de  $z$  dans la fig. 1' par les valeurs successives de l'intégrale (1).

<sup>2</sup> N'importe ici de préciser la nature géométrique de ces lignes. Cependant, si l'on veut imaginer que la coupure soit faite suivant une droite, la ligne 2..3 sera dans la surface monodromique une droite issue du point  $a$ , et l'on pourra poser

$$Z-a=re^{i\theta}, \quad dZ=e^{i\theta}dr.$$

Alors la différentielle à intégrer devient  $dz=A\frac{dr}{r}$ ; ce qui nous dit que la ligne 2..3 dans le lieu fondamental est une droite ayant la direction déterminée par l'argument de la grandeur complexe  $A$ .

direction positive, elle partira de 4 pour aller à 1. Alors  $z$  décrira en sens contraire la dite ligne congruente.

Le lieu fondamental est donc la bande parallélogrammique exprimée par la fig. 1'; dont les côtés 1..2 et 3..4 doivent être éloignés à l'infini respectivement dans les directions de  $-A$  et  $A$ ,<sup>1</sup> si l'on veut qu'ils correspondent aux deux cercles dans leur état limite.<sup>2</sup>

Quant à la distribution des valeurs de  $Z$  dans ce lieu, il nous suffit de remarquer que ces valeurs sont égales entre elles dans chaque couple de points correspondants<sup>3</sup> des côtés 2..3 et 1..4. Cette égalité, qui dans la surface monodromique est en évidence, exprime la périodicité de  $Z$ , comme fonction de  $z$ .

On peut remarquer aussi que, la bande parallélogrammique tendant à son état limite, les valeurs de  $Z$  en 1..2 tendent à devenir égales à  $a$ , en 3..4 à devenir infinies, en restant partout à l'intérieur finies et bien déterminées.

### § 3.

Prenons maintenant la fonction  $Z$  définie par l'équation

$$\left( \frac{A}{Z-a} + \frac{B}{Z-b} \right) dZ - dz = 0,$$

avec la condition initiale  $Z = 0$  pour  $z = 0$ . C'est la fonction inverse de l'intégrale

$$(2) \quad z = \int_0^z \left( \frac{A}{Z-a} + \frac{B}{Z-b} \right) dZ,$$

<sup>1</sup> Par *direction de A* on entend celle de la droite qui va du point 0 au point  $A$ . Les droites *perpendiculaires à A* ont la direction de  $Ai$  ou de  $-Ai$ .

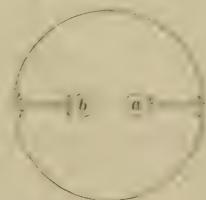
<sup>2</sup> C'est-à-dire, lorsque le petit cercle sera réduit au point  $a$ , et l'autre sera infinitégralement grand. Au reste, si les cercles n'étaient pas à l'état limite, la transformée de fig. 1 serait toujours une bande parallélogrammique, mais finie. Car les deux bords de la coupure se transforment toujours dans deux lignes congruentes, ayant entre elles la différence  $A, 2\pi i$ .

<sup>3</sup> C'est-à-dire de points qui ont entre eux la même différence de position que les deux côtés.

ou la fonction implicite dans l'équation

$$z = A \log \left( 1 - \frac{Z}{a} \right) + B \log \left( 1 - \frac{Z}{b} \right).$$

L'intégrale (2) a, comme on sait, une double infinité de valeurs pour chaque valeur de  $Z$ , à cause des multiples arbitraires des deux périodes  $A \cdot 2\pi i$  et  $B \cdot 2\pi i$ . Mais on la réduit monodrome en empêchant  $Z$  de tourner autour des points  $a$  et  $b$ . À cet effet, nous concevons comme lieu du point  $Z$  une surface étendue sur le plan  $Z$  et coupée suivant deux lignes allant des points  $a$  et  $b$  à l'infini (fig. 2).<sup>1</sup> Cette surface, dont chaque point est censé porter la valeur de  $Z$  avec la valeur correspondante de l'intégrale (2), est notre *surface monodromique* pour cette intégrale.

Fig. 2 (sur le plan  $Z$ ).

Transportons cette surface sur le plan  $z$ . Il en résulte un certain *lieu fondamental*. Quel est son contour?

Pour le reconnaître, faisons marcher  $Z$  sur le contour de fig. 2 en direction positive, et voyons quel est le chemin correspondant de  $z$  sur le plan  $z$ .

$Z$  marchant sur le cercle  $1 \dots 2$ ,  $z$  marche sur une droite parallèle à  $-A \cdot 2\pi i$ . Car, le cercle  $1 \dots 2$  étant inf. petit, l'intégration du second terme

$$\frac{B}{Z-b} dZ$$

de la différentielle ne donne qu'un contribut inf. petit, et il suffit de considérer l'intégration du premier terme

$$\frac{A}{Z-a} dZ.$$

$Z$  parvenant au point  $2$ , on aura  $z_2 - z_1 = -A \cdot 2\pi i$ .

Semblablement, lorsque  $Z$  décrira le cercle  $5 \dots 6$ ,  $z$  décrira une droite congruente à  $-B \cdot 2\pi i$ .

$Z$  marchant sur une des portions,  $3 \dots 4$  ou  $7 \dots 8$ , du grand cercle,

<sup>1</sup> Cette figure et le lieu fondamental correspondant se rapportent au cas particulier, où  $a = 1$ ,  $b = -1$ ,  $A = 1$ ,  $B = i$ , avec les coupures suivant l'axe réel. Mais le discours est tout-à-fait général. Toutes ces figures, d'ailleurs, sont purement schématiques.

$z$  marchera sur une droite parallèle à  $(A + B)2\pi i$ . Car, pendant cette marche, on peut poser

$$Z = Re^{i\theta}, \quad dZ = Re^{i\theta}id\theta,$$

d'où

$$dz = \left( \frac{A}{1 - \frac{a}{Z}} + \frac{B}{1 - \frac{b}{Z}} \right) id\theta,$$

c'est-à-dire, en négligeant les rapports de  $a$  et  $b$  à  $Z$ ,

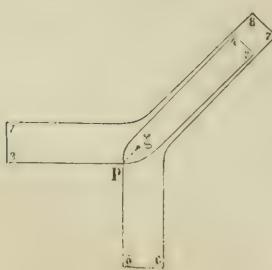
$$dz = (A + B)id\theta.$$

Venons enfin aux bords des coupures. Pendant que  $Z$  décrira les bords  $2..3$  et  $8..1$ ,  $z$  décrira deux portions de contour du lieu fondamental congruentes l'une de l'autre prise en sens contraire. Même chose, lorsque  $Z$  décrira les bords  $4..5$  et  $6..7$ .

Le contour de notre *lieu fondamental* sera donc formé comme il est exprimé schématiquement par la fig. 2'. Les portions de contour  $1..2$  et  $5..6$ , congruentes de  $-A.2\pi i$  et  $-B.2\pi i$ , et les portions  $3..4$  et  $7..8$ , dont la somme est congruente à  $(A + B)2\pi i$ , doivent être imaginées à l'infini dans les directions de  $-A$ ,  $-B$ ,  $A + B$ .

Dans son *lieu fondamental*, la fonction  $Z$  aura même valeur dans les points correspondants des deux côtés congruents  $2..3$  et  $1..8$ , dont la différence de position est la période  $A.2\pi i$ ; et aura, semblablement, des valeurs égales entre elles dans les points correspondants des côtés  $4..5$  et  $7..6$ , dont la différence de position est  $B.2\pi i$ . On peut remarquer aussi que notre fonction aura la valeur  $a$  en  $1..2$ , la valeur  $b$  en  $5..6$ , la valeur  $\infty$  en  $3..4$  et  $7..8$ ; et partout ailleurs une valeur finie et bien déterminée. Tout cela comme dans le cas (1).

Fig. 2' (sur le plan  $z$ ).



Mais un fait se présente ici qui ne pouvait se présenter auparavant; c'est que le *lieu fondamental* ne recouvre pas *une seule fois partout* la portion de plan  $z$  sur laquelle il s'étend. Ce lieu dans l'étendue  $P34P$  (fig. 2') recouvre deux fois le plan  $z$ , ou, en d'autres termes, est constitué par deux couches. Il y a ici un point de ramification  $\zeta$  qui appartient aux deux couches, et

autour duquel les deux couches se continuent l'une dans l'autre, le long d'une ligne  $\zeta P$ ,<sup>1</sup> comme les couches des surfaces Riemanniennes qui servent à représenter les fonctions algébriques.

Quelles sont les valeurs de  $Z$  et  $z$  en  $\zeta$ ? Il faut se rappeler le théorème de CAUCHY, qui nous assure que, jusqu'à ce que le coefficient différentiel

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{(Z-a)(Z-b)}{(A+B)Z - (Ab+Ba)}$$

demeure synéctique, la fonction intégrale  $Z$  se comporte elle-même en fonction synéctique. Notre fonction ne peut donc cesser d'être synéctique, par rapport au plan  $z$ , qu'autour du point où

$$Z = \frac{Ab+Ba}{A+B}.$$

Voilà la valeur de  $Z$  dans le point de ramification. La valeur de  $z$  s'obtiendra par l'intégration de

$$\left( \frac{A}{Z-a} + \frac{B}{Z-b} \right) dZ,$$

depuis la valeur 0 jusqu'à celle que nous venons de trouver, le long d'un chemin tracé comme on veut dans la surface monodromique. Je poserai pour abréger:

$$(3) \quad \frac{Ab+Ba}{A+B} = \eta, \quad \int_0^\zeta \left( \frac{A}{Z-a} + \frac{B}{Z-b} \right) dZ = \zeta.$$

Après un tour autour de  $\zeta$  dans le lieu fondamental on revient à la même valeur de  $z$  mais non pas à la même valeur de  $Z$ ; ce n'est qu'après deux tours que l'on retrouve la même valeur de  $Z$ . Analytiquement, cela signifie que, autour de  $\zeta$ , notre fonction  $Z$  ne peut pas s'exprimer par une série de puissances entières et positives de  $z-\zeta$ ; cependant, elle s'y exprime par les puissances entières et positives de  $(z-\zeta)^{\frac{1}{2}}$ . D'ailleurs, autour de tout autre point (où  $z=z_0$ ), c'est bien par les puissances entières et positives de  $z-z_0$  qu'elle peut s'exprimer. *Notre fonction  $Z$  est donc une fonction analytique, aussi bien que l'exponentielle considérée auparavant et les autres fonctions analytiques usuelles.*

---

<sup>1</sup> Ligne que je dis *de passage*, et qui dans fig. 2' est désignée par des traits.

Nous allons maintenant remarquer un second fait, dépendant du premier, qui ne se présente pas dans la représentation des fonctions périodiques uniformes.

Dans le cas de la fonction uniforme considérée auparavant (fig. 1 et 1') nous savons que, pour en concevoir la continuation en dehors du lieu fondamental, on n'a qu'à imaginer un autre lieu congruent au fondamental, chargé des mêmes valeurs de  $Z$  dans les points homologues, et joint au lieu fondamental le long du bord 2..3 ou 4..1. En continuant de joindre aux nouveaux lieux d'autres lieux toujours congruents et également chargés, on ira recouvrir tout le plan  $z$ . Mais on le recouvre une seule fois, ce qui exprime que cette fonction périodique est *uniforme*.

Dans le cas de la fonction définie par l'équation (2), on peut en concevoir la continuation de la même manière. La fonction a les périodes

$$A. 2\pi i \text{ et } B. 2\pi i.$$

Dans le lieu fondamental l'existence de ces périodes se traduit, comme on a vu, dans l'égalité des valeurs de  $Z$  le long des côtés (fig. 2) 2..3 et 1..8, 4..5 et 7..6. Maintenant, on pourra donc imaginer quatre lieux congruents et joints au lieu fondamental, le long respectivement des quatre côtés que nous venons de nommer. A chacun de ces lieux on pourra en ajouter trois autres nouveaux, et ainsi de suite. Bien entendu, ces lieux congruents doivent porter toujours les mêmes valeurs de  $Z$  également distribuées.<sup>1</sup> De cette manière on recouvrira peu à peu le plan  $z$ , comme dans le cas de la fonction uniforme. Mais le fait nouveau, qu'il faut remarquer à présent, est que chaque lieu peut empiéter plus ou moins sur les lieux contigus. Par conséquent, le nombre des couches sur un même point du plan  $z$  pourra croître indéfiniment. Et si, envisageant ensemble tous ces lieux, l'on se permet de passer de l'un à l'autre tel nombre de fois que ce soit, et par conséquent aussi de traverser tel nombre de fois que ce soit les lignes de passage d'une à autre couche

<sup>1</sup> A ces lieux on peut concevoir qu'il correspond, sur le plan  $Z$ , autant de surfaces monodromiques superposées l'une à l'autre et se continuant l'une dans l'autre le long de leurs bords 2..3, 1..8, 4..5, 7..6. Mais il est superflu maintenant de considérer cette correspondance.

(lignes homologues de  $\zeta P$ ), alors on pourra revenir au dessus d'un même point du plan  $z$  dans des couches toujours nouvelles et dans des positions non homologues des précédentes, où l'on trouvera des valeurs toujours nouvelles pour  $Z$ . Voilà donc que notre fonction sera en même temps doublement périodique, monodrome dans la surface constituée par tel nombre que ce soit de lieux congruents, et  $\infty$ -drome par rapport au plan  $z$ , c'est-à-dire, admettant une infinité de valeurs pour chaque valeur de  $z$ .

#### § 4.

Qu'il me soit permis d'ajouter quelques remarques à ce que je viens de dire sur l'équation (2), bien qu'elles paraîtront superflues pour le simple but de ce Mémoire. C'est ce que je ferai en considérant le cas particulier où le rapport des deux périodes devient réel et incommensurable.<sup>1</sup>

Parmi les fonctions que j'avais étudiées en 1863, j'avais choisi pour les Comptes rendus celle qui est définie par l'équation

$$(4) \quad z = \int_0^Z \left( \frac{1}{Z-1} - \frac{\sqrt{2}}{Z-2} \right) dZ$$

<sup>1</sup> Si le rapport des périodes devenait commensurable, le nombre des positions non homologues (dont on vient de parler) resterait fini. La fonction serait simplement périodique, mais non pas uniforme, si les points de diramation ne disparaissent pas. Si l'on voulait remonter à l'équation (2), en y faisant  $A \cdot 2\pi i = \mu\omega$  et  $B \cdot 2\pi i = \nu\omega$ , où  $\mu$  et  $\nu$  désignent des nombres entiers premiers entre eux, on obtiendrait par l'intégration

$$e^{\frac{2\pi i}{\omega} z} = \left( 1 - \frac{Z}{a} \right)^{\mu} \left( 1 - \frac{Z}{b} \right)^{\nu}.$$

Si  $n$  est le degré en  $Z$  de cette équation, on pourra donc, en effet, représenter  $Z$  par une surface recouvrant  $n$  fois le plan  $z$ .  $Z$  étant algébrique par rapport à l'exponentielle, toutes ses valeurs se trouvent déjà dans une bande recouvrant  $n$  fois un lieu fondamental de l'exponentielle, qui est une bande de largeur  $\omega$ , sur le plan  $z$ . Ainsi, par exemple, dans le cas très-simple, où  $\mu = \nu = 1$  et  $b = -a$  (avec  $\omega = 2\pi i$ ), tous les couples de valeurs de la fonction simplement périodique  $Z = a\sqrt{1 - e^z}$  et de l'exponentielle  $e^z$  sont représentés sur le plan  $z$  par deux couches de largeur  $2\pi i$ , superposées l'une à l'autre et se continuant l'une dans l'autre le long d'une ligne de passage qui part du point [formules (3)] où  $e^z = 1$  et  $Z = 0$ .

pour donner un exemple de fonction possédant la plus simple périodicité que l'on disait absurde, c'est-à-dire deux périodes en rapport réel et incommensurable entre elles.

Avant de former la surface monodromique et le lieu fondamental pour ce cas, je veux faire cette remarque générale, que le système des lignes de coupure, abstraction faite maintenant de la nature géométrique de leur cours, peut être aussi tel ou tel autre, différent du système indiqué fig. 2. De même que la surface monodromique, le lieu fondamental pourra donc prendre une ou autre forme.

Ainsi, en revenant au cas (4), si on fait, par exemple, les coupures à

Fig. 3 (sur le plan  $Z$ ).

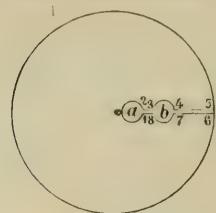
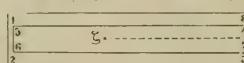


Fig. 3' (sur le plan  $z$ ).



se continuent l'une dans l'autre le long d'une ligne de passage partant du point de ramification, où la valeur de  $Z$  est  $\eta = -\sqrt{2}$ , et celle de  $z$  est exprimée par l'intégrale rectiligne

$$\zeta = \int_0^{-\sqrt{2}} \left( \frac{1}{Z-1} - \frac{\sqrt{2}}{Z-2} \right) dZ = 0,125\dots$$

On peut aussi former un lieu fondamental complètement simple, c'est-à-dire, qui nulle part ne recouvre deux fois le plan  $z$ . Si l'on

Fig. 4 (sur le plan  $Z$ ).

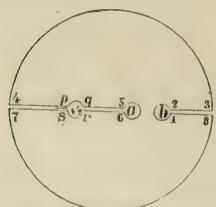


Fig. 4' (sur le plan  $z$ ).



empêche  $Z$  de faire plus d'un demi-tour autour de  $\eta$  dans la surface monodromique,  $z$  ne pourra faire plus d'un tour autour de  $\zeta$  dans le lieu fondamental.

Partant, si on fait, par exemple, les coupures (fig. 4) le long de tout

<sup>1</sup> Dans cette figure, ainsi que dans la fig. 4,  $a$  et  $b$  ont respectivement les valeurs 1 et 2.

l'axe réel, hormis entre  $Z = 1$  et  $Z = 2$ , on obtiendra le lieu fondamental tout simple indiqué fig. 4'.

Les lieux congruents contigus au fondamental le long des bords  $2 \dots 3$  et  $1 \dots 8$  n'empiètent pas sur lui; il y a empiètement par les deux autres lieux qui lui sont joints le long des bords  $5 \dots 4$  et  $6 \dots 7$ . Ces bords dans fig. 4', étant brisés aux points de ramification, deviennent les lignes de passage d'une à autre couche.

Pour tout autre cas, de périodes en rapport réel et incommensurable entre elles, on aura des lieux fondamentaux de même forme que dans cas (4), mais dont les bords pourront avoir entre eux d'autres distances, et le point de ramification une position différente. Il est même presque évident que l'on peut prendre  $A$ ,  $B$  et  $a:b$  de manière à obtenir des bords distants entre eux comme on veut, et à faire tomber où l'on veut le point de diramation. Mais cela se rapporte à une question générale, qui n'a pas de place ici.

La méthode que nous venons d'indiquer, pour reconnaître la manière de se comporter des fonctions inverses des intégrales (1) et (2), s'applique immédiatement à toute intégrale de différentielle rationnelle. Et l'on trouve ainsi évidemment des fonctions dont les lieux fondamentaux sont contournés par tel nombre que l'on veut de couples de côtés congruents, ou, en d'autres termes, l'on trouve des fonctions analytiques douées de tel nombre que l'on veut de périodes; chaque infini logarithmique de l'intégrale pouvant donner naissance à une nouvelle période.

Nous avons pu appliquer aussi aisément la méthode aux intégrales de différentielles algébriques quelconques: car une surface Riemannienne, représentative de la fonction algébrique dont il s'agit, et coupée de manière à annuler l'influence de la connexion multiple et des infinis logarithmiques, nous offrait, toute prête, notre surface monodromique.

Pavie, novembre 1885.

LES LIEUX FONDAMENTAUX  
 DES FONCTIONS INVERSES DES INTÉGRALES ABÉLIENNES  
 ET EN PARTICULIER  
 DES FONCTIONS INVERSES DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES  
 DE 2<sup>me</sup> ET 3<sup>me</sup> ESPÈCE

(Deuxième Mémoire)

PAR

F. CASORATI

à PAVIE.

Pour atteindre plus aisément le but que nous nous étions proposé en publiant le Mémoire précédent, nous n'avons considéré que les deux plus simples intégrales dont l'inversion engendrait des fonctions périodiques.

Dans ce second Mémoire nous allons considérer particulièrement les intégrales elliptiques, en énonçant en même temps les résultats analogues qui se rapportent aux intégrales Abéliennes les plus générales. Nous ne nous occupons ici que de la forme des *lieux fondamentaux* pour les fonctions inverses de ces intégrales;<sup>1</sup> ce qui n'est qu'un premier chapitre de la théorie de ces fonctions. Notre but est de familiariser les jeunes

---

<sup>1</sup> Ces fonctions peuvent être aussi caractérisées en disant, que, chacune d'elles (que je désignerai toujours ici par  $Z$ , en désignant par  $z$  la variable indépendante) est une intégrale d'une équation différentielle de la forme

$$F\left(\frac{dZ}{dz}, Z\right) = 0,$$

où  $F$  signifie une fonction rationnelle et entière, à coefficients constants, de  $Z$  et de sa dérivée. En appliquant ici la notion de lieu fondamental exclusivement à cette classe de fonctions, nous remarquerons qu'elle est utilement applicable dans une plus grande étendue.

géomètres<sup>1</sup> avec ce genre de considérations, et de les porter, par la simplicité et l'évidente fécondité des résultats qu'ils trouveront dans ce Mémoire, à l'étude de ces fonctions; lesquelles se présentent tout naturellement dès les premiers pas dans le calcul intégral, et qui réclament à être dédommagées du demi-siècle d'abandon, où on les a laissées à la suite de conclusions célèbres, mais pas complètement légitimes.<sup>2</sup>

### § 5.

Les intégrales (1) et (2) du 1<sup>er</sup> Mémoire ne présentent que des *infinis logarithmiques*.

Prenons maintenant des intégrales de différentielles rationnelles qui n'ont que des *infinis algébriques*. Ces intégrales sont des fonctions rationnelles de  $Z$ . Leurs fonctions inverses sont donc des fonctions algébriques de  $z$ . Néanmoins il convient de les considérer aussi un peu sous notre point de vue.

Prenons les cas suivants

$$(5) \quad z = \int \frac{A}{(Z-a)^2} dZ = -\frac{A}{Z-a} + \text{Const.}$$

$$(6) \quad z = \int \left[ \frac{A}{(Z-a)^2} + B \right] dZ = -\frac{A}{Z-a} + BZ + \text{Const.}$$

Ces intégrales étant monodromes, sans restriction, sur le plan  $Z$ , notre surface monodromique sera, dans l'un et l'autre cas, un plan sans coupures, étendu sur le plan  $Z$ , chaque point duquel est censé porter la valeur de  $Z$  avec la valeur correspondante de l'intégrale.

En étendant cette surface sur le plan  $z$ , on obtient, dans le cas (5),

<sup>1</sup> Qui voudront bien nous pardonner s'ils ne trouveront pas toute remarque à la place qui lui serait la plus propre, et s'ils rencontreront quelques répétitions, qui dans une redaction plus soignée auraient pu être évitées.

<sup>2</sup> Si ces conclusions avaient été vraies, la plupart des équations différentielles n'auraient pas admis, comme intégrales, des fonctions analytiques de la variable complexe indépendante; et par conséquent, l'introduction des fonctions d'une variable complexe dans l'Analyse, qui a paru si féconde, aurait perdu presque toute son opportunité.

évidemment une seule couche illimitée, c'est-à-dire, encore un plan; et dans le cas (6), deux plans, qui se continuent l'un dans l'autre le long d'une ligne de passage aboutissant à deux points de ramification. C'est la surface Riemannienne représentative de la fonction algébrique  $Z$ .

On remarquera, que, dans le cas (5) le lieu fondamental est formé d'un seul plan, car l'intégrale a un seul infini (algébrique du 1<sup>er</sup> ordre). L'intégrale (6) ayant deux infinis, l'un pour  $Z = a$  et l'autre pour  $Z = \infty$ , son lieu fondamental est composé de deux plans, dont chacun porte à l'infini une de ces deux valeurs de  $Z$ .<sup>1</sup> L'infini de l'un de ces plans représente le couple  $z = \infty, Z = a$ ; l'infini de l'autre le couple  $z = \infty, Z = \infty$ .

Revenons un moment aux intégrales (1) et (2). La première devient *infinit logarithmiquement* pour  $Z = a$  et  $Z = \infty$ ; la deuxième pour  $Z = a, Z = b$  et  $Z = \infty$ , si  $A + B$  n'est pas zéro. Nous avons obtenu la monodromie pour l'intégrale (1) au moyen d'une coupure de l'un à l'autre point d'infini. Dans ce cas, le lieu fondamental est résulté *une* seule *bande*, que nous nommerons *logarithmique*, dont les côtés sont les lignes transformées des bords de la coupure. Dans le cas (2), nous avons formé notre surface monodromique en coupant le plan suivant *deux* lignes, chacune terminée à deux points d'infini, et nous avons obtenu, comme lieu fondamental, *deux* bandes logarithmiques, chacune contournée par les lignes transformées des bords d'une coupure.

Prenons, maintenant, l'intégrale

$$(7) \quad z = \int \left[ \frac{A}{Z-a} + \frac{B}{(Z-b)^2} \right] dZ.$$

Cette intégrale a un infini algébrique du 1<sup>er</sup> ordre au point  $Z = b$ , et deux infinis logarithmiques aux points  $Z = a$  et  $Z = \infty$ . La surface monodromique est la même que pour le cas (1). Mais le lieu fondamental n'est pas simplement une bande logarithmique (comme la fig. 1'); il

<sup>1</sup> Nous recommandons au lecteur de concevoir le plan (lorsqu'on l'emploie, dans l'étude des fonctions d'une variable complexe, comme lieu représentatif des valeurs de cette variable) comme une surface fermée à l'infini, de manière à ne voir à l'infini qu'un point. Ce point représente la valeur de la variable que l'on dit *infinie* et que l'on désigne par le symbole  $\infty$ . Cette valeur est caractérisée par la valeur infinie du module, quel que

se compose d'une bande et d'un plan entier.<sup>1</sup> Ces deux couches se continuent l'une dans l'autre le long d'une ligne de passage aboutissant à deux points de ramification. S'il est

$$\frac{A}{Z-a} + \frac{B}{(Z-b)^2} = A \frac{(Z-\eta)(Z-\eta')}{(Z-a)(Z-b)^2},$$

$\eta$  et  $\eta'$  seront les valeurs de  $Z$  dans les points de ramification,<sup>2</sup> dont les positions, ou valeurs  $\zeta$  et  $\zeta'$  de  $z$ , seront données par l'intégrale (7).

L'infini algébrique et un des deux infinis logarithmiques peuvent soit l'argument; de même que la valeur  $\infty$  est caractérisée, n'importe l'argument, par la valeur zéro du module.

On peut se figurer au lieu du plan une sphère finie, comme lieu représentatif des valeurs de la variable; se réservant de se figurer de nouveau le plan, chaque fois que cela convient pour mieux concevoir les valeurs ou les chemins de la variable (voir les §§ 14 et 19 de notre *Teorica delle funzioni di variabili complesse*).

<sup>1</sup> Si l'on conçoit  $Z$  se mouvant infiniment près du point  $Z = b$  dans la surface monodromique, le mouvement correspondant de  $z$  dans le lieu fondamental sera déterminé presque exclusivement par le terme  $\frac{BdZ}{(Z-b)^2}$  de la différentielle  $dz$ . Si  $Z$  décrirait un cercle inf. petit autour de  $b$ , on pourra poser

$$Z - b = re^{i\omega}, \quad dZ = re^{i\omega} \cdot id\omega$$

et regarder  $dz$  comme exprimée par

$$dz = \frac{B}{r} e^{-i\omega} id\omega.$$

Cette formule nous dit que  $z$  décrira un grand cercle, de rayon  $\frac{B}{r}$ . Aux cercles de plus en plus petits autour de  $b$  de la surface monodromique correspondent dans le lieu fondamental des cercles de plus en plus grands, dont la limite est l'infini, qui doit être conçu comme un point unique, portant le couple  $z = \infty, Z = a$ , et comme étant le transformé du point de la surface monodromique portant le même couple.

<sup>2</sup> Il faut se rappeler un théorème de CAUCHY, ou, en d'autres termes, il faut se rappeler, que, autour d'un couple  $(z_1, Z_1)$  de valeurs finies de  $z$  et  $Z$ , il ne peut y avoir de ramification dans la surface représentative, soit-elle étendue sur le plan  $z$  ou sur le plan  $Z$ , à moins que les différences  $z - z_1, Z - Z_1$  ne soient infiniment petites du même ordre, c'est-à-dire, que si la dérivée d'une variable par rapport à l'autre est nulle ou infinie. Car, la dérivée n'étant ni nulle ni infinie, à un tour de  $z$  autour de  $z_1$  sur le plan  $z$  il correspond aussi un tour de  $Z$  autour de  $Z_1$  sur le plan  $Z$ . En d'autres termes, en tournant autour du point  $(z_1, Z_1)$  de la surface représentative, étendue sur l'un ou l'autre plan, on revient au point-couple de départ après l'accroissement  $2\pi$  de l'angle du rayon tournant.

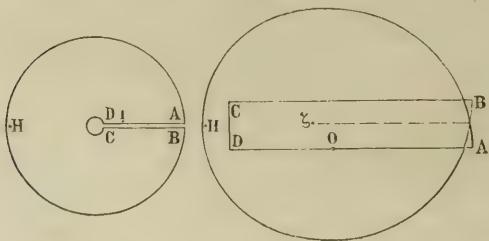
tomber au même point de la surface monodromique. Le lieu fondamental ne cessera pas d'être composé d'un plan et d'une bande. C'est ce que l'on reconnaît bien aisément en supposant  $a = b$  (d'où  $\eta = a$ ,  $\zeta = \infty$ ) dans la formule (7). Mais, au lieu de (7), prenons, pour varier, l'intégrale

$$(8) \quad z = \int^Z \left( \frac{1}{Z} + 1 \right) dZ,$$

dont l'infini algébrique et l'un des infinis logarithmiques tombent au point  $Z = \infty$ . L'autre infini logarithmique tombant au point  $Z = 0$ , nous formerons notre surface monodromique en coupant le plan de  $Z = 0$  à  $Z = \infty$ .

Pour faire un exercice plus complet, nous allons déterminer en détail le chemin de  $z$  pendant que  $Z$  décrit le contour exprimé par la fig. 5, qui est formé par un petit cercle  $CD$  autour de  $Z = 0$ , par un grand cercle  $AHB$  et par les bords  $BC, DA$

Fig 5 (sur le plan  $Z$ ). Fig 5' (sur le plan  $z$ ).



de la coupure, que nous supposons faite suivant l'axe réel positif. Cette figure deviendra exactement notre surface monodromique lorsque les cercles se réduiront respectivement aux points  $Z = 0$  et  $Z = \infty$ , et les droites  $BC, AD$  coïncideront entre elles sur l'axe réel.

Prenons comme limite inférieure, ou point de départ de  $Z$ , pour l'intégrale (8) le point  $Z = 1$  du bord  $DA$ .

$Z$  allant de 1 à  $A$ ,  $z$  marchera sur son axe réel (fig. 5') de son zéro (marqué 0 dans la figure) au point désigné par  $A$ ; dont la distance de 0 est  $\log R + R - 1$ , si  $R$  est le rayon du cercle  $AHB$  de la surface monodromique.

$Z$  décrivant ce cercle  $AHB$ ,  $z$  décrit la courbe  $AHB$  (de la fig. 5'), dont les bouts  $B$  et  $A$  ont une différence de position,  $B - A$ , égale à  $2\pi i$ .<sup>1</sup>

$Z$  décrivant ensuite le bord  $BC$ , le petit cercle  $CD$  et la portion  $D \dots 1$  du bord  $DA$ ,  $z$  décrira les chemins marqués par les mêmes lettres dans la fig. 5', et reviendra au point de départ, c'est-à-dire à son 0.

<sup>1</sup> En posant  $Z = Re^{i\vartheta}$ , d'où  $dZ = Re^{i\vartheta}id\vartheta$ , on suivra très-aisément les variations simultanées des parties, réelle et imaginaire, de  $z$  le long de ce chemin  $AHB$ .

Notre lieu sur le plan  $z$  est donc formé de deux couches, qui se continuent l'une dans l'autre le long d'une ligne de passage allant du point  $\zeta$  à l'infini. Dans ce point  $\zeta$ , de ramification, la valeur de  $Z$  est  $-1$ , pour laquelle le rapport  $dz:dZ$  est nul. Et la valeur de  $z$  est donnée par l'intégrale

$$\zeta = \int_1^{-1} \left( \frac{1}{Z} + 1 \right) dZ,$$

Prenant pour chemin d'intégration, dans la surface monodromique, le demi-cercle qui va du point  $1$  à  $-1$ , on trouve sur-le-champ  $\zeta = -2 + \pi i$ .

Lorsque les deux cercles de la fig. 5 se réduisent respectivement aux points  $0$  et  $\infty$ , la bande  $BCDA$  de la fig. 5' devient une bande logarithmique complète, et l'autre couche devient un plan entier.

Les cas particuliers, que nous venons de considérer, suffisent pour faire entrevoir que, dans le cas général d'une différentielle rationnelle quelconque  $R(Z)dZ$ , le lieu fondamental de la fonction  $Z$ , inverse de l'intégrale

$$(9) \quad z = \int^z R(Z) dZ,$$

pourra être conçu comme composé par autant de plans que l'intégrale a d'infinis algébriques et par autant de bandes logarithmiques que l'intégrale a d'infinis logarithmiques moins un. Toutes ces couches se continueront l'une dans l'autre autour de points de ramification où les valeurs de  $Z$  sont déterminées algébriquement par les coefficients de  $R(Z)$ .

Un infini algébrique de l'ordre  $n$  doit être compté comme  $n$  infinis du 1<sup>er</sup> ordre. Il cause dans le lieu fondamental  $n$  plans, dont les infinis constituent un seul point (de ramification) correspondant au point de la surface monodromique où cet infini algébrique a lieu.

Le nombre des bandes logarithmiques sera égal au nombre des infinis logarithmiques moins un, comme nous l'avons dit, si, pour obtenir la monodromie de l'intégrale,<sup>1</sup> l'on coupera le plan en suivant autant de lignes

---

<sup>1</sup> Nous dirons ailleurs de la meilleure manière de réaliser cette monodromie en vue de la théorie de la fonction inverse de l'intégrale.

qu'il y a de ces infinis moins un; chaque ligne allant d'un infini à un autre sans rencontrer les autres lignes analogues.<sup>1</sup>

Passons maintenant à considérer les intégrales de différentielles irrationnelles.

### § 6.

Nous allons faire l'inversion des intégrales elliptiques, en commençant par l'intégrale de 1<sup>re</sup> espèce

$$(10) \quad z = \int_0^z \frac{dZ}{\sqrt{Z(1-Z)(1-k^2Z)}}.$$

Après avoir traité ce cas très-connu, nous n'aurons que peu de choses à ajouter pour l'inversion des intégrales de 2<sup>me</sup> et 3<sup>me</sup> espèce.

Ici, au lieu d'un plan ou couche simple, il faut imaginer (étendue sur le plan  $Z$ ) une surface Riemannienne, qui représente la manière de se comporter du radical

$$\sqrt{Z(1-Z)(1-k^2Z)}.$$

<sup>1</sup> Si, pour former la surface monodromique, on coupait le plan en suivant des lignes qui, en partant d'un point où  $z$  n'est pas infini (et où je désignerai par  $Q$  la valeur de  $Z$ ), vont respectivement, sans se rencontrer, aux divers points d'infini logarithmique; le lieu fondamental aurait autant de bandes qu'il y a de ces points, et chacune de ces bandes s'étendrait sur le plan  $z$ , non plus de l'infini à l'infini, mais du fini à l'infini. Figurons-nous sur le plan  $z$  le polygone dont les sommets sont les valeurs de  $z$  correspondant à la valeur  $Q$  de  $Z$ ; cette valeur se trouvant en autant de points du contour de la surface monodromique qu'on a tiré de lignes de coupure. Les côtés de ce polygone représentent respectivement les résultats de l'intégration de la différentielle  $R(Z)dZ$  autour de chaque point d'infini. La somme de ces résultats étant toujours zéro (il faut compter aussi, lorsqu'il existe, l'infini au point où  $Z = \infty$ ), le polygone est fermé. Maintenant, imprimons à chaque côté un mouvement de *translation*, par lequel le côté, en commençant à glisser vers l'intérieur, va à l'infini dans une direction finale égale à celle de la normale intérieure au côté même (du polygone). Chaque côté engendrera précisément une bande du lieu fondamental, si les mouvements de translation sont réglés de manière que les extrémités de chaque côté décrivent les transformées des bords de la coupure aboutissant à l'infini correspondant.

Il est à propos de rappeler ici que la nature géométrique de chaque ligne de coupure est arbitraire. L'élément essentiel d'une bande logarithmique est la *différence* de position des côtés congruents, c'est-à-dire la *période*; d'où dépend aussi, comme on l'a dit, la direction de la bande à l'infini.

Cette surface est constituée par deux plans, ou, en d'autres termes, est une surface à deux couches, dont chacune s'étend sur tout le plan  $Z$ , et qui se continuent l'une dans l'autre autour des points de ramification

$$0, \ 1, \ \frac{1}{k^2}, \ \infty.$$

Chaque point de cette surface est censé porter la valeur de  $Z$  (qui est représenté par le point qui est au dessous de lui dans le plan  $Z$ ) avec une des deux valeurs du radical.

Pour tracer nos figures, nous supposerons que  $k$  est positif et plus petit que 1, et que les deux couches se connectent, c'est-à-dire, se continuent l'une dans l'autre, le long de deux *lignes de passage*, dont l'une s'étend sur la portion  $0 \dots 1$  et l'autre sur la portion  $\frac{1}{k^2} \dots \infty$  de l'axe réel positif.

Pour des valeurs réelles de  $Z$  la fonction sous le radical sera toujours réelle, et le radical même sera tantôt réel et tantôt purement imaginaire. Sa valeur sera donc de la forme  $\pm M$  ou  $\pm Mi$ , en désignant par  $M$  le module, ou valeur absolue, du radical.

La fig. 6 servira à nous rappeler à chaque instant la nature des valeurs, réelles ou imaginaires, du radical le long de l'axe réel dans l'une des couches. Pour fixer les idées, nous regarderons la couche, à laquelle cette figure se rapporte, comme située *au dessus* de l'autre. Dans cette autre, que nous nommerons couche *inférieure*, la valeur du radical est dans chaque point contraire<sup>1</sup> de celle qui se trouve dans le point qui lui est au dessus, dans la couche supérieure. Conformément à cela, notre fig. 6 nous présente deux valeurs, contraires entre elles, le long de chaque ligne de passage. En regardant comme direction positive de ces lignes la direction positive de l'axe réel, nous pourrons dire, par exemple, que le long du *coté gauche* de la ligne de passage  $0 \dots 1$ , les valeurs du radical sont négatives dans la couche supérieure et positives dans l'inférieure. Etc.

Cette surface Riemannienne est triplement connexe. En y faisant

Fig. 6 (sur le plan  $Z$ ).

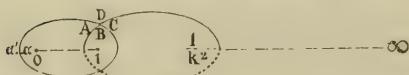
Couche supérieure.

$$-Mi \quad 0 \quad -\frac{M}{M} \quad -1 \quad Mi \quad \frac{1}{k^2} \quad -\frac{M}{M} \quad -\infty$$

<sup>1</sup> Je dis ici que deux valeurs sont *contraires* entre elles lorsque leur somme est nulle.

des coupures de manière à la rendre simplement connexe, on aura une *surface monodromique* pour notre intégrale de 1<sup>ère</sup> espèce.<sup>1</sup> Suivant une manière usuelle, nous ferons une *première coupure* le long d'une ligne fermée, tracée arbitrairement dans la couche supérieure autour des points de ramification 0 et 1; et ensuite, une *deuxième coupure* suivant une autre ligne ayant ses bouts dans un même point de la ligne précédente. Nous indiquerons par la fig. 7 la surface monodromique que l'on vient d'obtenir.

Fig. 7 (sur le plan Z).



Les lignes continues appartiennent à la couche supérieure, les ponctuées à l'inférieure. Les lignes de passage sont indiquées, ici comme ailleurs, par des traits. Le contour de cette surface est constitué

par les bords  $AB$  et  $CD$  de la première coupure et par les bords  $BC$  et  $DA$  de la deuxième. Pour parcourir tout le contour en *direction positive*, en partant de  $A$ , on doit marcher sans interruption tout le long des bords  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$ , c'est-à-dire, parcourir le chemin  $AB + BC + CD + DA$ .

Imaginons-nous maintenant que l'on dépose sur chaque point de la surface monodromique la valeur que l'on obtient pour l'intégrale (10), c'est-à-dire pour  $z$ , en intégrant la différentielle

$$(11) \quad dz = \frac{dZ}{\sqrt{Z(1-Z)(1-k^2Z)}}$$

depuis 0 jusqu'au point susdit le long d'un chemin quelconque tracé dans cette surface. Partant, chaque point de cette surface monodromique est censé porter dorénavant une *terne de valeurs correspondantes* de  $Z$ , du radical et de  $z$ .

Il s'agit à présent de trouver quelle forme prend la surface ainsi chargée lorsqu'on la transporte sur le plan  $z$ , c'est-à-dire, lorsqu'on se la représente étendue sur ce plan de manière que chaque valeur de  $z$  tombe au dessus du point qui la représente dans le dit plan. Car, la surface ainsi transformée est le *lieu fondamental* de  $Z$  considérée comme fonction de la variable indépendante  $z$ .

Dans ce cas (10) on sait déjà bien que la surface prend la forme d'un parallélogramme. Notre lieu fondamental n'est autre chose que le

<sup>1</sup> Car la valeur de cette intégrale prise tout le long du contour d'une portion quelconque de cette surface est zéro.

*parallélogramme des périodes* de la fonction  $Z$ ; qui dans ce cas est doublement périodique et uniforme.

Néanmoins, nous allons déterminer le contour du lieu fondamental, comme s'il nous était inconnu; car, le même procédé sert dans les cas successifs.

Pour reconnaître plus promptement le chemin que  $z$  décrit sur son plan pendant que  $Z$  parcourt le contour de la surface monodromique, il est bon d'imaginer que les lignes des coupures, représentées par la fig. 7, se restreignent de manière à se réduire tout-à-fait sur l'axe réel entre les points  $o$  et  $1$ ,  $1$  et  $\frac{1}{k^2}$ . De cette manière, nous n'aurons à faire qu'avec des valeurs réelles de  $Z$  et les valeurs du radical déjà exprimées par la fig. 6.

Notre surface monodromique sera donc dorénavant ce que devient la surface Riemannienne en coupant ses deux couches en ligne droite du point de ramification  $o$  jusqu'au point de ramification  $\frac{1}{k^2}$ . Toutefois, pour plus de clarté, nous continuerons à nous en rapporter à la fig. 7, dont cependant nous supposerons toujours les bords  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  dans leur *position finale*, au dessus de l'axe réel.

Au dessus du point  $o$  de cet axe nous voyons deux points  $\alpha$  et  $\alpha'$ <sup>1</sup> du contour de notre surface monodromique. L'un appartient au bord  $AB$  et l'autre au bord  $CD$ . Dans chacun de ces points la valeur de  $Z$  est  $o$ . Lequel des deux prenons-nous comme point de départ, ou limite inférieure, de l'intégrale (10)? Celui qui appartient au bord  $AB$ . Partant, la valeur de  $z$  en ce point sera aussi  $o$ . Quelle sera la valeur de  $z$  en  $\alpha'$ ? Pour la trouver directement, il faudrait faire marcher  $Z$  de  $\alpha$  à  $\alpha'$  par un chemin entièrement contenu dans la surface monodromique, et faire l'addition ou intégration des valeurs que la formule (11) continuerait de donner pour  $dz$ . Nous verrons bientôt que cette valeur est  $2P'i$ , en désignant par  $P$  et  $P'$  les intégrales rectilignes<sup>2</sup>

$$(12) \quad P = \int_0^1 \frac{dZ}{M}, \quad P' = \int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{k^2}} \frac{dZ}{M}.$$

<sup>1</sup> Nous tenons à répéter que par  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  on doit entendre, non pas les points dans les positions marquées dans la fig. 7, mais les points dans les positions finales.

<sup>2</sup> D'après les notations de JACOBI ces intégrales seraient désignées par  $2K$ ,  $2K'$ . On verra dans la suite pourquoi nous n'adoptons pas ces notations en ce moment.

Au dessus du point  $i$ , du plan  $Z$ , il y a quatre points du contour; les points  $A, B, C, D$ . En eux, la valeur de  $Z$  est donc  $i$  et la valeur du radical est zéro; quelles sont les valeurs de  $z$ ? Pour obtenir la valeur de  $z$  en  $A$ , faisons marcher  $Z$  de  $\alpha$  à  $A$  le long de la portion  $\alpha A$  du bord  $BA$ . Pendant ce mouvement, le radical a les valeurs indiquées au côté gauche de la ligne de passage de  $o$  à  $i$  dans la fig 6; c'est-à-dire, des valeurs négatives. Par conséquent,  $dz$  [formule (11)] est aussi toujours négative, et la valeur de  $z$  en  $A$  est  $-P$ .

Nous trouverons les valeurs de  $z$  en  $B, C, D$  et aussi en  $\alpha'$ , en faisant décrire à  $Z$  le contour de la surface monodromique; ce que nous allons faire tout-de-suite, mais dans le but principal de déterminer le contour du lieu fondamental.

Nous ferons partir  $Z$  du point  $A$ . Quel sera le point de départ de  $z$  sur le plan  $z$ ? Nous venons de voir que, pendant le passage de  $\alpha$  à  $A$  le long du bord  $BA$ , toutes les valeurs de  $dz$  sont négatives et leur somme est égale à  $-P$ . Cela signifie que, pendant ce passage,  $z$  aura marché sur l'axe réel négatif, du plan  $z$ , du point  $o$  au point  $-P$ . Voilà le point de départ de  $z$ .

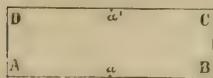
$Z$  partant du point  $A$  et décrivant la moitié  $A\alpha$  du bord  $AB$ ,  $z$  partira du point  $-P$  sur son plan et reviendra à  $o$ .

$Z$  décrivant la seconde moitié  $\alpha B$  du bord  $AB$ ,  $z$  marchera de  $o$  au point  $+P$ ; car le long de  $\alpha B$  la valeur du radical (fig. 6) est positive.

$Z$  parcourant le bord  $BC$ ,  $z$  décrira une droite représentative de la grandeur imaginaire positive  $zP'i$ . En effet, tout le long de la première moitié (contenue dans la couche inférieure) du chemin, les valeurs de  $dZ$  étant positives et celles du radical étant imaginaires négatives, les valeurs de  $dz$  seront toujours imaginaires positives et leur somme résultera égale à  $P'i$ . Le long de la seconde moitié, qui est dans la couche supérieure, les valeurs de  $dZ$  et du radical ayant des signes contraires aux précédentes, les valeurs de  $dz$  continueront à être imaginaires positives, et leur somme sera de même égale à  $P'i$ .

De la même manière on reconnaît que,  $Z$  décrivant les bords  $CD$  et  $DA$ ,  $z$  décrira deux droites qui représentent respectivement les grandeurs  $-zP$  et  $-zP'i$ .

Le contour du lieu fondamental est donc le rectangle représenté par la fig. 7', dont les sommets sont marqués par les mêmes lettres

Fig. 7' (sur le plan  $z$ ).

Dans les points	$Z$ et $z$ ont les valeurs
A	1 $-P$
B	1 $P$
C	1 $P + 2P'i$
D	1 $-P + 2P'i$
$a$	0      0
$a'$	0 $2P'i$

tout simplement le rectangle  $ABCD$ .

que leurs points correspondants dans la surface monodromique.

Dans le cas de la relation (10) il n'y a pas de points de ramification dans le lieu fondamental; ce lieu est donc complètement déterminé par son contour; c'est-à-dire, ce lieu est

### § 7.

Cherchons le lieu fondamental pour la fonction  $Z$  inverse de l'intégrale de 2<sup>me</sup> espèce

$$(13) \quad z = \int_0^Z \frac{Z dZ}{\sqrt{Z(1-Z)(1-k^2 Z)}}.$$

Cette intégrale est monodrome, comme celle de première espèce, dans la surface représentée par la fig. 7.

En conservant donc cette même surface comme monodromique pour le cas (13), il s'agit encore ici de trouver le chemin de  $z$  sur le plan  $z$ , pendant que  $Z$  parcourt les quatre bords des coupures. Le chemin de  $z$  sera donc encore un rectangle, que nous pourrions représenter par la même fig. 7', avec la seule différence qu'à présent les symboles  $P$  et  $P'$  doivent désigner les valeurs des intégrales

$$(14) \quad P = \int_0^1 \frac{Z dZ}{M}, \quad P' = \int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{Z dZ}{M}.$$

Mais, bien que le contour du rectangle soit encore ici *le contour complet* du lieu fondamental, le rectangle ne constitue pas à lui seul *tout* ce lieu. L'intégrale (13) devient infinie lorsque  $Z$  va à l'infini. En d'autres termes, la valeur de  $z$ , qui se trouve déposée au point  $Z = \infty$  de notre surface monodromique, est  $\infty$ . Le lieu fondamental doit donc s'étendre sur le plan  $z$  à l'infini.

Effectivement, ce lieu est constitué par le rectangle et par un plan entier. Ce sont deux couches que, pour fixer les idées, je nommerai *supérieure* et *inférieure*, en regardant le rectangle comme superposé au plan. Ces couches se continuent l'une dans l'autre le long d'une ligne de passage aboutissant à deux points de ramification.

On reconnaît tout cela en cherchant les points de ramification. On trouve qu'il n'y a de ramification dans notre lieu fondamental qu'autour des points où  $Z = 0$ . En effet, si de l'équation

$$(15) \quad dz = \frac{ZdZ}{\sqrt{Z(1-Z)(1-k^2Z)}}$$

on tire le développement de  $z - z_1$  suivant les puissances de  $Z - Z_1$ ,<sup>1</sup> et de celui-ci on tire le développement réciproque, c'est-à-dire, de  $Z - Z_1$  suivant les puissances ascendantes de  $z - z_1$ ; on voit que ce développement ne contient de puissances fractionnaires qui si  $Z_1 = 0$ . Dans ce cas, le premier terme du développement contient la puissance  $(z - z_1)^{\frac{2}{3}}$ . Par conséquent, si l'on tournait autour de ce point  $(z_1, Z_1 = 0)$  du lieu fondamental, on ne retrouverait un même couple de valeurs de  $z, Z$  qu'après trois tours.<sup>2</sup> En d'autres termes, ce point est un *point de ramification double*.

Il ne reste qu'à trouver les valeurs de  $z$  pour  $Z = 0$ . Pour cela, on n'a qu'à comparer le lieu fondamental (fig. 7') avec la surface mo-

<sup>1</sup>  $z_1$  et  $Z_1$  étant supposées un couple de valeurs finies correspondantes de  $z$  et  $Z$ . Quant aux valeurs infinies, il n'y en a qu'un couple, qui dans la surface monodromique est représenté par un point de ramification. Mais on voit facilement que ce point n'est plus de ramification dans le lieu fondamental.

<sup>2</sup> On verra dans la suite comment on pourra faire trois tours, pendant que notre lieu fondamental, isolément considéré, n'a que deux couches. On éviterait cette complication et l'on trouverait *deux points* de ramification *simples*, au lieu d'un *point double*, en prenant la différentielle de seconde espèce sous une forme plus générale.

Si l'on ne réduisait pas les coupures de la surface monodromique à passer par le point où  $Z = 0$ , le transport de cette surface sur le plan  $z$  donnerait, pour (15), un lieu fondamental recouvrant *trois fois* le plan  $z$  autour du point de ramification. Les jeunes lecteurs feront bien de s'exercer à vérifier cela; d'autant plus que de cette manière ils commenceront d'apercevoir les conditions que l'on doit remplir dans la formation d'une surface monodromique afin que le lieu fondamental soit constitué comme on dit dans ce Mémoire.

La fig. "7" nous présente non un seul mais deux points doubles, parce que nous avons voulu que le contour passe par ces points.

nodromique (fig. 7). Dans cette surface les valeurs  $\infty$  pour  $Z$  sont dans les milieux des bords  $AB$  et  $CD$ . A ces milieux correspondent dans le lieu fondamental les milieux des côtés  $AB$  et  $CD$ . Ces milieux sont donc nos points de ramification; et les valeurs de  $z$  en eux sont  $\infty$  et  $2Pi$ .

En concevant comme ligne de passage de l'une à l'autre couche la droite qui joint les points de ramification,<sup>1</sup> nous représenterons complètement notre lieu fondamental par la fig. 7''.

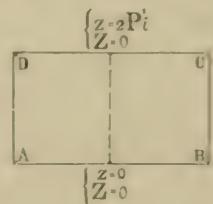
On sait combien de profit on tire dans la théorie des fonctions doublement périodiques uniformes de la considération du lieu fondamental (parallélogramme des périodes). On en tire bien plus dans l'étude des fonctions non uniformes. Le lieu fondamental est une image très-expressive de la manière de se comporter de la fonction; il offre à nos yeux, résumés dans une figure assez simple, une foule de détails que l'on ne pourrait embrasser aisément par les formules de l'Analyse.

Il est très-utile d'envisager simultanément le lieu fondamental et la surface monodromique.

Le lieu fondamental que nous venons de trouver (fig. 7'') peut en fournir à lui seul bien de preuves. Mais nous nous bornons ici à quelques brèves considérations à son égard, ne voulant pas nous écarter à présent de notre question, de la détermination des lieux fondamentaux.

La surface monodromique (fig. 7) recouvre partout deux fois le plan  $Z$ ; cela nous dit qu'une quantité  $c$  quelconque se présente deux fois, dans deux points distincts (excepté les cas de  $c = \infty$ ,  $c = 1$ ,  $c = \frac{1}{k^2}$ ,  $c = \infty$ )

Fig. 7'' (sur le plan  $z$ ).



<sup>1</sup> On pourrait se borner à dire, dans ce cas et dans les autres, que les couches se continuent les unes dans les autres autour des points de ramification, sans parler de lignes de passage, dont seulement les extrémités (quelquefois même une seule des deux) sont déterminées, leurs cours restant arbitraire. Mais nous croyons gagner en clarté en considérant ces lignes et leur donnant dans nos figures une forme particulière.

Nous ferons aussi remarquer à ce propos, que toutes les surfaces à plusieurs couches, dont il est question, peuvent être réellement construites, si l'on prend au lieu du plan représentatif une surface finie (p. e. une sphère), et si l'on se contente de prendre comme surfaces des réseaux (très-épais, si l'on veut) dont les noeuds seuls représentent les points portant les valeurs, pendant que les fils servent exclusivement à exprimer qu'il y a continuité dans la succession de ces valeurs; comme c'est expliqué dans notre *Teorica susdite*.

de cette surface, comme valeur de  $Z$ . La même chose devra donc arriver dans le lieu fondamental (fig. 7").

Dans la surface monodromique les points qui portent une même valeur pour  $Z$  sont disposés l'un au dessus de l'autre. Quelle est la disposition respective de ces points dans le lieu fondamental? Pour la reconnaître, désignons par  $z$  et  $z'$  les valeurs de  $z$  correspondant à une même valeur  $Z$  de  $Z$ .<sup>1</sup> Nous pourrons désigner nos deux points par  $(z, Z)$  et  $(z', Z)$ , soit qu'on les conçoive dans la surface monodromique que dans le lieu fondamental. En les concevant dans la surface monodromique nous savons que les valeurs du radical  $y$  sont contraires entre elles. Par conséquent nous aurons

$$\frac{dz}{dZ} + \frac{dz'}{dZ} = 0$$

d'où

$$z + z' = \text{Const.}$$

Pour trouver cette constante, imaginons que nos deux points superposés s'approchent p. e. du point de ramification  $\infty$ . Nous savons qu'aux points  $\alpha$  et  $\alpha'$  (fig. 7) les valeurs  $z$  et  $z'$  deviennent  $\infty$  et  $2P'i$ . Nous aurons donc

$$(16) \quad z + z' = 2P'i.$$

Cette relation, interprétée dans le lieu fondamental, nous dit que les points de ce lieu, qui portent la même valeur pour  $Z$ , sont disposés symétriquement par rapport au point  $P'i$  du plan  $z$  ou, ce qui est la même chose, par rapport au centre du rectangle  $ABCD$ .

L'un des points, soit  $(z, Z)$ , étant fixé, l'équation (16) suffit pour déterminer  $(z', Z)$  dans le cas (10); mais non dans le cas (13). Dans ce dernier cas, il faut aussi savoir dans quelle couche doit être le point  $(z', Z)$ . Or, on reconnaît tout-de-suite qu'il est dans la même couche que  $(z, Z)$ . Il suffit, à cet effet, de faire aller  $(z, Z)$  à l'infini. Le point  $(z', Z)$ , superposé à  $(z, Z)$  dans la surface monodromique, devra aller lui aussi à l'infini, et par le chemin superposé à celui qui sera décrit par  $(z, Z)$ . Dans le lieu fondamental les deux points devront aller à

<sup>1</sup> Pour fixer les idées, supposons que  $z'$  soit la valeur existante dans la couche supérieure.

l'infini en suivant deux chemins satisfaisant à la condition (16), c'est-à-dire par deux chemins symétriques par rapport au centre du rectangle. Si  $(z, Z)$  va, par exemple, dans le lieu fondamental à l'infini parallèlement à l'axe réel positif,  $(z', Z)$  y devra aller parallèlement à l'axe réel négatif. Cela ne serait pas possible si les deux points de départ n'étaient pas dans la même couche; car l'un des points mobiles serait arrêté par le bord  $BC$  ou  $DA$ .

Pour la fonction  $Z$  du cas (10) on sait bien déjà que, pour en représenter la continuation en dehors du lieu fondamental, on n'a qu'à imaginer les lieux congruents au fondamental, chargés des mêmes valeurs de  $Z$  dans les points homologues. Il y a quatre lieux congruents et joints au fondamental, le long respectivement des quatre côtés  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$ . A chacun de ceux-ci on joindra trois autres lieux; et ainsi de suite.

Tous ces lieux congruents, en nombre infini, constituent une *surface complète* (le réseau des parallélogrammes des périodes, recouvrant une seule fois tout le plan  $z$ ) qui représente complètement la relation (10); c'est-à-dire, qui a la propriété que chacun de ses points représente une solution  $(z, Z)$  de l'équation (10), et que chaque solution de cette équation y est représentée par un point.<sup>1</sup>

Revenons à l'intégrale de 2<sup>me</sup> espèce. Pour représenter sur le plan  $z$  la continuation de sa fonction inverse  $Z$ , on joindra au lieu fondamental, le long des côtés  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$ , comme précédemment, quatre

---

<sup>1</sup> Cette *surface complète* peut être aussi conçue comme étendue sur le plan  $Z$ . Pour l'obtenir sous cette forme, on doit s'imaginer de joindre à notre surface monodromique le long des quatre bords  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  respectivement quatre surfaces également formées et dont les points homologues, portant les mêmes valeurs pour  $Z$  et le radical, portent pour  $z$  les valeurs que l'on obtiendrait par l'intégration de la différentielle (11) en suivant des chemins continus aboutissant à ces points homologues, mais ayant toujours pour origine le point qui a servi d'origine dans la surface monodromique fondamentale. Il va sans dire que, à chacune des quatre surfaces nouvelles, que l'on a joint à la surface monodromique fondamentale, on doit en joindre trois autres, et ainsi de suite indéfiniment. De cette manière on obtient au dessus d'un même point du plan  $Z$  une infinité de points appartenant respectivement aux innombrables couches de cette surface complète. Ces points portent les diverses valeurs de  $z$  qui correspondent, d'après (10), à une même valeur de  $Z$ . On sait que ces valeurs de  $z$  ne diffèrent des deux qui se trouvent dans la surface monodromique fondamentale que par les multiples des périodes correspondant aux nombres de fois que les chemins d'intégration auront dû traverser les lignes de coupure. Cela est en évidence dans la surface complète conçue comme étendue sur le plan  $z$ .

lieux congruents chargés des mêmes valeurs de  $Z$  dans les points homologues; et à ces quatre lieux on joindra les autres lieux successifs, et ainsi de suite jusqu'à recouvrir tout le plan  $z$  avec les rectangles homologues de  $ABCD$ .

Ces rectangles constituent une seule couche, un plan entier, comme précédemment. Mais à présent chacun d'eux tient avec soi (au dessous de soi, pour fixer les idées) un plan.

Par conséquent, la surface *complète* qui représente l'équation (13), est constituée par le plan ou couche des rectangles, et par l'infinité des plans appartenant à chaque rectangle. Ces derniers plans n'ont entre eux aucune connexion; chacun d'eux est *exclusivement* en connexion avec son propre rectangle le long d'une ligne de passage, que l'on peut toujours s'imaginer comme étant la ligne homologue de celle marquée dans la fig. 7''.

A présent, on peut constater que chaque point de ramification appartient effectivement à trois couches. Par exemple, le point de la fig. 7'', où  $z = 0$  et  $Z = 0$  appartient simultanément à la couche des rectangles, au plan du lieu fondamental et au plan faisant partie du lieu congruent qui est joint au fondamental le long de côté  $AB$ . On voit, tout-de-suite, que, si un point, mobile dans ces lieux réunis, tourne autour de ce point de ramification, il passe de l'une à l'autre des trois couches que nous venons de nommer et revient au point de départ après trois tours.

Au dessus d'un point quelconque du plan  $z$  nous avons dans la surface complète une infinité de points. Cela nous dit que notre fonction  $Z$  n'est pas uniforme, comme celle du cas (10), mais  $\infty$ -forme.

Mais les valeurs de  $Z$  dans tous ces points superposés sont-elles effectivement différentes entre elles? Certainement, en général. C'est ce que l'on reconnaîtra bien vite, par exemple, de la manière suivante.

Chaque lieu congruent est entouré de lieux congruents chargés des mêmes valeurs de  $Z$ , pas autrement que s'il était le lieu fondamental. Partant, les valeurs de  $Z$  qui se trouvent au dessus d'un point quelconque du plan  $z$  sont les mêmes que celles qui se trouvent au dessus de son congruent qui est dans l'étendue du rectangle fondamental.<sup>1</sup> Que  $v$  soit donc un point du plan  $z$  contenu dans cette étendue. Au dessus

<sup>1</sup> Nous nommons fondamentaux le rectangle et le plan qui composent le lieu fondamental.

de  $v$  nous voyons, avant tout, la valeur, que je nommerai  $V$ , déposée dans le rectangle fondamental et la valeur  $V_{00}$  déposée dans le plan fondamental. Ces deux valeurs sont diverses entre elles. Et puis, nous voyons les valeurs déposées dans les plans appartenant aux lieux congruents. Soit  $V_{m,n}$  celle qui est déposée dans le plan appartenant au lieu congruent qui viendrait coïncider avec le fondamental par une translation exprimée par

$$m \cdot 2P + n \cdot 2iP'.$$

Evidemment,  $V_{m,n}$  sera la même valeur que l'on trouve dans le point du plan fondamental où la valeur de  $z$  est

$$v + m \cdot 2P + n \cdot 2iP'.$$

Par conséquent, les valeurs de  $Z$ , qui se trouvent au dessus du point  $z = v$  dans les plans qui n'appartiennent pas au lieu fondamental, sont égales aux valeurs existantes pour  $Z$  dans tous les sommets du réseau des périodes tracé dans le plan fondamental, à partir du point-sommet qui est au dessus de  $\bar{z} = v$ . On voit bien que ces valeurs sont, en général, diverses entre elles; la condition de l'égalité étant la symétrie de position par rapport au centre du rectangle fondamental.

### § 8.

Nous allons déterminer le lieu fondamental de la fonction  $Z$  inverse de l'intégrale de 3<sup>me</sup> espèce

$$(17) \quad z = \int_0^Z \frac{dz}{(Z-a)\sqrt{Z(1-Z)(1-k^2Z)}}.$$

La surface (fig. 7), qui nous a servi pour les intégrales de 1<sup>re</sup> et de 2<sup>me</sup> espèce, n'est plus monodromique pour l'intégrale de 3<sup>me</sup> espèce. Car, il y a maintenant deux points dans la surface autour de chacun desquels l'intégration de la différentielle

$$(18) \quad dz = \frac{dz}{(Z-a)\sqrt{Z(1-Z)(1-k^2Z)}}$$

ne donne pas zéro pour résultat.

Ces points, que pour abréger je nommerai  $\varepsilon'$  et  $\varepsilon$ , sont ceux où  $Z = a$ . Dans le voisinage de  $\varepsilon'$ , que je suppose dans la couche supérieure, la différentielle se comporte comme la fraction simple

$$(19) \quad \frac{i}{M_a} \frac{dZ}{Z-a};$$

et dans le voisinage de  $\varepsilon$ , comme

$$-\frac{i}{M_a} \frac{dZ}{Z-a};$$

$M_a$  désignant le module du radical pour  $Z = a$ .<sup>1</sup> Par conséquent, si  $Z$  fait un tour positif autour de  $\varepsilon'$ , l'intégration de (18) donnera

$$-\frac{2\pi}{M_a}.$$

Un tour positif autour de  $\varepsilon$  produirait la même grandeur avec le signe contraire.

Pour changer la dite surface en surface monodromique pour l'intégrale (17), il faut donc la couper de manière à empêcher  $Z$  de tourner autour de l'un de ces points sans tourner en même temps autour de l'autre. Nous la couperons suivant une ligne qui va de  $\varepsilon$  à  $\varepsilon'$  sans atteindre nulle part les bords  $AB, BC, CD, DA$ . Il s'ensuit que le contour de notre nouvelle surface monodromique sera formé de deux parties séparées: la portion constituée par les quatre bords  $AB, BC, CD, DA$ ; et la portion constituée par les deux bords de la nouvelle (troisième) coupure. Notre surface ne sera pas simplement, mais doublement connexe.<sup>2</sup>

Maintenant, il s'agit de déterminer le chemin de  $z$  sur le plan  $z$ , pendant que  $Z$  parcourt tout le contour de cette surface.

D'après les §§ 6 et 7, nous savons déjà que, pendant que  $Z$  décrira la portion  $AB + BC + CD + DA$  du contour,  $z$  décrira sur son plan

<sup>1</sup> La fig. 6 nous dit que les valeurs du radical en  $\varepsilon'$  et  $\varepsilon$  sont  $-M_a i$  et  $M_a i$ . La fraction (19) est le seul terme du développement de  $dz$  suivant les puissances croissantes de  $Z - a$  qui devient infini en  $\varepsilon'$ . L'intégrale y devient infinie comme  $\frac{i}{M_a} \log(Z - a)$ .

<sup>2</sup> Ce qui importe c'est qu'elle soit *monodromique*. On verra qu'il ne convient pas de s'en rapporter toujours à une surface monodromique à connexion simple. '

un contour parallélogrammique dont les sommets, c'est-à-dire les points transformés de  $A, B, C, D$ , représentent sur le plan  $z$  les grandeurs

$$-P, P, P + 2Pi, -P + 2Pi;$$

$P$  et  $P'$  désignant maintenant les intégrales rectilignes:

$$(20) \quad P = \int_0^1 \frac{dZ}{(Z-a)M}, \quad P' = \int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{k^2}} \frac{dZ}{(Z-a)M}.$$

Il reste à trouver le chemin de  $z$ , pendant que  $Z$  parcourt les bords de la nouvelle coupure.

Pour fixer les idées et pour n'avoir à faire qu'avec des valeurs réelles pour  $Z$ , nous supposerons maintenant que la quantité  $a$  est réelle<sup>1</sup> et négative et que la coupure est faite le long de l'axe réel négatif, dans l'une comme dans l'autre couche.<sup>2</sup>

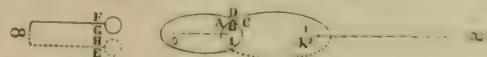
Nous nous imaginerons aussi, pour plus de clarté, comme dans les figures 1 et 2, des cercles infiniment petits autour des points  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$ , et nous considérerons ces cercles comme faisant partie du contour de notre surface monodromique, comme si les surfaces des cercles y manquaient.

Partant, nous pourrons exprimer notre surface monodromique par la fig. 8, où l'on doit s'imaginer que les deux cercles autour de  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  sont l'un au dessous de l'autre, et que les lignes qui vont de ces cercles à  $\infty$  sont sur l'axe réel négatif.

La portion de contour que  $Z$  doit décrire est formée par les bords  $EF$  et  $GH$  de la coupure et par les cercles  $FG$  et  $HE$ .

Concevons  $Z$  partant du point initial,  $\alpha$ , et marchant sur l'axe réel négatif dans la couche inférieure jusqu'à atteindre le petit cercle  $HE$ ,

Fig. 8 (sur le plan  $Z$ ).



<sup>1</sup> Les côtés du rectangle  $ABCD$  deviendront des droites parallèles aux axes, comme dans les paragraphes précédents.

<sup>2</sup> En partant de  $\varepsilon$ , la ligne de coupure doit donc aller, en suivant l'axe réel négatif, au point  $\infty$ ; ici elle doit passer dans la couche supérieure et parvenir, toujours en suivant le dit axe, au point  $\varepsilon'$ .

dont je nommerai  $\rho$  le rayon. En même temps,  $z$  partira de son zéro, au milieu du côté  $AB$  du lieu fondamental (fig. 8'), et marchera suivant son axe imaginaire positif jusqu'au point (milieu de la droite  $HE$ ) qui représente la grandeur

$$(21) \quad \int_0^{a+\rho} \frac{dZ}{(Z-a)Mi},$$

laquelle est imaginaire positive,  $dZ$  étant négative et  $Z-a$  positive pendant le mouvement.

$Z$  fait ensuite un demi-tour négatif autour du point  $\varepsilon$  et parvient au point  $E$  (fig. 8). En même temps,  $z$  décrit une droite représentative de la quantité négative  $-\frac{\pi}{M_a}$ . Ce sera la moitié de la droite  $HE$  (fig. 8') qui termine en  $E$ .

$Z$  marchant de  $E$  à  $\infty$  sur l'axe réel négatif,  $z$  décrira la droite  $E\zeta$  (fig. 8') représentative de l'intégrale

$$(22) \quad \int_{a-\rho}^{\infty} \frac{dZ}{(Z-a)Mi};$$

qui est imaginaire négative,  $dZ$  et  $Z-a$  étant réelles négatives le long de ce chemin.<sup>1</sup>

$Z$  marchant de  $\infty$  au point  $F$  sur l'axe réel négatif dans la couche supérieure,  $z$  décrira la droite  $\zeta F = E\zeta$ ; car, les valeurs de  $dZ$  et du radical étant contraires de celles qui avaient lieu dans la marche précédente (entre  $\infty$  et  $E$ ), la différentielle  $dz$  reçoit les mêmes valeurs que dans cette marche.

$Z$  décrivant le cercle  $FG$ , c'est-à-dire, faisant un tour négatif autour

<sup>1</sup> Nous désignons par  $\zeta$  le point et aussi (comme à l'ordinaire) la valeur de  $z$  en ce point. Pour avoir cette valeur on n'a qu'à écrire la somme des expressions des trois droites que  $z$  a parcourues en partant de  $\infty$  pour parvenir à  $\zeta$ . La première droite est exprimée par l'intégrale (21), la deuxième par  $-\frac{\pi}{M_a}$  et la troisième par l'intégrale (22). Mais on trouvera bientôt une expression plus simple pour  $\zeta$ .

du point  $\varepsilon'$ ,  $z$  décrira la droite  $FG$  qui représente, comme  $EH$ , la grandeur réelle  $\frac{2\pi}{M_a}$ .

$Z$  décrivant le bord  $GH$ , dont la première moitié est dans la couche supérieure et l'autre dans l'inférieure,  $z$  décrira la droite  $GH = FE$ ; dont le milieu  $\zeta'$  correspond au point du bord  $GH$  de la surface monodromique où  $Z = \infty$ .<sup>1</sup>

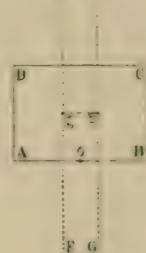
Enfin,  $Z$  décrivant le demi-cercle autour du point  $\varepsilon$ , pour revenir au point sur l'axe réel d'où elle a commencé à décrire la portion  $EFGH$  du contour,  $z$  décrira la moitié de la droite  $HE$ , qui restait pour compléter le périmètre fermé  $EFGH$  de la fig. 8'.  
Fig. 8  
(sur le plan  $z$ ).

Voilà donc (fig. 8') le contour complet de notre lieu fondamental. Il est constitué par les deux périmètres séparés  $ABCD$  et  $EFGH$ . Les côtés  $HE$  et  $FG$  de ce dernier doivent être conçus à l'infini, si l'on veut qu'ils correspondent aux deux cercles dans leur état limite, c'est-à-dire lorsque les cercles seront réduits respectivement aux points  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$ .

Le lieu fondamental est composé de deux couches: la couche ou parallélogramme  $ABCD$ , et la couche ou bande logarithmique  $EFGH$ . Pour s'en persuader, on n'a qu'àachever la détermination du lieu par la recherche de ses points de ramification.

Comme on sait, autour de points où les valeurs de  $z$  et  $Z$  sont finies, il ne peut y avoir de ramification que si le rapport des différentielles est nul ou infini. Pour  $z$  et  $Z$  finies, ce rapport est nul ou infini pour  $Z = 0$ ,  $Z = 1$ ,  $Z = \frac{1}{k^2}$ . Mais on voit tout-de-suite que pour ces valeurs de  $Z$  il n'y a pas de ramification.

Venons aux points où  $z$  et  $Z$  ne sont pas simultanément finies. Nous n'avons pas à nous occuper des points où  $Z = a$ ,<sup>2</sup> lesquels, si les cercles



<sup>1</sup> Dans cette surface nous avons deux points où la valeur de  $Z$  est  $\infty$ . Ce sont les deux points placés au dessus du point  $\infty$  du plan (sphère)  $Z$ , l'un desquels appartient au bord  $EF$  et l'autre au bord  $GH$  de la coupure. Dans la surface monodromique précédente (fig. 7) on n'avait qu'un seul point (le point de ramification) au dessus du point  $\infty$  du plan  $Z$ .

<sup>2</sup> Nous ferons ailleurs des considérations sur cette classe de points, où l'intégrale devient infinie logarithmiquement.

autour des points  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  n'étaient pas réduits à leurs centres, n'appar-  
tiendraient pas même au lieu exprimé par la fig. 8'.

Il ne reste donc qu'à considérer les points où  $Z = \infty$ ; car, partout  
ailleurs,  $Z$  est finie en même temps que  $z$ .

Si l'on veut avoir à faire avec des valeurs finies, on peut poser  
 $Z = \frac{1}{Z'}$ , et chercher comment se comporte  $z$  autour de  $Z' = 0$ . L'équa-  
tion (18) nous donnera

$$\frac{dz}{dZ'} = \frac{-Z'}{(1 - aZ')\sqrt{Z'(Z' - 1)(Z' - k^2)}} = c_0 Z'^{\frac{1}{2}} + c_1 Z'^{\frac{3}{2}} + c_2 Z'^{\frac{5}{2}} + \dots$$

Pour  $Z' = 0$ , c'est-à-dire pour  $Z = \infty$ , nous avons déjà vu que  $z$   
devient  $\zeta$  ou  $\zeta'$ . En intégrant l'équation précédente dans le voisinage  
de  $\zeta$ , de ce point jusqu'à un point quelconque, on obtient

$$z - \zeta = \frac{2}{3} c_0 Z'^{\frac{3}{2}} + \dots$$

d'où, si l'on veut

$$Z' = \left[ \frac{3(z - \zeta)}{2c_0} \right]^{\frac{2}{3}} + \dots$$

Partant, lorsqu'on tournera autour du point  $\zeta$  du lieu fondamental, on  
ne reviendra à une même couple de valeurs de  $z$  et  $Z'$  (ou  $z$  et  $Z$ ),  
c'est-à-dire à une même point de ce lieu, qu'après trois tours. Ce point  
est donc un *point de ramification double*.

Même conclusion par rapport au point  $\zeta'$ .

Si l'on conçoit comme ligne de passage de l'une à l'autre couche  
la *droite*  $\zeta\zeta'$ , le lieu fondamental de la fonction  $Z$  pour le cas (17) sera  
exprimé complètement par la fig. 8'; où l'on peut regarder le parallélo-  
gramme comme superposé à la bande logarithmique.

Mais il reste à justifier la position que nous avons donnée à  $\zeta$  et  $\zeta'$   
dans cette figure. Car, nous avons vu que la partie réelle de  $\zeta$  est  $-\frac{\pi}{M_a}$ ;  
mais nous n'avons pas encore reconnu que sa partie imaginaire est  $P'i$ .  
Cette partie est la somme des intégrales (21) et (22); il faut donc dé-  
montrer que cette somme est égale à  $P'i$ .

A cet effet, il suffit de remarquer que, les lignes  $MNN'M'$  et  $R'S'SR$   
(fig. 9) constituant le contour total d'une portion de notre surface Rie-

mannienne dans laquelle il n'y a aucun infini logarithmique pour l'intégrale (17), la valeur de cette intégrale prise le long de ce contour est nulle. Et cela est vrai, quand même la ligne  $R'S'SR$  se raccourcit jusqu'à ne recouvrir que l'axe réel entre  $1$  et  $\frac{1}{k^2}$ , et la ligne  $MNN'M'$  s'élargit jusqu'à recouvrir tout l'axe réel négatif. Or, supposons ces lignes dans ces positions finales. Chacune d'elles se composera de deux parties, dont l'une sera dans la couche supérieure et superposée à l'autre qui sera dans la couche inférieure. Mais plus précisément, par rapport à  $MNN'M'$ , les points  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  devant être laissés au dehors de notre portion de surface, nous devons imaginer que la partie  $MN$  vient couvrir l'axe réel négatif de  $0$  à  $a + \rho$  et de  $a - \rho$  à  $\infty$ , et former un demi-cercle de rayon  $\rho$  autour du point  $\varepsilon$ ; et que  $M'N'$  vient couvrir l'axe réel négatif dans les mêmes étendues, et former un demi-cercle autour du point  $\varepsilon'$ . Ces demi-cercles ne sont pas superposés l'une à l'autre; ils recouvrent les deux moitiés d'un cercle du plan  $Z$ .

Maintenant, nous n'avons qu'à égaler à zéro la somme des intégrales prises le long des diverses parties du contour total que nous venons d'indiquer.

Le long des trois parties de  $MN$ , l'intégration donnera:

$$\int_0^{a+\rho} \frac{dZ}{(Z-a)Mi} - \frac{\pi}{M_a} + \int_{a-\rho}^{\infty} \frac{dZ}{(Z-a)Mi};$$

le long des trois parties de  $N'M'$ , elle donnera:<sup>1</sup>

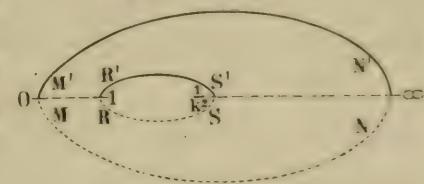
$$\int_{a-\rho}^a \frac{dZ}{(Z-a)Mi} + \frac{\pi}{M_a} + \int_0^{a+\rho} \frac{dZ}{(Z-a)Mi};$$

<sup>1</sup> Pour la partie de  $N'M'$  qui recouvre l'axe entre  $\infty$  et  $a - \rho$ , l'intégration donne

$$\int_a^{-\rho} \frac{dZ}{(Z-a)(-Mi)}.$$

Mais, on peut échanger entre elles les limites de l'intégrale en changeant en même temps le signe de la différentielle. Même remarque pour les autres intégrales.

Fig. 9 (sur le plan  $Z$ ).



et le long des deux lignes  $R'S'$  et  $SR$ :

$$\int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{dZ}{(Z-a)Mi} + \int_{-1}^{\frac{1}{k^2}} \frac{dZ}{(Z-a)Mi}.$$

En ajoutant et égalant à zéro, on obtient, d'après (20):

$$\int_0^{a+\rho} \frac{dZ}{(Z-a)Mi} + \int_{a-\rho}^{\infty} \frac{dZ}{(Z-a)Mi} = P'i.$$

### § 9.

Ce que nous venons de faire pour l'inversion des intégrales elliptiques peut se répéter relativement à toute intégrale Abélienne, c'est-à-dire, pour toute intégrale de la forme

$$(23) \quad z = \int^Z R(Z, U) dz,$$

où  $R(Z, U)$  signifie une fonction rationnelle de  $Z$  et  $U$ , et  $U$  une fonction algébrique de  $Z$  dans le sens le plus général.<sup>1</sup>

Lorsque la différentielle est rationnelle, le lieu fondamental, considéré seulement sous le point de vue de la forme, peut être conçu comme composé d'éléments de deux espèces, je veux dire (§ 5) de plans et de bandes logarithmiques. Pour composer les lieux fondamentaux des fonctions inverses des intégrales (23), une nouvelle forme d'éléments est nécessaire; mais une seule. Ce sont les parallélogrammes des couples de périodes qui naissent de la connexion multiple de la fonction algébrique.<sup>2</sup>

Le lieu fondamental de la fonction  $Z$ , définie par l'équation (23),

<sup>1</sup> Voir page 22 et 255, 256 de notre *Teorica delle funzioni di variabili complesse*.

<sup>2</sup> Le nombre de ces périodes est originairement toujours pair. En faisant dans la surface Riemannienne, représentative de la fonction algébrique, ce système de coupures que RIEMANN désigne par les symboles  $a_1$  et  $b_1$ ,  $a_2$  et  $b_2$ , etc., dans le § 19 de sa *Theorie der Abel'schen Functionen* (dont nous omettons ici les coupures  $c_1$ , etc.), on voit immédiatement que les quatre bords de chaque couple  $a$  et  $b$  se transforment dans les quatre côtés d'un parallélogramme.

pourra être conçu comme composé par autant de plans que l'intégrale (23) a d'infinis algébriques, par autant de bandes logarithmiques que l'intégrale a d'infiris logarithmiques moins un, et par autant de parallélogrammes que l'intégrale a de couples de périodes provenant de la connection algébrique. Ces couches se continuent l'une dans l'autre autour de points de ramification, dont le nombre (en points *simples*) égale le double du nombre des plans et parallélogrammes augmenté du nombre des bandes moins deux.

En faisant abstraction de la *charge*, ou système des valeurs portées par les points, on peut dire que ces trois formes d'éléments correspondent aux trois espèces de fonctions  $Z$  uniformes contenues dans la classe (23). Car, si une fonction  $Z$ , définie par une équation (23), est uniforme, son lieu fondamental (joint, lorsqu'il a des côtés, à tel nombre que ce soit de lieux congruents), ne pouvant avoir aucun point de ramification, sera formé d'une seule couche, c'est-à-dire, d'un plan, ou d'une bande logarithmique, ou d'un parallélogramme. Et la fonction uniforme sera rationnelle, ou simplement périodique, ou doublement périodique.

Quant à la forme des parallélogrammes, on remarquera qu'il n'y a d'essentiel que les différences de position (n'importe la nature géométrique des côtés, c'est-à-dire, les périodes).

Ces couples de périodes et les diverses périodes logarithmiques sont, avec les différences de position des points de ramification, les données essentielles d'un lieu fondamental de la classe (23).

Si toutes les périodes d'une intégrale (23) se réduisent à zéro, les bandes et les parallélogrammes s'évanouissent, et le lieu fondamental peut être conçu comme réduit à une surface Riemannienne usuelle, représentative de la fonction  $Z$ , qui alors est algébrique.

Les lieux fondamentaux, que nous avons trouvés dans l'inversion des intégrales elliptiques, nous offrent les plus simples combinaisons du parallélogramme avec les plans et les bandes.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Il n'en serait pas de même, si l'on prenait les intégrales de 2<sup>me</sup> et 3<sup>me</sup> espèce sous la forme typique de LEGENDRE.

Du reste, la forme sous laquelle nous avons pris ici les intégrales de 2<sup>me</sup> et 3<sup>me</sup> espèce est telle que la connection du parallélogramme avec le plan ou la bande n'est pas effectuée de la manière la plus générale, c'est-à-dire, le long d'une ligne de passage aboutissant à deux points communs aux deux couches, sans d'autres particularités. Pour les

La plus simple combinaison de parallélogrammes entre eux nous est offerte par l'intégrale considérée par JACOBI dans le Mémoire qui a été l'origine de nos recherches.<sup>1</sup> Car, pour la fonction  $Z$  inverse de cette intégrale, le lieu fondamental est constitué seulement par *deux* parallélogrammes.

Si l'on veut supposer, avec JACOBI, que  $\chi, \lambda, \mu$  sont des quantités réelles, et si  $\alpha, \beta$  sont aussi deux quantités réelles, ou deux quantités purement imaginaires; alors,  $Z$  marchant sur son axe réel,  $dz$  sera toujours réelle ou purement imaginaire, et, par conséquent,  $z$  devra toujours marcher parallèlement à l'un ou à l'autre axe de son plan. Partant, si l'on réduit la surface Riemannienne, représentative du radical, à être monodromique

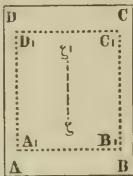
pour l'intégrale par des coupures sur l'axe réel, les côtés du lieu fondamental deviendront parallèles aux axes du plan  $z$ . Ce lieu se composera donc de deux rectangles rectilignes  $ABCD$  et  $A_1B_1C_1D_1$  (fig. 10) également orientés, que nous pouvons concevoir se continuant l'un dans l'autre le long d'une ligne de passage aboutissant à deux points  $\zeta$  et  $\zeta'$  de ramification. Les grandeurs  $\zeta$  et  $\zeta'$  sont les valeurs de l'intégrale dans les deux points de la surface monodromique où  $\alpha + \beta Z$  est nul.

---

formes (13) et (17) il survient la particularité que la différence de position de ces points communs est une période. Par conséquent, dans les surfaces complètes, dont nous avons commencé de parler au § 7, ces points deviennent communs à trois couches, c'est-à-dire, se comportent en points de ramification, non *simples*, mais *doubles*.

<sup>1</sup> Voir cette intégrale page 346.

Fig. 10

(sur le plan  $z$ ).

## SUR LES UNITÉS ÉLECTRIQUES.

Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur

PAR

J. BERTRAND

à PARIS.

MAXWELL dans son traité d'électricité et de magnetisme a, le premier je crois, appelé l'attention sur la contradiction entre les deux systèmes d'unités électriques, dits système électrodynamique et système électrostatique. Cette différence est telle, pour la caractériser par un seul exemple, que dans le premier, la résistance d'un fil conducteur est assimilée à une vitesse et dans le second à l'inverse d'une vitesse; de telles divergences qui d'ailleurs portent sur toutes les grandeurs sans exception, ne peuvent être acceptées que si considérant les unités comme arbitraires, on ne leur impose comme impérieusement nécessaire qu'une seule condition, celle d'être rigoureusement définies. Tout système alors est acceptable et l'on peut discuter sur la simplicité, non sur la légitimité de chacun.

Un système d'unités cependant doit remplir une condition oubliée jusqu'ici par les savants auteurs qui ont traité cette importante question. Les unités doivent être tellement choisies qu'il puisse exister des formules exprimant les théorèmes de la science et invariables malgré le changement des unités fondamentales. Par exemple, la surface d'un rectangle est le produit de la base par sa hauteur

$$S = B \times H.$$

Cette formule ne serait pas possible et aucune autre indépendante du choix des unités ne la remplacerait, s'il n'existaient pas une dépendance

convenue entre l'unité de longueur arbitraire et l'unité de surface qui s'en déduit.

En mécanique, la force centripète a pour expression

$$N = \frac{mv^2}{\rho}.$$

Cette formule ne serait plus vraie et aucune autre ne serait possible et commune à tous les choix d'unités, si l'on n'avait établi une dépendance entre l'unité de force, l'unité de vitesse et les unités qui restent arbitraires, celle de temps, de longueur et de masse. On a, d'après les notations de MAXWELL

$$\text{Force} = MLT^{-2}$$

$$\text{Vitesse} = \frac{L}{T}$$

et grâce à ces conventions, on peut établir les équations de la mécanique qui restent invariables, ainsi que les formules résolvant un problème quelconque, quelles que soient les unités  $L$ ,  $M$  et  $T$ . La remarque est fort importante.

Supposons qu'un problème ait été résolu, dans lequel l'inconnue soit un temps  $t$ , et les données, une force  $f$ , une longueur  $l$ , et une masse  $m$ ; on aura:

$$t = F(l, m, f)$$

et si l'on change d'unités en rendant l'unité de longueur  $\alpha$  fois, l'unité de temps  $\beta$  fois et l'unité de masse  $\gamma$  fois plus petite, nous devrons avoir, quels que soient  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$

$$t\beta = F\left(l\alpha, m\gamma, f \frac{\alpha\gamma}{\beta^2}\right)$$

d'où l'on déduit sans peine,

$$F(l, m, f) = K\sqrt{\frac{ml}{f}}$$

$K$  étant un nombre.

Si  $t$  est la durée de l'oscillation d'un pendule simple, de longueur  $l$ , de masse  $m$  et de poids  $p$ , on en conclut

$$t = \varphi(\alpha)\sqrt{\frac{lm}{p}} = \varphi(\alpha)\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$\alpha$  étant l'angle d'écartement.

Si  $t$  est le temps de la vibration d'une corde de longueur  $l$ , de masse  $m$ , tendue par un poids  $p$ ; on aura

$$t = K \sqrt{\frac{lm}{p}}$$

$K$  étant un nombre, et aucune autre formule n'est possible.

Pour accepter ou rejeter un système d'unités électriques, il est important de savoir si, dans la solution des problèmes, mis en équations par la théorie, on peut, dans le système étudié, obtenir des formules indépendantes du choix des unités fondamentales. Le système électrodynamique remplit cette condition, le système electrostatique ne la remplit pas.

Sans remonter d'abord aux conventions fondamentales, pour les discuter, je prends les systèmes tels qu'ils sont acceptés et je me borne à rappeler les dimensions de deux unités importantes, l'intensité, et la résistance. On a, d'après les conventions, en nommant  $J$  l'intensité et  $R$  la résistance, dans le système électrodynamique

$$J = \frac{L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{T}, \quad R = \frac{L}{T}.$$

Je ne crois pas utile de rappeler la signification de ces symboles.

Pour le système electrostatique on a,

$$J = \frac{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}}}{T^2}, \quad R = \frac{T}{L}.$$

Supposons qu'un problème soit résolu dans lequel une partie mobile d'un courant étant attirée par une partie fixe du même courant, on calcule le temps  $T$  nécessaire à un certain mouvement; on aura nécessairement

$$(A) \qquad T = F(L, R, M, J)$$

$L$  étant la longueur de la partie mobile,  $R$  la résistance totale du circuit,  $M$  la masse de la partie mobile et  $J$  l'intensité du courant telle que la source électrique le maintiendrait si le mouvement ne produisait pas une induction qui le trouble.

La fonction  $F$  dépendra de la définition géométrique du système.

Si l'on adopte le système électrodynamique, et que les unités de

longueur, de temps et de masse, soient divisées par les facteurs arbitraires  $\alpha, \beta, \gamma$  on devra avoir

$$\beta T = F\left(\alpha L, \frac{\alpha R}{\beta}, \gamma M, \frac{J\alpha^{\frac{1}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}}}{\beta}\right)$$

et cette équation, on le démontre bien aisément, ne peut être satisfaite que si la fonction  $F$  est de la forme

$$F = \frac{L}{R} \psi\left(\frac{LJ^2}{MR^2}\right).$$

On peut aller plus loin: Si  $R$  est très grand, l'influence de l'induction est insensible, le temps du mouvement, par conséquent la fonction  $F$ , ne dépend donc plus de  $R$  et l'on doit avoir, dans ce cas,

$$\psi = K \sqrt{\frac{MR^2}{LJ^2}}$$

ce qui donne

$$T = K \frac{L}{R} \sqrt{\frac{MR^2}{LJ^2}} = K \sqrt{\frac{LM}{J^2}}$$

$K$  étant une constante.

La fonction  $\psi$  se réduisant à  $\sqrt{\frac{MR^2}{LJ^2}}$  quand  $R$  est infini, peut être représentée par

$$\sqrt{\frac{MR^2}{LJ^2}} \left[ 1 + \psi_1 \left( \frac{LJ^2}{MR^2} \right) \right]$$

$\psi_1$  devenant nul avec la variable dont elle dépend.

Telles sont les conséquences du système électrodynamique.

Acceptons maintenant le système électrostatique. Le changement des unités remplacera l'équation (A) par

$$\beta T = F\left(\alpha L, \frac{\beta R}{\alpha}, \gamma M, \frac{J\gamma^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{3}{2}}}{\beta^2}\right)$$

et cette équation n'est possible que si l'on a

$$T = KRL \Psi\left(\frac{J^2 R^4 L}{M}\right)$$

$K$  étant un nombre.

Si l'on suppose, comme précédemment, que  $R$  soit très grand,  $F$  devant

devenir indépendant de  $R$ , il faut que  $\Psi$  devienne de la forme  $\sqrt[4]{\frac{M}{J^2 R^4 L}}$  et l'on aurait alors

$$T = K \frac{L^{\frac{3}{4}} M^{\frac{1}{4}}}{J^{\frac{1}{2}}}$$

et dans le cas général

$$T = K \frac{L^{\frac{3}{4}} M^{\frac{1}{4}}}{J^{\frac{1}{2}}} \left[ 1 + \Psi_1 \left( \frac{M}{J^2 R^4 L} \right) \right]$$

$\Psi_1$  s'annulant avec la variable dont elle dépend.

Cette équation est inadmissible: quand  $R$  est infini, les forces mises en jeu ne dépendent pas de  $M$ , le temps, d'après les lois de la mécanique, doit être proportionnel à la racine carrée et non à la racine quatrième de  $M$ .

Si, confiant dans les deux systèmes, on veut concilier les deux formules et écrire

$$KLR\Psi\left(\frac{J^2 R^4 L}{M}\right) = K' \frac{L}{R} \Psi_1\left(\frac{L J^2}{M R^2}\right)$$

il faut, on le démontre aisément, supposer

$$\Psi\left(\frac{J^2 R^4 L}{M}\right) = \sqrt[3]{\frac{M}{J^2 R^4 L}}$$

$$\Psi_1\left(\frac{L J^2}{M R^2}\right) = \sqrt[3]{\frac{M R^2}{L J^2}};$$

on aurait alors

$$T = K_1 \frac{L^{\frac{2}{3}} M^{\frac{1}{3}}}{J^{\frac{2}{3}} R^{\frac{1}{3}}}$$

formule absurde qui donne par exemple  $T$  nul quand  $R$  est infini.

Il est donc démontré que l'un des deux systèmes est inacceptable et que c'est le système électrostatique.

A quoi cela tient-il?

Il eût été facile de le montrer en remontant aux conventions faites pour établir ce système et de réduire cette note à la remarque suivante.

En nommant  $e$  une quantité d'électricité statique, on veut que la force

de répulsion de deux masses égales à  $e$  à la distance  $r$  soit représentée par  $\frac{e^2}{r^2}$ , sans coefficient.

Cela est parfaitement légitime, on en conclut que  $e$  est de la forme

$$e = \frac{L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{T}$$

mais on ajoute: l'intensité d'un courant est mesurée par la quantité d'électricité qui traverse une section dans l'unité de temps, l'intensité  $J$  est donc de la forme  $\frac{e}{T}$ , et l'on écrit

$$J = \frac{L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{T^2}.$$

Il y a là une hypothèse contestable sur l'assimilation d'un courant à un flux d'électricité et une convention sur l'unité de courant. La convention assigne pour dimensions de  $J$

$$J = \frac{L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{T^2}$$

mais la formule d'AMPÈRE, incontestée dans les conséquences pratiques, donne pour action de deux éléments de courant

$$F = \frac{kii' ds ds'}{r^2} \left( \cos \varepsilon - \frac{3}{2} \cos \theta \cos \theta' \right)$$

$K$  étant un nombre,  $\frac{ds ds'}{r^2}$  est un nombre, les cosinus aussi sont des nombres, il faut donc que  $Kii'$  soit une force — et si  $ii'$ , comme on l'exige équivaut à

$$\frac{L^3 M}{T^4},$$

ce produit ne peut représenter une force que si  $K$  est de la forme  $\frac{T^2}{L^2}$ .

Aucun problème ne pourra donc être résolu sans l'introduction d'un coefficient variable avec l'unité de longueur et l'unité de temps.

Le système électrostatique n'est acceptable qu'en vertu de ce principe: toute unité bien définie est légitime. Mais il ne satisfait pas à la condition principale imposée à tout système d'unités, celle de permettre des formules applicables à toutes les hypothèses en laissant indépendantes les trois unités de longueur, de temps et de masse.









QA                   Acta mathematica  
1  
A2575  
v. 8  
Physical &  
Applied Sci.  
Serials

W.M.

PLEASE DO NOT REMOVE  
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

---

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

---

