Darstellung und Begründung

einiger neuerer

Ergebnisse der Funktionentheorie.

Von

Dr. Edmund Landau,

o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen.

Mit 11 Textfiguren.

Berlin.

Verlag von Julius Springer.

1916.

Druck der Dieterichschen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner) in Göttingen.

Vorwort.

Meine Absicht bei Herausgabe dieses Buches ist, einige Früchte meiner Beschäftigung mit der modernen mathematischen Literatur dem Leser zu gute kommen zu lassen. Die Auswahl geschah nach folgenden Gesichtspunkten. Der Sache nach handelt es sich im wesentlichen um diejenigen Problemstellungen aus der Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Variabeln, welche an das Konvergenzverhalten von Potenzreihen auf dem Rande und an die analytische Fortsetzbarkeit der betreffenden Funktionen anknüpfen. Darüber gab es von jeher eine große Literatur; manches ist klassisch und steht in jedem Lehrbuch. In den letzten Jahren sind nun in diesem Gebiete bestimmte Sätze von hoher Eleganz entdeckt worden; Sätze, welche vordem kaum vermutet waren, zum Teil erstmalig auf sehr komplizierte Weise bewiesen und inzwischen auf viel kürzerem Wege erreicht wurden. Die Literatur über solche Fragen ist groß; die einzelnen Abhandlungen sind zum Teil lang, so daß man Mühe hat, das schönste Resultat herauszufinden und den zugehörigen Beweis herauszupräparieren; oft tritt der wesentliche Kern eines Satzes dadurch nicht deutlich hervor, daß dieser gleich in unwichtiger Weise verallgemeinert und mit Parametern belastet erscheint. Ich glaube und wünsche nun, daß die vorliegende Mitteilung von etwa siebenundzwanzig sorgsam ausgewählten, in letzter Zeit gefundenen Sätzen mit vollständigen, einheitlich dargestellten Beweisen die Aufnahme dieser Ergebnisse — welche zum Teil von klassischer Schönheit sind — in Vorlesungen und Lehrbücher zum Nutzen der Anfänger beschleunigen wird; und daß die Forscher zu genauerem Studium der Originalabhandlungen und damit zur Weiterführung jener fruchtbaren Untersuchungen angeregt werden. Oft ist meine vereinfachte Darstellung länger als das Original; das liegt daran, daß ich es dem Leser möglichst leicht machen will und ihm keine Zwischenrechnung überlasse. Daß mein Anteil an diesen Dingen kein rein kompilatorischer ist, wird der Leser sich auch ohne besondere Erwähnung einiger Vereinfachungen denken können, und wenn er Lust bekommt, auf die Originalabhandlungen zurückzugreifen, so wird er sehen, daß auch die eine oder andere Fragestellung von mir herrührte. Als bekannt werden nur die Elemente der Funktionentheorie vorausgesetzt.

Für freundliche Hilfe bei der Korrektur danke ich bestens den Herren Privatdozent Dr. Bernays in Zürich, Prof. Dr. Hartogs in München, Prof. Dr. Knopp in Berlin, Privatdozent Dr. Pólya in Zürich, Dr. Wiarda in Marburg und Direktor Dr. Ziegel in Berlin.

Göttingen, den 17. Mai 1916.

Edmund Landau.

Bezeichnungen.

Im folgenden verstehe ich, wenn für alle hinreichend großen positiven x eine komplexe Funktion $f(x)$ und eine positive Funktion $g(x)$ definiert sind, unter

$$f(x) = O(g(x)),$$

daß der Quotient

$$\frac{|f(x)|}{g(x)}$$

von einer Stelle an beschränkt ist. Unter

$$f(x) = o(g(x)),$$

daß

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

ist. Dieselben Zeichen O und o werden aber auch gebraucht, wenn es sich nicht um Annäherung an $x = \infty$, sondern um beiderseitige oder einseitige Annäherung an einen endlichen Wert $x = \xi$ oder um eine bestimmte Annäherung an $x = \xi$ in der komplexen Ebene handelt. Auch, wenn die Variable — sie heißt dann meist nicht x oder dergl., sondern n, m oder dergl. — nur durch ganzzahlige Werte ins Unendliche geht. Der Zusammenhang schließt jedes Mißverständnis bei Anwendung dieses Zeichens aus, da stets ersichtlich sein wird, um welche unabhängige Variable und welchen Weg derselben es sich handelt.

Übrigens wird es sich oft als zweckmäßig erweisen, statt einer Gleichung wie

$$\lim_{x=1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

(x sei komplex gedacht) ohne Limeszeichen zu schreiben: Für $x \to 1$ ist $\frac{x^2-1}{x-1} \to 2$. Wenn die unabhängige Variable an den betreffenden endlichen Punkt nicht auf beliebiger Bahn rücken soll, wird es stets besonders gesagt.

Schließlich wird gelegentlich

$$f(x) \sim g(x)$$

als Abkürzung für

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$$

verwendet werden.

Die Titel der benutzten Abhandlungen sind zum Schluß zusammengestellt. Im Text zitiere ich daher nur kurz den Namen des Autors, eine Seitenzahl und (wenn mehr als eine Arbeit desselben Autors im Verzeichnis vorkommt) die Nummer der Abhandlung.

Einleitung.

Im folgenden will ich zunächst über die Ziele der einzelnen sieben Kapitel und die Vorgeschichte jener Fragestellungen berichten. Absichtlich ist im späteren Text durchweg vom Einheitskreis die Rede, in dieser Einleitung vom Kreise $|x| \leqq r$ mit einem Wortlaut, in den der des Textes durch die bloße Substitution $\frac{x}{r}$ statt x übergeht. Hier von einem beliebigen Punkt des Kreises, dort von dem positiven (triviale Substitution $e^{-\varphi i}x$ statt x). Hier von $\lim f(x) = l$, dort von $\lim f(x) = 0$ (triviale Substitution $f(x) - l$ statt $f(x)$). Hier von $|f(x)| \leqq M$, dort von $|f(x)| \leqq 1$ (triviale Substitution $M^{-1} f(x)$ statt $f(x)$).

Erstes Kapitel.

(Über beschränkte Potenzreihen.)

Es sei

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

für $|x| < r$ regulär. Dann braucht $|f(x)|$ dort nicht beschränkt zu sein, wie die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

mit $r = 1$ lehrt. Wenn aber für $|x| < r$

$$|f(x)| \leqq M$$

ist, so ist bekanntlich infolge der für $0 < \varrho < r$ giltigen Identität[1])

1) $\bar{a}$ bezeichnet die zu a konjugierte Zahl.

$$\int_0^{2\pi} \left|f\left(\varrho e^{\varphi i}\right)\right|^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n e^{n\varphi i} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m \varrho^m e^{-m\varphi i} d\varphi$$

$$= \sum_{n,m=0}^{\infty} a_n \bar{a}_m \varrho^{n+m} \int_0^{2\pi} e^{(n-m)\varphi i} d\varphi = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \varrho^{2n},$$

deren linke Seite $\leqq 2\pi M^2$ ist, notwendig die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

konvergent (und $\leqq M^2$). Es war aber nicht leicht festzustellen, ob aus der Voraussetzung die Beschränktheit von

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu r^\nu \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

oder gar die gleichmäßige Beschränktheit von s_n für alle zu festem r und festem M gehörigen $f(x)$ folgt. Fejér[1]) hat entdeckt, daß nicht einmal bei einem einzelnen $f(x)$ diese Funktion von n beschränkt zu sein braucht. Im § 3 gebe ich aber dafür nicht Fejérs ursprüngliches Beispiel, sondern ein anderes, das er mir brieflich in Anwendung einer zu anderem Zweck von mir angestellten Untersuchung mitgeteilt hat.

Daß bei festem M und festem n der Ausdruck s_n gleichmäßig (in Bezug auf r und die Auswahl des $f(x)$) beschränkt ist, folgt schon daraus, daß nach Cauchy

$$|a_\nu r^\nu| \leqq M \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

also

$$|s_n| \leqq (n+1) M$$

ist. (Übrigens folgt aus

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leqq M^2$$

schärfer

$$|s_n| \leqq \sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu r^\nu| . 1 \leqq \sqrt{\sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu|^2 r^{2\nu} . \sum_{\nu=0}^{n} 1^2} \leqq \sqrt{n+1} . M.)$$

Die Bestimmung der oberen Grenze von $|s_n|$ für alle $f(x)$ bei festen r, M, n bot eigentümliche Schwierigkeiten, die ich[2]) mit dem Ergebnis

$$M \sum_{\nu=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu}^2 = M\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2\right)$$

1) Fejér **1**, S. 15.

2) Landau **4**, zweite Abhandlung, S. 255.

überwunden habe; dies stelle ich in § 2 dar; der Faktor von M ist $\sim \frac{1}{\pi} \log n$.

Obgleich s_n nicht beschränkt zu sein braucht, sind, wie Steffensen[1]) bemerkt hat, die arithmetischen Mittel

$$\frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}$$

beschränkt, sogar bei festem M gleichmäßig beschränkt für alle r und $f(x)$. Die (gleichmäßige) obere Grenze ergibt sich nach Fejér[2]) gleich M; siehe den folgenden § 1, der auch eine — nicht viel tiefer liegende — notwendige und hinreichende Bedingung dafür entwickelt, daß ein bestimmtes $f(x)$ für $|x| < r$ regulär und beschränkt ist.

Nach obigem ist insbesondere bei jedem festen für $|x| < r$ beschränkten $f(x)$

$$s_n = O(\log n);$$

ungelöst ist aber die Frage, ob

$$s_n = o(\log n)$$

ist.

Im § 4 beweise ich nach Hardy[3]), daß für jedes im Kreise $|x| < r$ reguläre und beschränkte $f(x)$ die Majorante

$$\mathfrak{M}(\varrho) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \varrho^n$$

bei zu r wachsendem ϱ als $o\left(\frac{1}{\sqrt{r-\varrho}}\right)$ abgeschätzt werden kann. Ferner beweise ich dort nach Bohr — M. Riesz — I. Schur — F. Wiener[4]), daß für jede ganze Funktion $f(x)$ und alle $\varrho > 0$

$$\mathfrak{M}(\varrho) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \varrho^n \leqq \underset{|x| = 3\varrho}{\text{Max.}} |f(x)| = M(3\varrho)$$

ist; dasselbe gilt für Potenzreihen $f(x)$ mit endlichem Konvergenzradius, wenn 3ϱ kleiner als dieser Radius ist.

---

1) Steffensen, S. 382.
2) Fejér 3, S. 95.
3) Hardy 1, S. 149.
4) Bohr, S. 4.

Zweites Kapitel.

(Summabilität höherer Ordnung.)

Im § 5 handelt es sich um folgendes. Knopp[1]) und Schnee[2]) haben entdeckt, daß bei jeder Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

die Begriffe der Summabilität $k$ter Ordnung im Cesàroschen und Hölderschen Sinn (Erklärung siehe in meinem späteren Text) sich decken. Der Beweis war außerordentlich kompliziert, und erst ein neuerer Beweis von I. Schur[3]) gestattet mir, diesen wichtigen Satz in meine Schrift aufzunehmen.

Bekanntlich folgt aus der Summabilität irgendwelcher Ordnung bei der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n,$$

daß bei radialer Annäherung

$$\lim_{x=x_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

existiert; im § 6 gebe ich nun ein von Bohr herrührendes unpubliziertes Beispiel für die zuerst von Littlewood[4]) konstatierte Tatsache: dieser Limes kann vorhanden sein, ohne daß die Reihe im Punkte $x = x_0$ von irgend welcher Ordnung summabel ist.

Drittes Kapitel.

(Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes.)

Der Abelsche Stetigkeitssatz: „Aus

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = l \qquad (x_0 \neq 0)$$

folgt bei radialer Annäherung

$$\lim_{x=x_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = l“$$

ist bekanntlich nicht umkehrbar $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ bei } x = -1\right)$. Daß er

1) Knopp, S. 19.

2) Schnee, S. 112.

3) Schur, S. 448.

4) Littlewood, S. 448. Übrigens leistet Littlewoods Beispiel gleichzeitig mehr.

unter Hinzufügung gewisser Annahmen ($a_n x_0^n \geqq 0$ und dergl.) umkehrbar ist, war trivial. Ganz neuen Datums ist aber die Kette von Sätzen meines dritten Kapitels, welche noch mit einem 19 Jahre alten, leicht beweisbaren Satz von Tauber[1]) (wo die Annahme $a_n x_0^n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ gemacht wird) beginnt (§ 7) und in dem tiefliegenden Satz von Hardy und Littlewood[2]) (§ 10) gipfelt, der nur voraussetzt: Der reelle Teil von $n a_n x_0^n$ ist einseitig beschränkt, desgleichen der imaginäre Teil. Eine wichtige Stütze dabei ist der gleichfalls von Hardy und Littlewood[3]) entdeckte Satz (§ 9), daß für jede Potenzreihe mit $a_n \geqq 0$ aus

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sim \frac{1}{1-x} \qquad \text{bei } x \to 1$$

folgt[4]):

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \sim n.$$

Der zwischenliegende § 8 behandelt einige interessante Ausdehnungen des Tauberschen Satzes auf nicht radiale Annäherung.

Im § 11 beweise ich zwei einfachere Sätze aus diesem Ideenkreise, von denen der eine in § 12 für den Beweis eines Satzes von M. Riesz[5]) verwertet wird, der andere erst im nächsten Kapitel (§ 14) zur Anwendung kommen wird. Im § 13 beweise und verallgemeinere ich mit ähnlichen Mitteln einen Satz von Fejér[6]): Wenn $f(x)$ für $|x| \leqq r$ stetig, für $|x| < r$ regulär und schlicht[7]) ist, so konvergiert die zugehörige Potenzreihe auf dem Rande $|x| = r$ und zwar gleichmäßig.

Viertes Kapitel.

(Über einige Merkwürdigkeiten des Verhaltens von Potenzreihen auf dem Rande.)

Einige Kleinigkeiten von Hardy[8]), Lusin[9]) und Sierpiński[10]). § 14 (Hardy): Es kann vorkommen, daß eine Potenz-

1) Tauber, S. 274.

2) Hardy und Littlewood **3**, S. 188.

3) Hardy und Littlewood **2**, S. 141; **3**, S. 180.

4) Die Umkehrung hiervon ist auch ohne $a_n \geqq 0$ trivial.

5) Riesz **1**, S. 339; der Beweis meines Textes steht bei Mittag-Leffler, S. 161, unter Bezugnahme auf eine private Mitteilung Hardys.

6) Fejér **2**, S. 49; **4**, S. 51.

7) D. h. $f(x_1) \neq f(x_2)$ für $|x_1| < r$, $|x_2| < r$, $x_1 \neq x_2$.

8) Hardy **1**, S. 158.

9) Lusin, S. 388.

10) Sierpiński, S. 155.

reihe auf dem Rande gleichmäßig, aber nicht absolut konvergiert. § 15 (Lusin): Und daß eine Potenzreihe mit $a_n r^n \to 0$ auf dem ganzen Rand divergiert. § 16 (Sierpiński): Und daß eine Potenzreihe in genau einem Punkte des Randes konvergiert.

Daß nicht jede beliebige Menge auf dem Rande als Menge der Konvergenzpunkte vorgeschrieben werden kann, folgt daraus, daß die Menge jener Mengen höhere Mächtigkeit ($2^{\mathfrak{c}}$) hat als das Kontinuum ($\mathfrak{c}$), während die Menge aller Potenzreihen die Mächtigkeit des Kontinuums hat (nämlich $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$).

Fünftes Kapitel.

(Beziehungen der Koeffizienten einer Potenzreihe zu Singularitäten der Funktion auf dem Rande.)

§ 17: Wie zuerst Vivanti[1]) bemerkt hat, ist bei einer Potenzreihe, deren Koeffizienten $\geqq 0$ sind (oder auf einer anderen Halbgeraden von 0 nach ∞ liegen) der positive Punkt des Konvergenzkreises ein singulärer Punkt der Funktion. Trivial war dies nur, wenn die Reihe in dem betreffenden Punkte divergiert. Ich gebe im Text nicht den älteren Beweis von Pringsheim[2]), sondern einen späteren von mir[3]); beide sind gleich einfach, aber der meinige machte keinen Gebrauch von der Existenz eines singulären Punktes auf dem Rande und führte dadurch bei einer Klasse allgemeinerer (nicht in dieser Schrift behandelter) Reihen zuerst zum Ziel. Übrigens beweise ich in § 17 mit meiner (wie Fekete[4]) bemerkt hat, hierzu anwendbaren) Methode gleich eine von P. Dienes[5]) herrührende Verallgemeinerung auf den Fall, daß die Koeffizienten, statt auf einer Halbgeraden durch 0 zu liegen, einem Winkelraum $< \pi$ mit dem Scheitel 0 angehören; vordem hatte Vivanti[6]) dies nur noch (und zwar weniger einfach) für einen Winkelraum $\leqq \frac{\pi}{2}$ bewiesen.

Im § 18 beweise ich einen höchst bemerkenswerten Satz von Fatou[7]), dessen langer Originalbeweis durch einen viel kürzeren von M. Riesz[8]) ersetzt werden kann; ich werde nur einen dritten,

1) Vivanti **1**, S. 112.

2) Pringsheim **1**, S. 42; bei Vivanti stand es ohne Beweis.

3) Landau **2**, S. 535.

4) Fekete, S. 1035.

5) Dienes, S. 338.

6) Vivanti **2**, S. 401.

7) Fatou, S. 389.

8) Riesz **2**, S. 90, wo übrigens zum ersten Mal der auf gleichmäßige Konvergenz bezügliche Teil vorkommt.

ganz kurzen Beweis mitteilen, den mir M. Riesz geschrieben hat und der demnächst in den Göttinger Nachrichten erscheinen wird. Der Fatou-Rieszsche Satz heißt: Eine Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

mit dem Konvergenzradius r und $a_n r^n \to 0$ konvergiert in jedem regulären Randpunkte (und zwar gleichmäßig auf jedem Regularitätsbogen). Ein sehr merkwürdiger Satz; hat doch bekanntlich bei einer beliebigen Potenzreihe (ohne die Annahme $a_n r^n \to 0$) Konvergenz oder Divergenz auf dem Rande gar nichts mit Regularität oder Singularität in dem betreffenden Punkte zu tun, so daß alle vier Fälle möglich sind $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ und } x = 1, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \text{ und } x = 1, \ \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ und } x = -1, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \text{ und } x = -1\right)$.

Im § 19 beweise ich — nur, weil er nachher gebraucht wird, und ohne demgemäß auf schärfere Fabrysche Sätze einzugehen — einen älteren Satz von Hadamard[1]), nach welchem jede Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{m_k} x^{m_k},$$

wo $\lim\limits_{\overline{k=\infty}} \frac{m_{k+1}}{m_k} > 1$ ist, nicht über ihren Konvergenzkreis fortsetzbar ist; ich gebe eine neuere Beweisanordnung von Pringsheim[2]).

Im § 20 wird dies angewendet auf den Beweis, den Hurwitz[3]) für eine zuerst von Pólya[4]) bewiesene Fatousche[5]) Vermutung angegeben hat: Der Konvergenzkreis läßt sich für eine beliebige Potenzreihe bloß durch geeignete Änderung der Vorzeichen der Koeffizienten zur natürlichen Grenze machen.

Sechstes Kapitel.

(Maximum und Mittelwert des absoluten Betrages einer analytischen Funktion auf Kreisen.)

Dies Kapitel handelt von

$$M(r) = \underset{|x|=r}{\text{Max.}} |f(x)|$$

1) Hadamard 1, S. 116.
2) Pringsheim 2, S. 84.
3) Hurwitz und Pólya, S. 182.
4) Hurwitz und Pólya, S. 179.
5) Fatou, S. 400.

und Verwandtem. Daß bei einer nicht konstanten Funktion $M(r)$ mit r (wo im Falle eines endlichen Konvergenzradius das positive r kleiner als dieser Radius ist) wächst, ist einer der ältesten klassischen Sätze der Funktionentheorie. Hadamard[1]) fügte hinzu (es wurde unabhängig von Blumenthal[2]) und Faber[3]) wiedergefunden): $\log M(r)$ ist eine konvexe Funktion von $\log r$. Ich gebe dafür in § 21 einen Beweis, der nur wenig einfacher ist als der von Hadamard[4]) später mitgeteilte Originalbeweis.

Im § 22 verwende ich diesen Satz (an Stelle eines anderen Vitalischen[5]), der hier nicht vorkommt), um nach Jentzsch[6]) zu beweisen: Hat

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

einen endlichen Konvergenzradius, so ist jeder Randpunkt Häufungspunkt der Menge der Wurzeln der Polynome

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu.$$

Dieser Satz ist eine hübsche Ergänzung zu dem älteren von Hurwitz[7]), nach dem die Häufungspunkte im Innern des Kreises mit den dort gelegenen Nullstellen der Funktion übereinstimmen; vor Jentzsch hatte Lukács[8]) nur hinzugefügt, daß mindestens ein Häufungspunkt auf dem Rande liegt.

1) Hadamard **2**, S. 186.

2) Blumenthal, S. 108.

3) Faber, S. 549.

4) Hadamard **3**, S. 50.

5) Der Vitalische Satz heißt: Es seien die analytischen Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ für $|x| \leqq 1$ regulär und gleichmäßig beschränkt. Es existiere $\lim\limits_{n=\infty} f_n(x)$ für unendlich viele x, die mindestens einen Häufungspunkt im Innern des Einheitskreises haben. Dann existiert $\lim\limits_{n=\infty} f_n(x) = f(x)$ für $|x| < 1$ und zwar gleichmäßig für $|x| \leqq \vartheta$ bei jedem positiven $\vartheta < 1$; so daß $f(x)$ für $|x| < 1$ regulär ist.

6) Jentzsch, S. 13. Übrigens enthält der Beweis von Jentzsch auf S. 15 zwei glücklicherweise unschädliche Fehlschlüsse: 1) Wenn $f(x)$ in einem Kreise regulär und $\neq 0$ ist, so sei dort $\log f(x) = \log|f(x)| + \vartheta i$, $-\pi < \vartheta \leqq \pi$, regulär. 2) Wenn bei der Festsetzung $-\pi < \vartheta_n \leqq \pi$, $-\pi < \vartheta \leqq \pi$

$$\lim_{n=\infty} e^{\log r_n + \vartheta_n i} = e^{\log r + \vartheta i}$$

ist, so sei dort

$$\lim_{n=\infty} \vartheta_n = \vartheta.$$

7) Hurwitz, S. 247.

8) Lukács, S. 34.

Im § 23 beweise ich (einfacher als im Original) einen Satz von Hardy[1]): Der Mittelwert

$$\mu(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(r e^{\varphi i}\right) \right| d\varphi$$

von $|f(x)|$ auf dem Kreise $|x| = r$ besitzt auch die beiden oben genannten Cauchy-Hadamardschen Eigenschaften von $M(r)$.

Siebentes Kapitel.
(Der Picardsche Ideenkreis.)

Nachdem Picard[2]) schon 1879 mit Modulfunktionen bewiesen hatte, daß jede nicht konstante ganze Funktion höchstens einen Wert ausläßt und Borel[3]) 1896 hierfür zuerst einen Beweis mit elementaren funktionentheoretischen Mitteln gegeben hatte, habe ich[4]), von der Borelschen Methode ausgehend, die unerwartete Tatsache hinzugefügt: Jede ganze Funktion

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

mit $a_1 \neq 0$ nimmt einen der Werte a, b (wo $b \neq a$ ist) in einem nur von a, b, a_0, a_1 (nicht von $a_2, a_3, \ldots$) abhängenden festen Kreis an; desgl. bereits jede solche in diesem Kreise konvergente Potenzreihe. Dies beweise ich hier im § 25.

Schottky[5]) hat, an mich anknüpfend, durch Weiterführung der Borelschen Methode bewiesen: Jedes für $|x| < R$ reguläre und a, b auslassende $f(x)$ ist für $|x| \leqq \vartheta R$ (wo $0 < \vartheta < 1$ ist) absolut unterhalb einer nur von ϑ, a, b, a_0 (nicht von $a_1, a_2, a_3, \ldots$) abhängigen Schranke $\Omega(\vartheta, a, b, a_0)$ gelegen; dies (wovon mein Satz alsdann eine Folgerung ist) erfährt der Leser aus § 24.

In derselben Arbeit hat Schottky[6]) zuerst elementar den von Picard[7]) mit Modulfunktionen entdeckten Satz bewiesen: In jeder Umgebung eines isolierten wesentlich singulären Punktes nimmt eine dort eindeutig-reguläre Funktion alle Werte mit höchstens einer Ausnahme an. Schottky stützt sich auf die spe-

---

1) Hardy 2, S. 270.
2) Picard 1, S. 1024.
3) Borel, S. 1045.
4) Landau 1, S. 1119.
5) Schottky, S. 1255.
6) Schottky, S. 1258.
7) Picard 2, S. 745.

zielle Natur seines $\Omega(\vartheta, a, b, a_0)$. Später hat aber E. Lindelöf[1]), wie ich in § 26 auseinandersetzen werde, einen kürzeren elementaren Beweis dieses „großen Picardschen Satzes“ angegeben, wobei er überdies von jenem Ω nur Beschränktheit in jeder die Punkte $a_0 = a$, $a_0 = b$ vermeidenden beschränkten abgeschlossenen Punktmenge benutzt.

Der § 27 ist dem Koebeschen[2]) Verzerrungssatz gewidmet (der bei Koebe ein wichtiges Hilfsmittel beim Beweise seiner nicht in den Rahmen dieses Buches gehörigen Uniformisierungstheoreme geworden ist): Es gibt ein nur von ϑ (wo $0 < \vartheta < 1$ ist) abhängendes $\Omega(\vartheta)$, so daß für jede im Kreise $|x| < R$ reguläre und schlichte Funktion $f(x)$, wenn x_1, x_2 zwei Punkte des Kreises $|x| \leqq \vartheta R$ sind,

$$\frac{1}{\Omega} \leqq \left| \frac{f'(x_1)}{f'(x_2)} \right| \leqq \Omega$$

ist. Den Kern bildet der Satz 1 meines Textes, den ich zunächst im Anschluß an Plemelj[3]), d. h. nicht viel anders als Koebe[4]) beweise. Wie Koebe[5]) berichtet, hatte er zunächst diesen Satz 1 nur vermutet, Carathéodory mitgeteilt und von diesem den ersten Beweis erfahren. Ich gebe dann noch einen neuen Beweis des Satzes 1. Koebe[6]) hatte schon auf die Analogie seines Verzerrungssatzes zu den neueren Untersuchungen (meiner gegenwärtigen §§ 24—26) aus dem Picardschen Ideenkreise aufmerksam gemacht[7]). Ich zeige im Text, daß aus meinem Satz des § 25 jener Satz 1 sogar (in wenigen Zeilen) gefolgert werden kann.

---

1) Lindelöf, S. 135.

2) Koebe **2**, S. 73.

3) Plemelj, S. 303.

4) Koebe **3**, S. 46.

5) Koebe **1**, S. 204.

6) Koebe **4**, S. 348.

7) In dem von ihm zitierten Satz aus jenem Untersuchungsgebiete fehlt versehentlich die Annahme, daß $\Phi(z)$ im Kreise $|z| < 1$ nur für $z = 0$ verschwindet.

Erstes Kapitel.

Über beschränkte Potenzreihen.

§ 1.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Beschränktheit.

Satz.

Es sei

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

für $|x| < 1$ *konvergent.*

Es werde für jedes x *und jedes ganze* $n \geqq 0$

$$s_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu,$$

$$t_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \cdots + s_n(x)}{n+1}$$

gesetzt.

Damit für $|x| < 1$

$$|f(x)| \leqq 1$$

ist, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes n *und für alle* x *der Peripherie* $|x| = 1$

$$|t_n(x)| \leqq 1$$

ist.

Beweis: 1) Für $|x| < 1$ ist, wenn $x = re^{\varphi i}$, $0 \leqq r < 1$ gesetzt wird,

$$\frac{1}{(1-r)^2} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{n\varphi i} r^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_0 + a_1 e^{\varphi i} + \cdots + a_n e^{n\varphi i}\right) r^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} s_n\left(e^{\varphi i}\right) r^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(s_0\left(e^{\varphi i}\right) + s_1\left(e^{\varphi i}\right) + \cdots + s_n\left(e^{\varphi i}\right)\right) r^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, t_n\left(e^{\varphi i}\right) r^n.$$

Es sei nun für alle reellen φ und alle $n \geqq 0$

$$\left| t_n\left(e^{\varphi i}\right) \right| \leqq 1.$$

Dann ist für $|x| < 1$

$$\frac{1}{(1-r)^2} |f(x)| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) r^n = \frac{1}{(1-r)^2},$$

$$|f(x)| \leqq 1.$$

2) Für $|x| < 1$ ist

$$\frac{1}{(1-x)^2} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} s_n(1)\, x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, t_n(1)\, x^n.$$

Es sei nun für $|x| < 1$

$$|f(x)| \leqq 1.$$

Dann ist bei Integration über den Kreis $|x| = r$, $0 < r < 1$ in positivem Sinne

$$(n+1)\, t_n(1) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(x)}{(1-x)^2 x^{n+1}}\, dx;$$

wenn nun zum Integranden die für $x = 0$, also für $|x| \leqq r$ reguläre Funktion

$$\frac{f(x)}{(1-x)^2} \cdot \frac{(1-x^{n+1})^2 - 1}{x^{n+1}}$$

addiert wird, ergibt sich

$$(n+1)\,t_n(1) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(x)\,(1-x^{n+1})^2}{(1-x)^2\,x^{n+1}}\,dx$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(x)}{x^{n+1}}\,(1+x+\cdots+x^n)^2\,dx.$$

$$(n+1)\,|t_n(1)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^{n+1}}\,|1+x+\cdots+x^n|^2\,r\,d\varphi \qquad \left(x = r\,e^{\varphi i}\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} |1+x+\cdots+x^n|^2\,d\varphi\,;$$

dieser Ausdruck ist nach einer schon zu Beginn der Einleitung vorgekommenen bekannten Identität

$$= \frac{1}{2\pi r^n}\cdot 2\pi\,(1^2+1^2 r^2+\cdots+1^2 r^{2n}) = \frac{1}{r^n}\,(1+r^2+\cdots+r^{2n}).$$

Aus

$$(n+1)\,|t_n(1)| \leqq \frac{1}{r^n}\,(1+r^2+\cdots+r^{2n})$$

folgt, da die linke Seite von r frei ist,

$$(n+1)\,|t_n(1)| \leqq \lim_{r=1} \frac{1}{r^n}\,(1+r^2+\cdots+r^{2n}) = n+1,$$
$$|t_n(1)| \leqq 1.$$

Wenn dies auf die gleichfalls für $|x|<1$ reguläre und absolut 1 nicht übersteigende Funktion

$$f(e^{\varphi i}x) = f_1(x)$$

angewendet wird, erhält man für beliebiges φ

$$|t_n(e^{\varphi i})| \leqq 1.$$

Zusatz: Ich schreibe kurz t_n statt $t_n(1)$, s_n statt $s_n(1)$. Für die Menge aller $f(x)$, die im Kreise $|x|<1$ regulär und absolut $\leqq 1$ sind, ist natürlich nicht nur bei jedem n

$$|t_n| \leqq 1\,;$$

sondern 1 ist auch bei jedem einzelnen n die obere Grenze von $|t_n|$ für jene Menge. Denn die Funktion $f(x) = 1$ liefert bei jedem n

$$s_n = 1,$$
$$t_n = 1.$$

§ 2.

Die Landausche obere Grenze von $|s_n|$.

Hilfssatz (von Kakeya[1])).

Voraussetzung: $n \geqq 1$, $c_0 > c_1 > \cdots > c_n > 0$.

Behauptung: *Alle Wurzeln der Gleichung*

$$P(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = 0$$

sind absolut > 1.

Beweis: Es ist für alle x

$$(1-x) P(x) = c_0 - \{(c_0 - c_1) x + (c_1 - c_2) x^2 + \cdots + (c_{n-1} - c_n) x^n + c_n x^{n+1}\},$$
$$|(1-x) P(x)| \geqq c_0 - \{(c_0 - c_1)|x| + \cdots + (c_{n-1} - c_n)|x|^n + c_n |x|^{n+1}\},$$

wo das Gleichheitszeichen nur dann eintreten kann, wenn $x \geqq 0$ ist. Für $|x| \leqq 1$ exkl. $x = 1$ ist daher

$$|(1-x) P(x)| > c_0 - \{(c_0 - c_1) + \cdots + (c_{n-1} - c_n) + c_n\} = 0,$$
$$P(x) \neq 0.$$

Im Punkte $x = 1$ ist aber gewiß

$$P(x) = c_0 + \cdots + c_n > 0.$$

Satz (von Landau).

Für die Menge aller $f(x)$, *die im Kreise* $|x| < 1$ *regulär und absolut* $\leqq 1$ *sind, hat bei festem* n *die obere Grenze von* $|s_n| = |a_0 + \cdots + a_n|$ *den Wert*

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2 = G_n.\ ^{2)}$$

Mit anderen Worten: Stets ist

$$|s_n| \leqq G_n,$$

und zu $n \geqq 0$, $\delta > 0$ *gibt es ein* $f(x)$ *der Menge, so daß*

$$|s_n| > G_n - \delta$$

ist.

Vorbemerkung: Was den zweiten Teil der Behauptung (mit δ) betrifft, so wird übrigens ein (für alle δ brauchbares) $f(x)$ mit

1) Kakeya, S. 140.

2) G_0 bedeutet 1.

$$s_n = G_n$$

angegeben werden.

Beweis: 1) Es sei $f(x)$ für $|x| < 1$ regulär und $0 < r < 1$. Dann ist bei Integration über den Kreis mit dem Radius r

$$2\pi i s_n = \int f(x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{1}{x^{n+1}}\right) dx$$
$$= \int \frac{f(x)}{x^{n+1}}(1 + x + \cdots + x^n)\, dx = \int \frac{f(x)}{x^{n+1}} Q(x)\, dx,$$

wo $Q(x)$ irgend ein mit $1 + x + \cdots + x^n$ beginnendes Polynom

$$Q(x) = 1 + x + \cdots + x^n + b_{n+1} x^{n+1} + \cdots + b_{n+k} x^{n+k}$$

ist.

Nun ist für $|x| < 1$

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu}(-x)^\nu\right)^2 = \left((1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots,$$

also,

$$P_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu}(-x)^\nu$$

gesetzt,

$$(P_n(x))^2 = 1 + x + \cdots + x^n + b_{n+1} x^{n+1} + \cdots + b_{2n} x^{2n}$$

ein Polynom von der Gestalt $Q(x)$ und daher

$$2\pi i s_n = \int \frac{f(x)}{x^{n+1}} (P_n(x))^2\, dx.$$

Wenn nun

$$|f(x)| \leqq 1$$

für $|x| < 1$ vorausgesetzt wird, liefert diese Identität weiter

$$2\pi |s_n| \leqq \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^{n+1}} |P_n(x)|^2 r\, d\varphi = \frac{1}{r^n}\int_0^{2\pi} |P_n(x)|^2\, d\varphi$$
$$= \frac{2\pi}{r^n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu}^2 r^{2\nu},$$

also, da die linke Seite von r frei ist,

$$|s_n| \leqq \sum_{\nu=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu}^2 = \sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\nu!}\right)^2$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{1.3\ldots(2\nu-1)}{2.4\ldots 2\nu}\right)^2 = G_n.$$

2) Es sei $n \geqq 0$ gegeben. Die Funktion

$$P_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} (-x)^\nu = 1 + \frac{1}{2} x + \frac{1.3}{2.4} x^2 + \cdots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} x^n$$

verschwindet nach dem Kakeyaschen Satz für $|x| \leqq 1$ nicht; daher ist

$$f_n(x) = \frac{x^n P_n\left(\frac{1}{x}\right)}{P_n(x)} = \frac{\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} + \cdots + \frac{1}{2} x^{n-1} + x^n}{1 + \frac{1}{2} x + \cdots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} x^n}$$

für $|x| \leqq 1$ regulär. Ferner ist für $|x| = 1$

$$|f_n(x)| = \frac{\left|P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right|}{|P_n(x)|} = \frac{\left|P_n\left(e^{-\varphi i}\right)\right|}{\left|P_n\left(e^{\varphi i}\right)\right|.} = 1$$

also für $|x| \leqq 1$

$$|f_n(x)| \leqq 1.$$

Die obige Identität

$$2 \pi i s_n = \int \frac{f(x)}{x^{n+1}} (P_n(x))^2 \, dx$$

kann daher bei der Funktion $f(x) = f_n(x)$ alsbald auf den Einheitskreis bezogen werden und liefert

$$2 \pi i s_n = \int \frac{x^n P_n\left(\frac{1}{x}\right)}{P_n(x)} \frac{1}{x^{n+1}} (P_n(x))^2 \, dx = \int \frac{1}{x} P_n(x) P_n\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{x} P_n(x) P_n\left(\frac{1}{x}\right) x i \, d\varphi = i \int_0^{2\pi} P_n\left(e^{\varphi i}\right) P_n\left(e^{-\varphi i}\right) d\varphi$$

$$= i \int_0^{2\pi} |P_n(x)|^2 \, d\varphi = i \,.\, 2\pi G_n,$$

$$s_n = G_n.$$

Zusatz: Es ist für das folgende nützlich, G_n für wachsendes n asymptotisch zu studieren. Bekanntlich (Stirlingsche Formel) ist bei $n \rightarrow \infty$

$$\log(n!) = n \log n - n + \frac{1}{2} \log n + \frac{1}{2} \log(2\pi) + o(1),$$

also

$$\log \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} = \log \frac{1.2.3.4\ldots(2n-1)2n}{(2.4\ldots 2n)^2}$$

$$= \log \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \log((2n)!) - 2n\log 2 - 2\log(n!)$$

$$= 2n\log n + 2n\log 2 - 2n + \frac{1}{2}\log n + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\log(2\pi) + o(1)$$

$$-2n\log 2 - 2n\log n + 2n - \log n - \log(2\pi) + o(1)$$

$$= -\frac{1}{2}\log n - \frac{1}{2}\log \pi + o(1),$$

$$\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} = e^{-\frac{1}{2}\log n - \frac{1}{2}\log\pi + o(1)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}},$$

$$\left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2 \sim \frac{1}{\pi n},$$

$$G_n = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1.3\ldots(2\nu-1)}{2.4\ldots 2\nu}\right)^2 = 1 + \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} o\left(\frac{1}{\nu}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu} + o\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu} \sim \frac{1}{\pi}\log n.$$

§ 3.

Fejérs Satz, daß s_n bei festem $f(x)$ nicht beschränkt zu sein braucht.

Hilfssatz.

Voraussetzung: *Es sei* $m \geqq 0$, $b_0 > 0$, $b_1 > 0$, $\ldots$, $b_m > 0$, $n > 0$, $c_0 > c_1 > \cdots > c_n > 0$.

Behauptung: *Alle Partialsummen*

$$S_k = g_0 + g_1 + \cdots + g_k$$

der (nach dem K a k e y a *schen Satz für* $|x| \leqq 1$ *konvergenten) Potenzreihe*

$$R(x) = \frac{b_0 + \cdots + b_m x^m}{c_0 + \cdots + c_n x^n} = g_0 + g_1 x + \cdots + g_k x^k + \cdots$$

sind positiv.

Beweis: Es ist in einem gewissen Kreise

$$\frac{R(x)}{1-x} = (b_0 + \cdots + b_m x^m) \frac{1}{c_0 - \{(c_0 - c_1)x + \cdots + (c_{n-1} - c_n)x^n + c_n x^{n+1}\}}$$

$$= (b_0 + \cdots + b_m x^m)\left(\frac{1}{c_0} + \frac{(c_0 - c_1)x + \cdots + c_n x^{n+1}}{c_0^2} + \frac{\{(c_0 - c_1)x + \cdots + c_n x^{n+1}\}^2}{c_0^3} + \cdots\right)$$

$$= S_0 + S_1 x + \cdots + S_k x^k + \cdots,$$

und hierin sind offenbar alle $S_k > 0$.

Satz.

Es gibt eine für $|x| < 1$ reguläre und absolut 1 nicht übersteigende Funktion

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

für welche

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$$

nicht beschränkt ist.

Vorbemerkung: Das spezielle $f(x)$ wird sogar noch mehr leisten. Für jedes φ wird nämlich bei wachsendem r

$$\lim_{r=1} f\left(re^{\varphi i}\right) = g(\varphi)$$

vorhanden sein (eo ipso ist $|g(\varphi)| \leqq 1$); der Limes wird sogar gleichmäßig für alle φ vorhanden sein. Mit anderen Worten[1]): Die Funktion $f(x)$ läßt sich auf dem Rande so definieren, daß $f(x)$ für $|x| \leqq 1$ stetig ist.

Beweis: Wenn $f_n(x)$ die spezielle rationale Funktion aus § 2 bezeichnet, setze ich

---

1) Denn zunächst ist $g(\varphi)$ als gleichmäßiger Limes eine stetige Funktion von φ. Ferner ist das am Rande durch $g(\varphi)$ definierte $f(x)$ im Punkte $x = e^{\varphi_0 i}$ stetig; denn zu gegebenem $\delta > 0$ gibt es ein $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$, so daß für

$$\varphi_0 - \varepsilon < \varphi < \varphi_0 + \varepsilon$$

$$|g(\varphi) - g(\varphi_0)| < \frac{\delta}{2}$$

ist; dann ein $\varrho = \varrho(\delta)$, so daß für $\varrho < r < 1$, $\varphi_0 - \varepsilon < \varphi < \varphi_0 + \varepsilon$

$$\left|f\left(re^{\varphi i}\right) - g(\varphi)\right| < \frac{\delta}{2}$$

ist, also

$$\left|f\left(re^{\varphi i}\right) - g(\varphi_0)\right| < \delta.$$

$$f(x) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{f_{2^{\nu^3}}(x)}{\nu^2} = \frac{6}{\pi^2} f_2(x) + \frac{6}{\pi^2} \frac{f_{256}(x)}{4} + \frac{6}{\pi^2} \frac{f_{2^{27}}(x)}{9} + \cdots$$

Da diese unendliche Reihe für $|x| \leqq 1$ wegen

$$\left| \frac{f_{2^{\nu^3}}(x)}{\nu^2} \right| \leqq \frac{1}{\nu^2}$$

gleichmäßig konvergiert, stellt sie eine für $|x| \leqq 1$ stetige, für $|x| < 1$ nach dem Weierstraßschen Doppelreihensatz reguläre Funktion dar. Für $|x| < 1$ ist

$$|f(x)| \leqq \frac{6}{\pi^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} = 1.$$

In der für $|x| < 1$ gültigen Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ist ferner nach dem Weierstraßschen Doppelreihensatz a_n die Summe der Koeffizienten von x^n in den einzelnen Teilreihen $\frac{6}{\pi^2 \nu^2} f_{2^{\nu^3}}(x)$. Da in diesen nach dem Hilfssatz alle Partialsummen positiv sind, und da in $f_n(x)$ die Summe der $n+1$ ersten Koeffizienten G_n ist, so sieht man, daß für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

$$s_{2^{\nu^3}} > \frac{6}{\pi^2 \nu^2} G_{2^{\nu^3}} \sim \frac{6}{\pi^2 \nu^2} \cdot \frac{1}{\pi} \log (2^{\nu^3}) = \frac{6 \log 2}{\pi^3} \nu$$

ist. Daher wächst $s_{2^{\nu^3}}$ mit ν über alle Grenzen, und es ist, wie behauptet,

$$s_n \neq O(1).$$

§ 4.

Über die Majorante einer beschränkten Funktion.

Satz (von Hardy).

Voraussetzung: *Es sei für* $|x| < 1$

$$|f(x)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right| \leqq 1,$$

und es werde für $0 < r < 1$

$$\mathfrak{M}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$$

gesetzt.

Behauptung: *Bei* $r \to 1$ *ist*

$$\mathfrak{M}(r) = o\left(\frac{1}{\sqrt{1-r}}\right).$$

Beweis: Es konvergiert (vergl. den Beginn der Einleitung)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2.$$

Nach der Cauchyschen Ungleichung ist also für jedes $m \geqq 0$

$$\mathfrak{M}(r) = \sum_{n=0}^{m} |a_n| r^n + \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| r^n$$

$$\leqq \sum_{n=0}^{m} |a_n| + \sqrt{\sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n|^2 \cdot \sum_{n=m+1}^{\infty} r^{2n}}$$

$$\leqq \sum_{n=0}^{m} |a_n| + \sqrt{\sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n|^2 \sum_{n=0}^{\infty} r^n} = \sum_{n=0}^{m} |a_n| + \frac{\sqrt{\sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n|^2}}{\sqrt{1-r}},$$

$$\overline{\lim_{r=1}} \sqrt{1-r}\, \mathfrak{M}(r) \leqq \sqrt{\sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n|^2},$$

also, da die linke Seite von m frei ist,

$$\lim_{r=1} \sqrt{1-r}\, \mathfrak{M}(r) = 0.$$

Satz (von Bohr[1]).

Voraussetzung: *Wie beim vorangehenden Satz.*

Behauptung: *Es gibt eine positive absolute Konstante* ϑ, *so daß für alle jene* $f(x)$

$$\mathfrak{M}(\vartheta) \leqq 1$$

ist.

Übrigens wird $\vartheta = \frac{1}{3}$ *und keine größere Zahl dies leisten.*

---

1) Die Existenz eines ϑ ist von Bohr, die genauere Konstantenbestimmung $\frac{1}{3}$ von den ebenda zitierten M. Riesz, I. Schur, F. Wiener.

Vorbemerkung: Der Satz liefert speziell für jede ganze transzendente Funktion bei allen $r > 0$, wenn

$$M(r) = \underset{|x|=r}{\text{Max.}} |f(x)|$$

gesetzt wird, die Ungleichung

$$\mathfrak{M}(r) \leqq M(3r);$$

denn, wenn

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ganz und nicht identisch 0 ist, wende man auf

$$\frac{f(3rx)}{M(3r)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n 3^n r^n}{M(3r)} x^n = f_1(x)$$

den obigen Satz an:

$$1 \geqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n| 3^n r^n}{M(3r)} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{M(3r)} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n = \frac{\mathfrak{M}(r)}{M(3r)}.$$

Es ist sehr bemerkenswert, daß überhaupt eine absolute Konstante K mit

$$\mathfrak{M}(r) \leqq M(Kr)$$

existiert; denn für jedes $K > 1$ (andere kommen ohnehin nicht in Betracht) liefert die Cauchysche Koeffizientenabschätzung

$$|a_n| \leqq \frac{M(Kr)}{(Kr)^n}$$

bloß

$$\mathfrak{M}(r) \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M(Kr)}{(Kr)^n} r^n = M(Kr) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{K^n},$$

wo der Faktor von $M(Kr)$ größer als 1 ist; auch die schärfere Abschätzung

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (Kr)^{2n} \leqq (M(Kr))^2$$

führt nicht zum Ziel, sondern ergibt nur

$$\mathfrak{M}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (Kr)^n \frac{1}{K^n} \leqq \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (Kr)^{2n} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{K^{2n}}}$$

$$\leqq M(Kr) \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{K^{2n}}},$$

was zwar besser ist als das obige, aber doch stets einen Faktor > 1 liefert.

Beweis: 1) Der Spezialfall $n = 1$ des Satzes aus § 1 besagt

$$|t_1(x)| = \left|\frac{s_0(x) + s_1(x)}{2}\right| = \left|\frac{2\,a_0 + a_1 x}{2}\right| \leqq 1$$

für $|x| = 1$; also, wenn $x = e^{\varphi i}$ so gewählt wird, daß $a_1 x$ dieselbe Amplitude besitzt wie a_0,

$$\frac{2\,|a_0| + |a_1|}{2} \leqq 1,$$

$$|a_1| \leqq 2(1 - |a_0|).$$

Für jedes $n \geqq 1$ ist, $e^{\frac{2\pi i}{n}} = \eta$ und $x^n = y$ gesetzt,

$$\frac{f(x) + f(\eta x) + \cdots + f(\eta^{n-1} x)}{n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{1^\nu + \eta^\nu + \eta^{2\nu} + \cdots + \eta^{(n-1)\nu}}{n} x^\nu$$

$$= a_0 + a_n x^n + a_{2n} x^{2n} + \cdots = a_0 + a_n y + a_{2n} y^2 + \cdots$$

eine für $|y| < 1$ reguläre, ebenda absolut 1 nicht übersteigende Funktion von y; folglich ist

$$|a_n| \leqq 2(1 - |a_0|). \quad ^{1)}$$

Daher ist

$$\mathfrak{M}\left(\frac{1}{3}\right) = |a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{3^n} \leqq |a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 - |a_0|)}{3^n}$$

$$= |a_0| + 2\,(1 - |a_0|)\,\frac{1}{2} = 1.$$

2) Die Funktion

$$f(x) = \frac{\alpha - x}{1 - \alpha x},\ 0 < \alpha < 1$$

bildet den Einheitskreis auf sich ab, erfüllt also die Voraussetzung. Wegen der für $|x| < \frac{1}{\alpha}$, also gewiß für $|x| < 1$ gültigen Reihenentwicklung

$$f(x) = (\alpha - x)(1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \cdots) = \alpha - (1 - \alpha^2)x - (\alpha - \alpha^3)\,x^2 - \cdots$$

---

1) Diese Betrachtung lehrt auch: Jede Relation zwischen a_0 und a_1, die für die Menge unserer $f(x)$ gilt, besteht auch zwischen a_0 und a_n.

ist bei $0 < \vartheta < 1$

$$\mathfrak{M}(\vartheta) = \alpha + (1-\alpha^2)\vartheta + (\alpha - \alpha^3)\vartheta^2 + \cdots = \alpha + \frac{(1-\alpha^2)\vartheta}{1-\alpha\vartheta}.$$

Es ist daher

$$\mathfrak{M}(\vartheta) > 1$$

für

$$\alpha + \frac{(1-\alpha^2)\vartheta}{1-\alpha\vartheta} > 1,$$

d. h. für

$$\vartheta > \frac{1}{1+2\alpha}.$$

Zu jedem $\vartheta > \frac{1}{3}$ gibt es demnach ein $\alpha < 1$, so daß

$$\mathfrak{M}(\vartheta) > 1$$

ist.

Zweites Kapitel.

Summabilität höherer Ordnung.

§ 5.

Der Knopp-Schneesche Satz.

Hilfssatz 1.

Voraussetzung: *Es sei $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ eine Folge komplexer Größen, $q > 0$ ganz und bei $n \to \infty$*

$$x_n + q\,\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \to 0.$$

Behauptung: $x_n \to 0$.

Beweis: Wenn zur Abkürzung

$$y_n = q(x_1 + \cdots + x_n) + n x_n = q(x_1 + \cdots + x_{n-1}) + (n+q)\,x_n$$

gesetzt wird, ist identisch[1])

$$\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu(\nu+1)\ldots(\nu+q-1) = (n+1)(n+2)\ldots(n+q)\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu.$$

Denn diese Identität ist für $n = 1$ wahr:

$$y_1 . 2 \ldots q = 2 . 3 \ldots (q+1)\,x_1,$$

und aus der Richtigkeit bei $n-1$ folgt sie für n, da der Zuwachs der linken Seite bei diesem Übergang

$$= y_n(n+1)\ldots(n+q-1) = q(n+1)\ldots(n+q-1)\sum_{\nu=1}^{n-1} x_\nu + (n+1)\ldots(n+q)\,x_n,$$

der rechts

$$= (n+1)\ldots(n+q)\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \;-\; n\ldots(n+q-1)\sum_{\nu=1}^{n-1} x_\nu$$

$$= (n+1)\ldots(n+q-1)\big((n+q)-n\big)\sum_{\nu=1}^{n-1} x_\nu + (n+1)\ldots(n+q)\,x_n$$

ist.

---

1) Für $q = 1$ bedeutet $(\nu+1)\ldots(\nu+q-1)$ die Zahl 1.

Wegen der Voraussetzung $y_n = o(n)$ ist

$$\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu(\nu+1)\dots(\nu+q-1) = \sum_{\nu=1}^{n} o(\nu^q) = o\sum_{\nu=1}^{n} \nu^q = o(n^{q+1}),$$

also nach der obigen Identität

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu = \frac{1}{(n+1)\dots(n+q)}\, o(n^{q+1}) = o(n),$$

$$n x_n' = y_n - q \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu = o(n) + o(n) = o(n),$$

$$x_n = o(1).$$

Hilfssatz 2.

Voraussetzung: $k > 1$ *sei ganz und*

$$\frac{1}{k} x_n + \frac{k-1}{k}\,\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \to \gamma.$$

Behauptung: $x_n \to \gamma$.

Vorbemerkung: Für $k = 1$ ist dies auch wahr, aber trivial.

Beweis: $x_n - \gamma = z_n$ genügt nach Voraussetzung der Bedingung

$$\frac{1}{k}(z_n + \gamma) + \frac{k-1}{k}\left(\frac{z_1 + \cdots + z_n}{n} + \gamma\right) \to \gamma,$$

$$\frac{1}{k} z_n + \frac{k-1}{k}\,\frac{z_1 + \cdots + z_n}{n} \to 0,$$

$$z_n + (k-1)\frac{z_1 + \cdots + z_n}{n} \to 0.$$

Nach Hilfssatz 1 ist daher

$$z_n \to 0,$$
$$x_n \to \gamma.$$

Definition.

Es sei $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ *eine Folge komplexer Zahlen, und es werde gesetzt:*

$$\begin{aligned}
S_n^{(0)} &= a_0 + \cdots + a_n,\\
S_n' &= S_0^{(0)} + \cdots + S_n^{(0)},\\
S_n'' &= S_0' + \cdots + S_n',\\
&\cdots\cdots\cdots\\
S_n^{(k)} &= S_0^{(k-1)} + \cdots + S_n^{(k-1)},\\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Man sagt: die Reihe

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots$$

sei summabel kter Ordnung im Cesàroschen[1] *Sinne, oder: der kte Cesàrosche Limes der Folge* $s_n = a_0 + \cdots + a_n = S_n^{(0)}$ *sei vorhanden und* $= s$, *wenn bei* $n \to \infty$

$$\frac{k!\, S_n^{(k)}}{n^k} \to s$$

ist.

Damit ist natürlich, wenn

$$C_n^{(k)} = \frac{S_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}}$$

gesetzt wird,

$$C_n^{(k)} \to s$$

gleichbedeutend.

Ist dies bei einem $k \geqq 0$ der Fall, so ist, wie leicht zu sehen, der $(k+1)$-te Cesàrosche Limes (also auch alle folgenden) vorhanden und $= s$; denn aus

$$S_n^{(k)} = s\,\frac{n^k}{k!} + o(n^k)$$

folgt

$$\begin{aligned} S_n^{(k+1)} = \sum_{\nu=0}^{n} S_\nu^{(k)} &= \frac{s}{k!} \sum_{\nu=0}^{n} \nu^k + \sum_{\nu=0}^{n} o(\nu^k) \\ &= \frac{s}{k!}\left(\frac{n^{k+1}}{k+1} + o(n^{k+1})\right) + o(n^{k+1}) \\ &= s\,\frac{n^{k+1}}{(k+1)!} + o(n^{k+1}). \end{aligned}$$

Ist ferner bei einem $k \geqq 0$ der $k$te Cesàrosche Limes vorhanden, so folgt daraus sukzessive

$$\begin{aligned} S_n^{(k)} &= O(n^k), \\ S_n^{(k-1)} &= S_n^{(k)} - S_{n-1}^{(k)} = O(n^k) + O(n^k) = O(n^k), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

bis zu

$$\begin{aligned} S_n^{(0)} &= O(n^k), \\ a_n &= O(n^k), \end{aligned}$$

so daß

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

1) Cesàro, S. 119.

für $|x| < 1$ konvergiert und ebenda

$$f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(0)} x^n = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} S'_n x^n = \cdots$$
$$= (1-x)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n$$

ist.

Aus dieser Identität

$$(1-x)^{-k-1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n$$

ist alsdann leicht bei gegen 1 wachsendem x

$$f(x) \to s$$

zu folgern. Denn nach Voraussetzung ist

$$S_n^{(k)} = s\binom{n}{k} + o\binom{n}{k};$$

nach Annahme eines $\delta > 0$ ist also für $n \geqq n_0(\delta)$

$$\left| S_n^{(k)} - s\binom{n}{k} \right| < \delta \binom{n}{k},$$

folglich, wenn $0 < x < 1$ ist,

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n - s \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^n \right| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \left| S_n^{(k)} - s\binom{n}{k} \right| x^n$$
$$\leqq \sum_{n=0}^{n_0-1} \left| S_n^{(k)} - s\binom{n}{k} \right| x^n + \delta \sum_{n=n_0}^{\infty} \binom{n}{k} x^n$$
$$\leqq \sum_{n=0}^{n_0-1} \left| S_n^{(k)} - s\binom{n}{k} \right| + \delta \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^n,$$

$$\overline{\lim_{x=1}} \frac{\left| \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n - s \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^n \right|}{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^n} \leqq \delta;$$

da die linke Seite von δ frei ist, ist bei $x \to 1$

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n - s \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^n} \to 0;$$

wegen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\, x^{n-k} = \frac{x^k}{k!} \frac{d^k}{dx^k} \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= \frac{x^k}{k!} \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

ist daher

$$\frac{(1-x)^{-k-1} f(x) - s x^k (1-x)^{-k-1}}{x^k (1-x)^{-k-1}} \rightarrow 0,$$

$$x^{-k} f(x) - s \rightarrow 0,$$

$$f(x) \rightarrow s.$$

Definition.

Es sei $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ eine Folge komplexer Zahlen, und es werde gesetzt:

$$\begin{aligned}
h_n^{(0)} &= a_0 + \cdots + a_n, \\
h_n' &= \frac{h_0^{(0)} + \cdots + h_n^{(0)}}{n+1}, \\
h_n'' &= \frac{h_0' + \cdots + h_n'}{n+1}, \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
h_n^{(k)} &= \frac{h_0^{(k-1)} + \cdots + h_n^{(k-1)}}{n+1}, \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{aligned}$$

Man sagt: die Reihe

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots$$

sei summabel kter Ordnung im Hölderschen[1]) Sinne, oder: der kte Höldersche Limes der Folge $s_n = a_0 + \cdots + a_n = h_n^{(0)}$ sei vorhanden und $= s$, wenn bei $n \rightarrow \infty$

$$h_n^{(k)} \rightarrow s$$

ist.

Ist dies bei einem k der Fall, so folgt für die arithmetischen Mittel ohne weiteres

$$h_n^{(k+1)} \rightarrow s,$$

$$h_n^{(k+2)} \rightarrow s,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

1) Hölder, S. 536.

Ferner folgt aus $h_n^{(k)} \to s$ sukzessive

$$\begin{aligned}
h_n^{(k)} &= O(1),\\
h_n^{(k-1)} &= (n+1)\,h_n^{(k)} \;\;- n\,h_{n-1}^{(k)} \;= O(n) + O(n) \;= O(n),\\
h_n^{(k-2)} &= (n+1)\,h_n^{(k-1)} - n\,h_{n-1}^{(k-1)} = O(n^2) + O(n^2) = O(n^2),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

bis zu

$$\begin{aligned}
h_n^{(0)} &= O(n^k),\\
a_n &= h_n^{(0)} - h_{n-1}^{(0)} = O(n^k),
\end{aligned}$$

also die Konvergenz von

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

für $|x| < 1$.

Hölder[1]) hatte aus

$$h_n^{(k)} \to s$$

auf

$$f(x) \to s$$

geschlossen; die Reproduktion dieses Beweises erübrigt sich hier schon aus dem Grunde, weil dieser Satz enthalten ist in dem

Knopp-Schneeschen Satz:

Wenn für ein bestimmtes k

$$c_n^{(k)} \to s$$

ist, so ist

$$h_n^{(k)} \to s$$

und umgekehrt.

Beweis: Wenn eine Zahlenfolge

$$x_0,\; x_1,\; x_2,\; \ldots,\; x_n,\; \ldots$$

gegeben ist, so bezeichne $M(x_n)$ die Folge der arithmetischen Mittel

$$x_0,\; \frac{x_0+x_1}{2},\; \frac{x_0+x_1+x_2}{3},\; \ldots,\; \frac{x_0+x_1+\cdots+x_n}{n+1},\; \ldots$$

Falls a und b Konstanten bezeichnen, hat demnach $a\,M(x_n) + b\,x_n$ die Bedeutung der Folge

$$a x_0 + b x_0,\; a\frac{x_0+x_1}{2} + b x_1,\; \cdots,\; a\frac{x_0+\cdots+x_n}{n+1} + b x_n,\; \cdots$$

1) Hölder, S. 536.

Diese Operation $y_n = a M(x_n) + b x_n$, welche der Folge (x) die Folge (y) durch die linearen Gleichungen

$$y_n = \frac{a}{n+1} x_0 + \cdots + \frac{a}{n+1} x_{n-1} + \left(\frac{a}{n+1} + b\right) x_n$$

zuordnet, gehört zu dem allgemeineren Typus

$$\begin{aligned} y_0 &= c_{00} x_0, \\ y_1 &= c_{10} x_0 + c_{11} x_1, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n &= c_{n0} x_0 + c_{n1} x_1 + \cdots + c_{nn} x_n, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}$$

Die Zusammensetzung zweier solcher Operationen gibt wieder eine solche; denn wenn bei drei Variabelnreihen (x), (y), (z) erst (y) nach einem solchen Schema aus (x) und dann (z) aus (y) entsteht, so ist z_n eine homogene lineare Funktion von $x_0, \ldots, x_n$. Ferner gilt für solche Operationen offenbar das assoziative Gesetz. Soweit ohne Einschränkung über die $c_{\varkappa\lambda}$. Für zwei unserer Operationen

$$a M(x_n) + b x_n, \quad a' M(x_n) + b' x_n$$

gilt aber auch das kommutative Gesetz, da

$$\begin{aligned} & a' M(a M(x_n) + b x_n) + b'(a M(x_n) + b x_n) \\ & \qquad = a' a M M(x_n) + (a' b + b' a) M(x_n) + b' b x_n, \\ & a M(a' M(x_n) + b' x_n) + b(a' M(x_n) + b' x_n) \\ & \qquad = a a' M M(x_n) + (a b' + b a') M(x_n) + b b' x_n, \end{aligned}$$

also gleich dem vorigen ist.

Speziell werde bei ganzem $k > 0$

$$T_k(x_n) = \frac{k-1}{k} M(x_n) + \frac{1}{k} x_n$$

gesetzt; dann ist M mit jedem T_k vertauschbar, desgleichen je zwei T_k, $T_{k'}$.

Aus $x_n \to s$ folgt offenbar

$$T_k(x_n) \to \frac{k-1}{k} s + \frac{1}{k} s = s;$$

und aus $T_k(x_n) \to s$ folgt nach Hilfssatz 2 umgekehrt $x_n \to s$.

Das folgende beruht auf der zunächst zu verifizierenden Identität (in der $a_0, a_1, \ldots$ beliebig sind)

$$M(c_n^{(k-1)}) = T_k(c_n^{(k)}) \qquad (k \geqq 1),$$

ausgeschrieben:

$$\frac{c_0^{(k-1)} + \cdots + c_n^{(k-1)}}{n+1} = \frac{k-1}{k} \frac{c_0^{(k)} + \cdots + c_n^{(k)}}{n+1} + \frac{1}{k} c_n^{(k)}.$$

Diese Identität sieht man so ein. Es ist (wobei $S_{-1}^{(k)}$ und $c_{-1}^{(k)}$ Null bedeuten)

$$S_n^{(k)} = S_{n-1}^{(k)} + S_n^{(k-1)},$$

$$\binom{n+k}{k} c_n^{(k)} = \binom{n+k-1}{k} c_{n-1}^{(k)} + \binom{n+k-1}{k-1} c_n^{(k-1)},$$

$$\frac{(n+k)!}{n!\,k!} c_n^{(k)} = \frac{n\,(n+k-1)!}{n!\,k!} c_{n-1}^{(k)} + \frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!} c_n^{(k-1)},$$

$$k\,c_n^{(k-1)} = (n+k)\,c_n^{(k)} - n\,c_{n-1}^{(k)} = (k-1)\,c_n^{(k)} + \left((n+1)\,c_n^{(k)} - n\,c_{n-1}^{(k)}\right),$$

$$k \sum_{n=0}^{m} c_n^{(k-1)} = (k-1) \sum_{n=0}^{m} c_n^{(k)} + (m+1)\,c_m^{(k)},$$

d. i. obige Identität. Sie möge kurz

$$M(c^{(k-1)}) = T_k(c^{(k)})$$

geschrieben werden.

Nun ist

$$h_n^{(0)} = S_n^{(0)} = c_n^{(0)},$$

$$h_n' = \frac{S_n'}{n+1} = c_n',$$

kurz

$$h' = c',$$

also

$$h'' = M(h') = M(c') = T_2(c''),$$

$$h''' = M(h'') = MT_2(c'') = T_2 M(c'') = T_2 T_3(c'''),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$h^{(k)} = M(h^{(k-1)}) = MT_2 T_3 \ldots T_{k-1}(c^{(k-1)}) = T_2 T_3 \ldots T_{k-1} M(c^{(k-1)})$$
$$= T_2 T_3 \ldots T_{k-1} T_k(c^{(k)}).$$

Wenn also[1]) für ein $k \geqq 2$ bei $n \to \infty$

$$c_n^{(k)} \to s$$

vorausgesetzt wird, so ergibt sich sukzessive

$$T_k(c^{(k)}) \to s,$$

$$T_{k-1} T_k(c^{(k)}) \to s,$$

$$\cdots\cdots$$

$$h^{(k)} = T_2 T_3 \ldots T_k(c^{(k)}) \to s$$

(Satz von Schnee).

---

1) Für $k = 0$ und $k = 1$ sind die Behauptungen trivial.

Wenn umgekehrt bei $n \to \infty$

$$h_n^{(k)} \to s$$

vorausgesetzt wird, so ergibt sich sukzessive nach der oben erwähnten Folgerung aus Hilfssatz 2 (für die T-Operation)

$$\begin{aligned} T_3 T_4 \ldots T_k(c^{(k)}) &\to s, \\ T_4 \ldots T_k(c^{(k)}) &\to s, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ T_k(c^{(k)}) &\to s, \\ c^{(k)} &\to s \end{aligned}$$

(Satz von Knopp).

§ 6.

Beispiel einer nicht summabeln Reihe mit vorhandenem $\lim f(x)$.

Ich betrachte die für $|x| < 1$ konvergenten Potenzreihen

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots, \\ f_1(x) &= \frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - \cdots, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_m(x) &= \frac{1}{(1+x)^{m+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+m}{m} x^n, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}$$

Für $0 < x < 1$ sind die $f_m(x)$ gleichmäßig beschränkt, nämlich

$$|f_m(x)| < 1.$$

Ferner ist bei $x \to 1$

$$f_m(x) \to \frac{1}{2^{m+1}}.$$

Die Doppelreihe rechts in

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} f_m(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+m}{m} x^n$$

ist für $|x| < 1$ absolut konvergent; denn eine Majorante von $f_m(x)$ ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m}{m} |x|^n = f_m(-|x|) = \frac{1}{(1-|x|)^{m+1}}.$$

Für $|x| < 1$ ist also

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

wo

$$(-1)^n a_n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \binom{n+m}{m}$$

ist.

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} f_m(x)$$

für $0 < x < 1$ ist bei $x \to 1$

$$f(x) \to \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \lim_{x=1} f_m(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\, 2^{m+1}},$$

also $\lim f(x)$ vorhanden [1]).

Andererseits ist die Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

von keiner noch so hohen Ordnung summabel; denn sonst müßte für ein endliches $k \geqq 0$

$$a_n = O(n^k)$$

sein, während

$$(-1)^n a_n > \frac{1}{(k+1)!} \binom{n+k+1}{k+1} = \frac{(n+k+1)\ldots(n+1)}{((k+1)!)^2} > \frac{n^{k+1}}{((k+1)!)^2}$$

ist.

---

1) Dies folgt auch aus

$$f(x) = \frac{1}{1+x} e^{\frac{1}{1+x}} \to \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}}.$$

Überhaupt darf im Beispiel des Textes offenbar $\frac{1}{m!}$ durch irgend eine Folge $\varepsilon_m > 0$ ersetzt werden, für welche $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m z^m$ eine ganze Funktion ist, und die Existenz von

$$\lim_{x=1} f(x) = \lim_{x=1} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m f_m(x) = \lim_{x=1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{(1+x)^{m+1}} = \lim_{x=1} \frac{1}{1+x} g\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

folgt auch daraus, daß

$$\frac{1}{1+x} g\left(\frac{1}{1+x}\right) \to \frac{1}{2} g\left(\frac{1}{2}\right)$$

ist.

Drittes Kapitel.

Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes.

§ 7.

Der Taubersche Satz.

Voraussetzung: *Es sei*

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

also

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

für $|x| < 1$ *konvergent. Ferner sei für* $x \to 1$ *bei Annäherung von links*

$$f(x) \to 0.$$

Behauptung: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = 0.$

Beweis: Wenn

$$s_m = a_0 + \cdots + a_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$$

gesetzt wird, ist für $m > 0$, $0 \leqq x < 1$

$$s_m - f(x) = \sum_{n=1}^{m} a_n(1-x^n) - \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n x^n,$$

also, wegen $1 - x^n = (1-x)(1 + x + \cdots + x^{n-1}) \leqq (1-x)\,n$,

$$|s_m - f(x)| \leqq (1-x) \sum_{n=1}^{m} n\,|a_n| + \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n|\,x^n.$$

Falls ε_m die obere Grenze von $n|a_n|$ für $n > m$ bezeichnet, ist nach Voraussetzung $\varepsilon_m \to 0$. Die letzte Summe wird so abgeschätzt:

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| x^n = \sum_{n=m+1}^{\infty} n|a_n| \frac{1}{n} x^n \leqq \sum_{n=m+1}^{\infty} \varepsilon_m \frac{1}{m} x^n$$
$$\leqq \frac{\varepsilon_m}{m} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{\varepsilon_m}{m(1-x)}.$$

Andererseits folgt aus $n|a_n| \to 0$ für das arithmetische Mittel

$$\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} n|a_n| \to 0 \text{ bei } m \to \infty.$$

Wird also $x = 1 - \frac{1}{m}$ gesetzt, so ist bei $m \to \infty$

$$\left| s_m - f\left(1 - \frac{1}{m}\right) \right| \leqq \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} n|a_n| + \varepsilon_m \to 0,$$

woraus wegen

$$f\left(1 - \frac{1}{m}\right) \to 0$$

die Behauptung

$$s_m \to 0$$

folgt.

Zusatz: Scheinbar ist die Annahme $f(x) \to 0$ nicht voll ausgenutzt worden; aber in Wahrheit folgt sie aus $f\left(1 - \frac{1}{m}\right) \to 0$ nebst $n a_n \to 0$; denn wegen

$$|n a_n| < c,$$

$$|f'(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right| < c \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{c}{1-x} \qquad (0 < x < 1)$$

ist für $1 - \frac{1}{m} < x < 1 - \frac{1}{m+1}$

$$\left| f(x) - f\left(1 - \frac{1}{m}\right) \right| = \left| \int_{1-\frac{1}{m}}^{x} f'(y)\,dy \right| < \int_{1-\frac{1}{m}}^{1-\frac{1}{m+1}} \frac{c}{1 - \left(1 - \frac{1}{m+1}\right)}\,dy$$
$$= c(m+1)\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) = \frac{c}{m},$$

was von x frei ist und für $m \to \infty$ gegen 0 strebt.

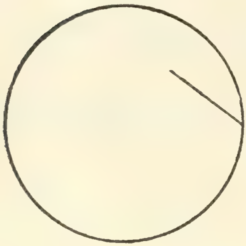
§ 8.

Ausdehnung auf schräge und krummlinige Annäherung.

Verallgemeinerung von Landau[1]).

Voraussetzung: *Es sei*

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

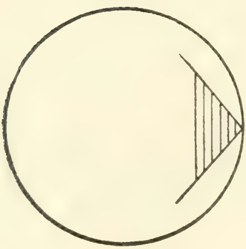


Ferner sei

$$f(x) \to 0$$

für $x \to 1$ *bei Annäherung aus dem Innern des Einheitskreises auf irgend einem Strahl oder auch bloß für irgend eine Punktfolge* x_m $(m = 1, 2, \ldots)$, *für die*

$$|x_m| < 1, \quad x_m = 1 - r_m e^{\varphi_m i} \to 1$$



ist, die einem Winkelraum

$$\cos \varphi_m > \delta > 0$$

angehört, und bei welcher

$$\left[\frac{1}{r_m}\right] = \left[\frac{1}{|1 - x_m|}\right]$$

alle hinreichend großen ganzzahligen Werte annimmt.

Behauptung: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = 0.$

Beweis: Für alle hinreichend nahe an 1 gelegenen Punkte des Kreises $|x| < 1$, die außerdem dem Winkelraum $x = 1 - re^{\varphi i}$, $\cos \varphi > \delta > 0$ angehören, ist

$$\frac{|1-x|}{1-|x|} < c = c(\delta),$$

wie aus der für $r < \delta$ giltigen Abschätzung

$$|x|^2 = 1 - 2r\cos\varphi + r^2 < 1 - 2r\delta + r\delta = 1 - r\delta < 1 - r\delta + \frac{r^2\delta^2}{4} = \left(1 - \frac{r\delta}{2}\right)^2,$$

1) Landau **3**, S. 15.

$$|x| < 1 - \frac{r\delta}{2} = 1 - \frac{\delta}{2}|1-x|,$$

$$\frac{|1-x|}{1-|x|} < \frac{2}{\delta}$$

hervorgeht.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann ich daher annehmen, daß die gegebene Folge x_m für $m \geqq 1$ den Bedingungen genügt:

$$|x_m| < 1, \quad \frac{|1-x_m|}{1-|x_m|} < c, \quad \left[\frac{1}{|1-x_m|}\right] = m.$$

Dann ist (weil nämlich für $n \geqq 1$ im Einheitskreis $|1-x^n| = |(1-x)(1+x+\cdots+x^{n-1})| \leqq |1-x|\,n$ ist)

$$\begin{aligned} |s_m - f(x_m)| &= \left|\sum_{n=1}^{m} a_n(1-x_m^n) - \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n x_m^n\right| \\ &\leqq \sum_{n=1}^{m} |a_n|\,|1-x_m|\,n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{m}|x_m|^n \\ &= |1-x_m| \sum_{n=1}^{m} n\,|a_n| + \frac{\varepsilon_m}{m(1-|x_m|)} \\ &\leqq m\,|1-x_m| \frac{\sum\limits_{n=1}^{m} n\,|a_n|}{m} + \frac{c\,\varepsilon_m}{m\,|1-x_m|}. \end{aligned}$$

Wegen $m\,|1-x_m| \rightarrow 1$ strebt die rechte Seite für $m \rightarrow \infty$ gegen 0; aus

$$f(x_m) \rightarrow 0$$

folgt schließlich

$$s_m \rightarrow 0.$$

Verallgemeinerung von Hardy-Littlewood[1]).

Voraussetzung: *Es sei*

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ferner sei

$$f(x) \rightarrow 0$$

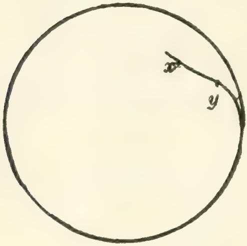
für $x \rightarrow 1$ bei Annäherung längs irgend eines Kreisbogens, der den Einheitskreis von innen berührt; oder auch bloß längs irgend eines aus dem Einheitskreise kom-

1) Hardy und Littlewood 1, S. 476.

menden, in 1 mündenden Kurvenbogens, bei dem die Ordinate eine eindeutige, stetige, monotone Funktion der Abszisse ist (wie steil er auch münde).

Behauptung: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0.$

Beweis: x sei ein fester Punkt des Kurvenbogens, y ein variabler Punkt auf dem Bogen zwischen x und 1. Bei Integration längs des Bogens strebt



$$\int_x^y f(z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{y^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right),$$

falls y (auf dem Bogen) nach 1 rückt, gegen den Grenzwert

$$\int_x^1 f(z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1-x^{n+1}}{n+1};$$

denn

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

konvergiert, so daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n y^{n+1}}{n+1}$$

für $|y| \leqq 1$ gleichmäßig konvergiert.

Die Funktion $\int_x^1 f(z)\,dz$ ist, wenn x auf dem Bogen nach 1 läuft, $o|1-x|$; denn, wenn x (auf dem Bogen) hinreichend nahe an 1 liegt, ist unterwegs $|f(z)| < \delta$ und die Weglänge $\leqq |1-x|\sqrt{2}$. Also ist, immer bei Annäherung auf dem Kurvenbogen,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1-x^{n+1}}{n+1} = o|1-x|.$$

Wenn

$$m = \left[\frac{1}{|1-x|}\right]$$

gesetzt wird, was bei $x \to 1$ alle hinreichend großen ganzen Zahlen durchläuft, ist

$$\left|\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \frac{1-x^{n+1}}{n+1}\right| \leqq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{2|a_n|}{n+1} \leqq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{2\varepsilon_m}{n(n+1)}$$

$$= \frac{2\varepsilon_m}{m+1} = o|1-x|,$$

also

$$\sum_{n=0}^{m} a_n \frac{1-x^{n+1}}{n+1} = o\,|1-x|,$$

$$\sum_{n=0}^{m} a_n \frac{1+x+\cdots+x^n}{n+1} \to 0.$$

Nun ist für $|x|<1$, $n \geqq 1$

$$\left|\frac{1+x+\cdots+x^n}{n+1}-1\right| = \frac{|(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)|}{n+1}$$

$$= \frac{|x-1|.|1+(x+1)+\cdots+(x^{n-1}+\cdots+x+1)|}{n+1}$$

$$\leqq \frac{|x-1|(1+2+\cdots+n)}{n+1} = \frac{|1-x|\,n}{2} < |1-x|\,n,$$

also für $x \to 1$ längs des Bogens

$$\left|\sum_{n=0}^{m} a_n \frac{1+x+\cdots+x^n}{n+1} - s_m\right| = \left|\sum_{n=1}^{m} a_n\left(\frac{1+x+\cdots+x^n}{n+1}-1\right)\right|$$

$$\leqq |1-x| \sum_{n=1}^{m} n\,|a_n| = o\left(|1-x|\frac{1}{|1-x|}\right) = o(1) \to 0,$$

folglich bei $m \to \infty$

$$s_m \to 0.$$

§ 9.

Der Hardy-Littlewoodsche Satz für Potenzreihen mit positiven Koeffizienten.

Ich kehre zu dem alten, prägnantesten Wortlaut des § 7 mit Annäherung längs der positiven Achse zurück. Littlewood[1]) hatte die wichtige Entdeckung gemacht, daß die Voraussetzung $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ durch die schwächere $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ersetzt werden kann. Offenbar würde es genügen, dies für reelle a_n zu beweisen. Die Wiedergabe des Beweises erübrigt sich, weil Hardy und Littlewood später gefunden haben, daß, die Konvergenz der Potenzreihe für $|x|<1$ vorausgesetzt, statt dieser Beschränktheit von $n\,a_n$ einseitige Beschränktheit ausreicht; es lautet also der

1) Littlewood, S. 438.

Hardy-Littlewoodsche Satz:

Voraussetzung: *Es sei für* $n \geqq 1$

$$a_n < \frac{c}{n} \qquad (c > 0).$$

Es sei ferner

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

für $|x| < 1$ *konvergent und bei reeller Annäherung* $x \to 1$

$$f(x) \to 0.$$

Behauptung: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = 0.$

Dieser Satz liegt sehr tief. Er wird sich als Korollar aus einem anderen Hardy-Littlewoodschen Satz ergeben, welcher auch an sich von höchstem Interesse ist und sich auf Potenzreihen mit positiven Koeffizienten bezieht. In diesem Paragraphen werde ich letzteren Satz entwickeln, im nächsten daraus den obigen folgern.

Hilfssatz 1.

Voraussetzung: *Es sei* $g(x)$ *für* $0 < x < 1$ *reell und differentiierbar.* $g'(x)$ *wachse dort beständig. Bei* $x \to 1$ *sei*

$$g(x) \sim (1-x)^{-\alpha}, \; \alpha > 0.$$

Behauptung: $g'(x) \sim \alpha(1-x)^{-\alpha-1}$.

Beweis: Es sei $0 < \vartheta < 1$ und ϑ fest. Für $0 < x < 1$ ist nach dem Mittelwertsatz

$$g'(x) \leqq \frac{g(x+\vartheta(1-x)) - g(x)}{\vartheta(1-x)} \leqq g'(x+\vartheta(1-x)).$$

Für $x \to 1$ ist

$$g(x+\vartheta(1-x)) \sim \big(1-(x+\vartheta(1-x))\big)^{-\alpha} = (1-\vartheta)^{-\alpha}(1-x)^{-\alpha},$$

also

$$\overline{\lim}\,(1-x)^{\alpha+1} g'(x) \leqq \frac{(1-\vartheta)^{-\alpha}-1}{\vartheta} \leqq \underline{\lim}\,(1-x)^{\alpha+1} g'(x+\vartheta(1-x)).$$

Ersteres liefert, da der $\overline{\lim}$ links von ϑ frei ist und der mittlere Ausdruck für $\vartheta \to 0$ den Limes α hat,

$$\overline{\lim}\,(1-x)^{\alpha+1} g'(x) \leqq \alpha;$$

letzteres liefert zunächst, durch Multiplikation mit $(1-\vartheta)^{\alpha+1}$,

$$\underline{\lim}\,(1-(x+\vartheta(1-x)))^{\alpha+1}\,g'(x+\vartheta(1-x)) \geqq (1-\vartheta)^{\alpha+1}\,\frac{(1-\vartheta)^{-\alpha}-1}{\vartheta},$$

also, da $x+\vartheta(1-x) = y$ mit x gegen 1 wächst,

$$\underline{\lim}\,(1-x)^{\alpha+1}\,g'(x) \geqq (1-\vartheta)^{\alpha+1}\,\frac{(1-\vartheta)^{-\alpha}-1}{\vartheta},$$

folglich, da die linke Seite von ϑ frei ist,

$$\geqq \lim_{\vartheta=0}\,(1-\vartheta)^{\alpha+1}\,\frac{(1-\vartheta)^{-\alpha}-1}{\vartheta} = \alpha.$$

Daher ist

$$\lim\,(1-x)^{\alpha+1}\,g'(x) = \alpha.$$

Hilfssatz 2.

Voraussetzung: *Es sei*

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

für $0<x<1$ *konvergent. Bei* $x \to 1$ *sei*

$$h(x) \sim (1-x)^{-\beta},\ \beta>0.$$

Es seien alle $b_n \geqq 0$.

Behauptung: *Für jedes ganze* $\nu>0$ *ist*

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n n^{\nu} x^n \sim \beta(\beta+1)\ldots(\beta+\nu-1)\,(1-x)^{-\beta-\nu}.$$

Beweis: $h(x)$ erfüllt offenbar mit $\alpha=\beta$ die Voraussetzung des Hilfssatzes 1. Daher ist

$$x h'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n n x^n \sim \beta(1-x)^{-\beta-1}.$$

Wenn die Behauptung schon bei $\nu-1$ bewiesen ist,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n n^{\nu-1}}{\beta\ldots(\beta+\nu-2)}\,x^n \sim (1-x)^{-\beta-\nu+1},$$

so erfüllt offenbar die Potenzreihe links mit $\alpha=\beta+\nu-1$ die Voraussetzung des Hilfssatzes 1, woraus genau die Richtigkeit der Behauptung bei ν folgt.

Hilfssatz 3.

Jedem $\delta > 0$ läßt sich ein $\nu_0 = \nu_0(\delta)$ so zuordnen, daß für alle $\nu \geqq \nu_0$ und alle t der Strecke $0 < t < 1$

$$\Sigma_1 = \sum_{n \leqq \left(\nu - \nu^{\frac{2}{3}}\right) t^{-1}} n^\nu e^{-nt} < \frac{\delta\, \nu!}{t^{\nu+1}}$$

und

$$\Sigma_2 = \sum_{n > \left(\nu + \nu^{\frac{2}{3}} - 2\right) t^{-1}} n^\nu e^{-nt} < \frac{\delta\, \nu!}{t^{\nu+1}}$$

ist.

Vorbemerkung: Σ_1 ist so gemeint, daß n von 0 an läuft. Behauptet wird, daß die obere Grenze von $\frac{t^{\nu+1}}{\nu!}\Sigma$ im Intervall $0 < t < 1$ bei $\nu \to \infty$ gegen 0 strebt. Anders ausgedrückt, daß $\frac{t^{\nu+1}}{\nu!}\Sigma$ für $0 < t < 1$ gleichmäßig bei $\nu \to \infty$ gegen 0 strebt.

Beweis: Die Zahl ν liegt, wenn sie alsbald $\geqq 3$ gedacht wird, zwischen $\nu - \nu^{\frac{2}{3}}$ und $\nu + \nu^{\frac{2}{3}} - 2$; da die Funktion $u^\nu e^{-ut}$ des stetig wachsenden positiven u ihr Maximum bei $u = \nu t^{-1}$, der Wurzel von

$$0 = \frac{d}{du}\left(u^\nu e^{-ut}\right) = \nu u^{\nu-1} e^{-ut} - u^\nu t e^{-ut},$$

hat, so wächst der Summand in Σ_1, während er in Σ_2 abnimmt.

1) Σ_1 ist also höchstens gleich der Gliederzahl mal dem Wert von $u^\nu e^{-ut}$ für die noch unter νt^{-1} gelegene Zahl $u = \left(\nu - \nu^{\frac{2}{3}}\right) t^{-1}$. Die Gliederzahl ist $\left[\left(\nu - \nu^{\frac{2}{3}}\right) t^{-1}\right] + 1 < \left(\nu - \nu^{\frac{2}{3}}\right) t^{-1} + t^{-1} < \nu t^{-1}$; daher ist

$$\begin{aligned} t^{\nu+1} \Sigma_1 &< t^{\nu+1} \nu t^{-1} \left(\nu - \nu^{\frac{2}{3}}\right)^\nu t^{-\nu} e^{-\nu + \nu^{\frac{2}{3}}} \\ &= e^{\log \nu + \nu \log\left(\nu - \nu^{\frac{2}{3}}\right) - \nu + \nu^{\frac{2}{3}}}; \end{aligned}$$

die rechte Seite ist von t frei, und bei $\nu \to \infty$ ist der Exponent

$$\begin{aligned} &\log \nu + \nu\left(\log \nu + \log\left(1 - \nu^{-\frac{1}{3}}\right)\right) - \nu + \nu^{\frac{2}{3}} \\ &= O(\log \nu) + \nu\left(\log \nu - \nu^{-\frac{1}{3}} - \tfrac{1}{2}\nu^{-\frac{2}{3}}\right) - \nu + \nu^{\frac{2}{3}} \\ &= \nu \log \nu - \nu - \tfrac{1}{2}\nu^{\frac{1}{3}} + o\left(\nu^{\frac{1}{3}}\right); \end{aligned}$$

andererseits ist

$$\log(\nu!) = \nu \log \nu - \nu + O(\log \nu) = \nu \log \nu - \nu + o\left(\nu^{\frac{1}{3}}\right);$$

die obige rechte Seite (obere Schranke für $t^{\nu+1} \Sigma_1$) ist daher

$$e^{\log \nu ! - \frac{1}{2} \nu^{\frac{1}{3}} + o\left(\nu^{\frac{1}{3}}\right)} = o(\nu!).$$

2) In Σ_2 ist der Quotient zweier konsekutiver Glieder

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\nu} e^{-t} < \left(1 + \frac{t}{\nu + \nu^{\frac{2}{3}} - 2}\right)^{\nu} e^{-t} < e^{\frac{t}{\nu + \nu^{\frac{2}{3}} - 2}\nu} e^{-t}$$

$$= e^{-t \frac{\nu^{\frac{2}{3}} - 2}{\nu + \nu^{\frac{2}{3}} - 2}} = e^{-q}$$

und für dies von n freie q (das zwischen 0 und 1 liegt)

$$\frac{1}{1 - e^{-q}} = \frac{e^q}{e^q - 1} < \frac{e}{e^q - 1} < \frac{e}{q} = \frac{e\left(\nu + \nu^{\frac{2}{3}} - 2\right)}{t\left(\nu^{\frac{2}{3}} - 2\right)} < \frac{e\left(\nu + \nu^{\frac{2}{3}}\right)}{t\left(\nu^{\frac{2}{3}} - 2\right)};$$

das erste Glied in Σ_2 ist

$$< \left(\nu + \nu^{\frac{2}{3}} - 2\right)^{\nu} t^{-\nu} e^{-\nu - \nu^{\frac{2}{3}} + 2} = Q;$$

daher ist

$$t^{\nu+1} \Sigma_2 < t^{\nu+1} \left(Q + Q e^{-q} + Q e^{-2q} + \cdots\right)$$

$$= t^{\nu+1} \frac{Q}{1 - e^{-q}} < \frac{e\left(\nu + \nu^{\frac{2}{3}}\right)^{\nu+1}}{\nu^{\frac{2}{3}} - 2} e^{-\nu - \nu^{\frac{2}{3}} + 2};$$

die rechte Seite ist von t frei; ihr Logarithmus ist bei $\nu \to \infty$

$$1 + (\nu + 1) \log\left(\nu + \nu^{\frac{2}{3}}\right) - \log\left(\nu^{\frac{2}{3}} - 2\right) - \nu - \nu^{\frac{2}{3}} + 2$$

$$= O(\log \nu) + \nu \left(\log \nu + \log\left(1 + \nu^{-\frac{1}{3}}\right)\right) - \nu - \nu^{\frac{2}{3}}$$

$$= O(\log \nu) + \nu \left(\log \nu + \nu^{-\frac{1}{3}} - \tfrac{1}{2} \nu^{-\frac{2}{3}}\right) - \nu - \nu^{\frac{2}{3}}$$

$$= \nu \log \nu - \nu - \tfrac{1}{2} \nu^{\frac{1}{3}} + o\left(\nu^{\frac{1}{3}}\right),$$

die obige rechte Seite also $o(\nu!)$.

Zusatz: Wird Hilfssatz 3 auf $\nu + 1$ statt ν angewendet und beachtet, daß für alle hinreichend großen ν erstens $(\nu + 1) - (\nu + 1)^{\frac{2}{3}} > \nu - \nu^{\frac{2}{3}}$, zweitens $(\nu + 1) + (\nu + 1)^{\frac{2}{3}} - 2 < \nu + \nu^{\frac{2}{3}}$ ist, so ergibt sich für $\nu \geqq \nu_1(\delta)$, $0 < t < 1$

$$\sum_3 = \sum_{n \leqq \left(\nu - \nu^{\frac{2}{3}}\right) t^{-1}} n^{\nu+1} e^{-nt} < \frac{\delta(\nu+1)!}{t^{\nu+2}},$$

$$\sum_4 = \sum_{n > \left(\nu + \nu^{\frac{2}{3}}\right) t^{-1}} n^{\nu+1} e^{-nt} < \frac{\delta(\nu+1)!}{t^{\nu+2}}.$$

Hardy-Littlewoodscher Satz über Potenzreihen mit positiven Koeffizienten.

Voraussetzung: *Es sei*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

für $0 < x < 1$ *konvergent. Bei* $x \to 1$ *sei*

$$f(x) \sim \frac{1}{1-x}.$$

Es seien alle $a_n \geqq 0$.

Behauptung: $s_n = a_0 + \cdots + a_n \sim n$.

Beweis: $$s_n = \sum_{m=0}^{n} a_m \leqq \sum_{m=0}^{n} a_m e^{\frac{n-m}{n}} = e \sum_{m=0}^{n} a_m e^{-\frac{m}{n}}$$

$$< e \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{-\frac{m}{n}} = e f\left(e^{-\frac{1}{n}}\right) = O(n).$$

Es kann daher c so gewählt werden, daß für alle $n \geqq 1$

$$s_n < c n$$

ist.

Für $0 < x < 1$ ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \frac{1}{1-x} f(x);$$

bei $x \to 1$ ist daher

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \sim (1-x)^{-2},$$

also nach Hilfssatz 2 für jedes $\nu > 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n n^{\nu} x^n \sim 2.3\ldots(\nu+1)(1-x)^{-\nu-2} = (\nu+1)!(1-x)^{-\nu-2}.$$

Bei zu 0 abnehmendem t ist somit für jedes $\nu \geqq 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n n^\nu e^{-nt} \sim (\nu+1)!\,(1-e^{-t})^{-\nu-2} \sim (\nu+1)!\,t^{-\nu-2}.$$

Bekanntlich (oder als trivialer Spezialfall $f(x) = x + x^2 + \cdots$, $s_n = n$ mit $\nu - 1$ statt ν) ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^\nu e^{-nt} \sim \nu!\,t^{-\nu-1}.$$

Wenn nun j das Intervall $(\nu - \nu^{\frac{2}{3}})\,t^{-1} < n \leqq (\nu + \nu^{\frac{2}{3}})\,t^{-1}$ bezeichnet, ist nach Hilfssatz 3 und Zusatz bei gegebenem $\delta > 0$, das ich alsbald $< \frac{1}{3}$ nehme, für $\nu \geqq \nu_2(\delta)$, $0 < t < 1$

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} n^\nu e^{-nt} - \sum_j n^\nu e^{-nt} \right| < 2\,\delta\,\nu!\,t^{-\nu-1}$$

und

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} s_n n^\nu e^{-nt} - \sum_j s_n n^\nu e^{-nt} \right| < 2\,c\,\delta\,(\nu+1)!\,t^{-\nu-2}.$$

Zu jedem $\nu \geqq \nu_2(\delta)$ gibt es also ein $\tau = \tau(\delta, \nu)$ derart, daß für $0 < t < \tau$

$$(1 - 3\,\delta)\,\nu!\,t^{-\nu-1} < \sum_j n^\nu e^{-nt} < (1 + 3\,\delta)\,\nu!\,t^{-\nu-1}$$

und

$$(1 - 3\,c\,\delta)(\nu+1)!\,t^{-\nu-2} < \sum_j s_n n^\nu e^{-nt} < (1 + 3\,c\,\delta)(\nu+1)!\,t^{-\nu-2}$$

ist.

Nun ist

$$s_{\left[(\nu - \nu^{\frac{2}{3}})\,t^{-1}\right]} \sum_j n^\nu e^{-nt} \leqq \sum_j s_n n^\nu e^{-nt} \leqq s_{\left[(\nu + \nu^{\frac{2}{3}})\,t^{-1}\right]} \sum_j n^\nu e^{-nt},$$

also erstens

$$s_{\left[(\nu - \nu^{\frac{2}{3}})\,t^{-1}\right]} < \frac{1 + 3\,c\,\delta}{1 - 3\,\delta}\,\frac{\nu+1}{t},$$

zweitens

$$s_{\left[(\nu + \nu^{\frac{2}{3}})\,t^{-1}\right]} > \frac{1 - 3\,c\,\delta}{1 + 3\,\delta}\,\frac{\nu+1}{t}.$$

Ersteres liefert, da $(\nu - \nu^{\frac{2}{3}})\,t^{-1}$ bei stetig zu 0 abnehmendem $t < \tau$ u. a. alle hinreichend großen ganzen Zahlen n durchläuft, für alle $n > n_0(\delta, \nu)$

$$s_n < \frac{1 + 3\,c\,\delta}{1 - 3\,\delta}\,\frac{\nu+1}{\nu - \nu^{\frac{2}{3}}}\,n;$$

letzteres liefert entsprechend für $n > n_1(\delta, \nu)$

$$s_n > \frac{1-3c\delta}{1+3\delta} \frac{\nu+1}{\nu+\nu^{\frac{2}{3}}} n.$$

Für $n > n_2(\delta, \nu)$ ist also

$$\frac{1-3c\delta}{1+3\delta} \frac{\nu+1}{\nu+\nu^{\frac{2}{3}}} < \frac{s_n}{n} < \frac{1+3c\delta}{1-3\delta} \frac{\nu+1}{\nu-\nu^{\frac{2}{3}}}.$$

Bei gegebenem $\varepsilon > 0$ kann ich nun erst $\delta = \delta(\varepsilon)$ so wählen, daß $0 < \delta < \frac{1}{3}$ und

$$1-\varepsilon < \frac{1-3c\delta}{1+3\delta}, \qquad \frac{1+3c\delta}{1-3\delta} < 1+\varepsilon$$

ist; alsdann ein $\nu = \nu(\delta, \varepsilon) = \nu(\varepsilon) \geqq \nu_2(\delta)$ so, daß

$$1-\varepsilon < \frac{1-3c\delta}{1+3\delta} \frac{\nu+1}{\nu+\nu^{\frac{2}{3}}}, \qquad \frac{1+3c\delta}{1-3\delta} \frac{\nu+1}{\nu-\nu^{\frac{2}{3}}} < 1+\varepsilon$$

ist. Dann erhalte ich für $n \geqq n_2 = n_2(\delta, \nu) = n_2(\varepsilon)$

$$1-\varepsilon < \frac{s_n}{n} < 1+\varepsilon,$$

q. e. d.

§ 10.

Die Hardy-Littlewoodsche Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes.

Hilfssatz 1.[1]

Voraussetzung: $w_m = \sum_{n=1}^{m} n a_n = o(m)$;

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \to 0$$

bei radialer Annäherung $x \to 1$.

Behauptung: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$.

Vorbemerkung: Dieser Hilfssatz enthält offenbar den Satz des § 7, wird aber andererseits aus ihm leicht gefolgert werden.

1) Tauber, S. 273.

Übrigens ist die Umkehrung des Hilfssatzes nach dem Abelschen Stetigkeitssatz und mit Rücksicht auf die Identität

$$w_m = -\sum_{n=0}^{m} s_n + s_m(m+1)$$

trivial.

Beweis: Wenn w_0 Null bedeutet und ohne Einschränkung der Allgemeinheit[1]) $a_0 = 0$ angenommen wird, ist für $0 < x < 1$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n - w_{n-1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} w_n \left(\frac{x^n - x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^n}{n(n+1)}\right)$$

$$= (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n(n+1)} x^n.$$

Wegen $w_n = o(n)$ ist

$$(1-x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n+1} x^n \to 0;$$

wegen $f(x) \to 0$ ist daher

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n(n+1)} x^n \to 0.$$

Es ist also nach dem Satz des § 7, der wegen $\frac{w_n}{n(n+1)} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ auf die Funktion $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n(n+1)} x^n$ anwendbar ist,

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n(n+1)} = \lim_{m=\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{w_n}{n(n+1)}$$

$$= \lim_{m=\infty} \sum_{n=1}^{m} w_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \lim_{m=\infty} \left(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}(w_n - w_{n-1}) - \frac{w_m}{m+1}\right)$$

$$= \lim_{m=\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}(w_n - w_{n-1}) = \lim_{m=\infty} \sum_{n=1}^{m} a_n.$$

---

1) Denn mit $f(x)$ hat auch $f(x) - a_0 + a_0 x$ für $x \to 1$ den Limes 0.

Hilfssatz 2.

Voraussetzung: *Es sei* $g(x)$ *für* $0 < x < 1$ *reell und zweimal differentiierbar. Für* $x \to 1$ *sei*

$$g(x) \to 0;$$

ferner sei $(1-x)^2 g''(x)$ *für* $0 < x < 1$ *nach oben beschränkt:*

$$(1-x)^2 g''(x) < c.$$

Behauptung: $(1-x) g'(x) \to 0$.

Beweis: c darf > 0 angenommen werden. Es sei $0 < \vartheta < 1$, aber ϑ fest. Dann ist nach dem Taylorschen Satz für $0 < x < 1$, wenn ξ_1 und ξ_2 gewisse Werte des Intervalls $x < \xi < x + \vartheta(1-x) = x_1$ bezeichnen, erstens

$$\begin{aligned} g(x_1) - g(x) &= \vartheta(1-x) g'(x) + \frac{\vartheta^2}{2}(1-x)^2 g''(\xi_1), \\ (1-x) g'(x) &= \frac{1}{\vartheta}(g(x_1) - g(x)) - \frac{\vartheta}{2}(1-x)^2 g''(\xi_1) \\ &> \frac{1}{\vartheta}(g(x_1) - g(x)) - \frac{\vartheta}{2}(1-x)^2 \frac{c}{(1-x_1)^2} \\ &= \frac{1}{\vartheta}(g(x_1) - g(x)) - \frac{\vartheta c}{2(1-\vartheta)^2}, \end{aligned}$$

also bei $x \to 1$ wegen $g(x) \to 0$

$$\underline{\lim}\,(1-x) g'(x) \geqq -\frac{\vartheta c}{2(1-\vartheta)^2},$$

folglich, da die linke Seite von ϑ frei ist,

$$\underline{\lim}\,(1-x) g'(x) \geqq 0;$$

zweitens

$$\begin{aligned} g(x_1) - g(x) &= \vartheta(1-x) g'(x_1) - \frac{\vartheta^2}{2}(1-x)^2 g''(\xi_2), \\ (1-x_1) g'(x_1) &= \frac{1-\vartheta}{\vartheta}(g(x_1) - g(x)) + \frac{(1-\vartheta)\vartheta}{2}(1-x)^2 g''(\xi_2) \\ &< \frac{1-\vartheta}{\vartheta}(g(x_1) - g(x)) + \frac{(1-\vartheta)\vartheta}{2}(1-x)^2 \frac{c}{(1-x_1)^2} \\ &= \frac{1-\vartheta}{\vartheta}(g(x_1) - g(x)) + \frac{\vartheta c}{2(1-\vartheta)}, \end{aligned}$$

$$\overline{\lim}\,(1-x_1) g'(x_1) \leqq \frac{\vartheta c}{2(1-\vartheta)},$$

$$\overline{\lim}\,(1-x)\,g'(x) \leqq \frac{\vartheta c}{2(1-\vartheta)},$$

$$\overline{\lim}\,(1-x)\,g'(x) \leqq \lim_{\vartheta=0} \frac{\vartheta c}{2(1-\vartheta)} = 0.$$

Daher ist

$$\lim\,(1-x)\,g'(x) = 0.$$

Beweis des zu Beginn des § 9 ausgesprochenen Hardy-Littlewoodschen Satzes.

Weil in

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

für alle n

$$n\,a_n < c \qquad (c > 0)$$

ist, ist im Intervall $0 < x < 1$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,a_n x^{n-2} < c \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)\,x^{n-2}$$

$$= c \sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1} = \frac{c}{(1-x)^2}.$$

Wegen $f(x) \rightarrow 0$ ist also nach Hilfssatz 2

$$(1-x)\,f'(x) \rightarrow 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,a_n}{c}\,x^n = \frac{x}{c}\,f'(x) = o\left(\frac{1}{1-x}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{n\,a_n}{c}\right) x^n \sim \frac{1}{1-x}.$$

Wegen $1 - \frac{n\,a_n}{c} > 0$ ist daher nach dem Hauptsatz des § 9

$$\sum_{n=1}^{m} \left(1 - \frac{n\,a_n}{c}\right) \sim m,$$

$$m - \frac{1}{c} \sum_{n=1}^{m} n\,a_n = m + o(m),$$

$$\sum_{n=1}^{m} n\,a_n = o(m),$$

also nach Hilfssatz 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0.$$

§ 11.

Einige Nachträge.

Ich kehre zu einfacheren Dingen zurück und beweise, lediglich, weil sie nachher angewendet werden, noch zwei Sätze aus diesem Ideenkreis.

Satz A.

Voraussetzung:

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Es sei ferner bei wachsendem r

$$\lim_{r=1} f\left(r e^{\varphi i}\right) = g(\varphi)$$

gleichmäßig für alle φ vorhanden.

Behauptung: *Es ist die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{n\varphi i}$$

gleichmäßig konvergent und $= g(\varphi)$.

Satz B.

Voraussetzung:

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Es sei ferner $f(x)$ für $|x| < 1$ beschränkt:

$$|f(x)| < M.$$

Behauptung:

$$\left|\sum_{n=0}^{m} a_n e^{n\varphi i}\right| < N,$$

wo N von φ und m unabhängig ist.

Beweis von Satz A und Satz B: Für $0 < r < 1$ und $m > 0$ ist

$$\sum_{n=0}^{m} a_n e^{n\varphi i} - f\left(r e^{\varphi i}\right) = \sum_{n=0}^{m} a_n e^{n\varphi i}\left(1 - r^n\right) - \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n r^n e^{n\varphi i},$$

$$\left|\sum_{n=0}^{m} a_n e^{n\varphi i} - f\left(r e^{\varphi i}\right)\right| \leqq (1-r) \sum_{n=1}^{m} n\,|a_n| + \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n|\, r^n.$$

1) Im Falle $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ strebt, $r = 1 - \frac{1}{m}$ gesetzt, wie beim Beweise des Satzes aus § 7 gezeigt, die (von φ freie) rechte Seite mit $m \to \infty$ gegen 0, womit offenbar Satz A bewiesen ist.

2) Im Falle $|n a_n| < c$ ist für $r = 1 - \frac{1}{m}$ die rechte Seite

$$< \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} c + \frac{c}{m} \sum_{n=m+1}^{\infty} r^n < c + \frac{c}{m} \sum_{n=0}^{\infty} r^n = 2c,$$

also, wegen $\left| f\left(\left(1 - \frac{1}{m}\right) e^{\varphi i}\right)\right| < M$,

$$\left|\sum_{n=0}^{m} a_n e^{n\varphi i}\right| < M + 2c = N,$$

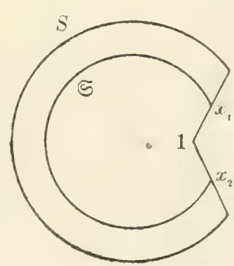
wie Satz B behauptet.

§ 12.

Ein Satz von M. Riesz.

Voraussetzung: *Es bezeichne S den Sektor*

$$\begin{cases} |x| \leqq R & (R > 1), \\ \vartheta \leqq \operatorname{arc}(x-1) \leqq 2\pi - \vartheta & \left(0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$



Es sei $f(x)$ im Sektor S einschließlich des Randes stetig und ebenda exkl. $x = 1$ regulär.

Behauptung: *Die für $|x| < 1$ gültige Potenzreihe*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

konvergiert für $|x| = 1$ und zwar gleichmäßig.

Beweis: Nach Satz A des § 11 ist es hinreichend,

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

zu beweisen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $f(1) = 0$. Es bezeichne M das Maximum von $|f(x)|$ für den Sektor S.

$\delta > 0$ sei gegeben. $r = r(\delta)$ werde so gewählt, daß $1 < r < R$ ist, und daß auf dem geradlinigen Randteile des Sektors $\mathfrak{S}$

$$|x| \leqq r, \quad \vartheta \leqq \operatorname{arc}(x-1) \leqq 2\pi - \vartheta$$

die Ungleichung

$$|f(x)| < \delta$$

besteht.

Nach dem (wegen der Stetigkeit von $f(x)$ auf den Rand von $\mathfrak{S}$ ausdehnbaren) Cauchyschen Satz ist

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_1^{x_1} \frac{f(x)}{x^{n+1}}\,dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{x^{n+1}}\,dx + \int_{x_2}^{1} \frac{f(x)}{x^{n+1}}\,dx\right).$$

Hierin ist für $n > 0$

$$\left|\int_1^{x_1} \frac{f(x)}{x^{n+1}}\,dx\right| \leqq \delta \int_0^{|x_1-1|} \frac{dy}{|1+e^{\vartheta i} y|^{n+1}} \leqq \delta \int_0^{|x_1-1|} \frac{dy}{(1+y\cos\vartheta)^{n+1}}$$

$$< \delta \int_0^{\infty} \frac{dy}{(1+y\cos\vartheta)^{n+1}} = \frac{\delta}{n\cos\vartheta},$$

ebenso

$$\left|\int_{x_2}^{1} \frac{f(x)}{x^{n+1}}\,dx\right| < \frac{\delta}{n\cos\vartheta},$$

endlich

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{x^{n+1}}\,dx\right| \leqq 2\pi r \frac{M}{r^{n+1}} = \frac{2\pi M}{r^n},$$

also

$$|a_n| < \frac{\delta}{\pi\cos\vartheta}\cdot\frac{1}{n} + \frac{M}{r^n},$$

$$\overline{\lim}\, n\,|a_n| \leqq \frac{\delta}{\pi\cos\vartheta}$$

für alle $\delta > 0$, folglich

$$\lim_{n=\infty} n\,|a_n| = 0.$$

§ 13.

Ein Satz von Fejér.

Voraussetzung: $\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|^2$ *konvergiere.*

Behauptung:
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
konvergiert in allen Punkten auf dem Rande des Einheitskreises, für welche bei radialer Annäherung die Funktion einen Limes hat. Und zwar gleichmäßig in jeder Menge, für welche der Limes gleichmäßig vorhanden ist.

Vorbemerkungen: 1) Die Voraussetzung ist sicher erfüllt, wenn
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
für $|x| < 1$ regulär, beschränkt und schlicht ist. Denn dann ist die Fläche des Bildes des Kreises $|x| = r$, $0 < r < 1$, welche [1])
$$= \iint\limits_{u^2+v^2 \leq r^2} |f'(x)|^2 du\, dv = \int_{\varrho=0}^{r} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left|f'\left(\varrho e^{\varphi i}\right)\right|^2 \varrho\, d\varrho\, d\varphi$$
$$= \int_0^r \varrho\, d\varrho \int_0^{2\pi} \left|f'\left(\varrho e^{\varphi i}\right)\right|^2 d\varphi = \int_0^r \varrho\, d\varrho\, 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 \varrho^{2n-2}$$
$$= 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 \int_0^r \varrho^{2n-1} d\varrho = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n\, |a_n|^2 r^{2n}$$
ist, für $0 < r < 1$ beschränkt, woraus die Konvergenz von
$$\sum_{n=0}^{\infty} n\,|a_n|^2$$
folgt.

2) Wenn diese Reihe konvergiert und überdies $\lim\limits_{r=1} f\left(r e^{\varphi i}\right)$ gleichmäßig für alle φ vorhanden ist, m. a. W. überdies $f(x)$ eine für $|x| \leq 1$ stetige, für $|x| < 1$ reguläre Funktion ist, so besagt die Behauptung gleichmäßige Konvergenz auf dem ganzen Rande.

Beweis: Ich setze
$$\sum_{n=\nu}^{\infty} n\,|a_n|^2 = \varepsilon_\nu.$$

1) $x = u + vi$.

Dann ist, den trivialen Fall eines ganzen rationalen $f(x)$ beiseite gelassen, $\varepsilon_\nu > 0$ und $\varepsilon_\nu \to 0$. Ich nehme ν gleich so groß, daß $r_\nu = 1 - \frac{\sqrt{\varepsilon_\nu}}{\nu} > 0$ ist. Dann ist für alle φ

$$\left| \sum_{n=0}^{\nu} a_n e^{n\varphi i} - f\left(r_\nu e^{\varphi i}\right) \right| = \left| \sum_{n=0}^{\nu} a_n e^{n\varphi i}\left(1 - r_\nu^n\right) - \sum_{n=\nu+1}^{\infty} a_n r_\nu^n e^{n\varphi i} \right|$$

$$\leqq (1 - r_\nu) \sum_{n=0}^{\nu} n\,|a_n| + \sum_{n=\nu+1}^{\infty} |a_n|\, r_\nu^n.$$

Die rechte Seite ist von φ frei; die Behauptung wird also bewiesen sein, wenn gezeigt wird, daß sie $\to 0$ für $\nu \to \infty$ ist. Nun ist sie aber unter Anwendung der Cauchyschen Ungleichung

$$\leqq (1 - r_\nu) \sum_{n=0}^{\nu} \sqrt{n}\,.\,\sqrt{n}\,|a_n| + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \sum_{n=\nu+1}^{\infty} \sqrt{n}\,|a_n|\, r_\nu^n$$

$$\leqq (1 - r_\nu) \sqrt{\sum_{n=0}^{\nu} n\,.\sum_{n=0}^{\infty} n\,|a_n|^2} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \sqrt{\sum_{n=\nu+1}^{\infty} n\,|a_n|^2 \sum_{n=\nu+1}^{\infty} r_\nu^{2n}}$$

$$\leqq (1 - r_\nu) \sqrt{\nu^2 . \varepsilon_0} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \sqrt{\varepsilon_\nu \frac{1}{1 - r_\nu}} = \sqrt{\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_\nu} + \sqrt[4]{\varepsilon_\nu} \to 0.$$

Viertes Kapitel.

Über einige Merkwürdigkeiten des Verhaltens von Potenzreihen auf dem Rande.

§ 14.

Hardysches Beispiel.

Es gibt eine Potenzreihe, die für $|x| = 1$ gleichmäßig, aber nicht absolut konvergiert.

Beweis: Die Funktion

$$g(x) = (1-x)^{-i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-i}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

ist für $|x| < 1$ regulär und beschränkt, weil ja dort

$$g(x) = e^{-i \log(1-x)}$$

mit $-\frac{\pi}{2} < \Im \log(1-x) < \frac{\pi}{2}$ ist[1]. Es ist

$$|nb_n| = n \left| \frac{i(i+1)\ldots(i+n-1)}{1\ldots(n-1)} \frac{1}{n} \right|$$

$$= \sqrt{\left(1+\frac{1}{1^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{(n-1)^2}\right)} \to \sqrt{\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{\nu^2}\right)},$$

also einerseits

$$b_n = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

andererseits

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|b_n|}{\log n}$$

1) $\Im(z)$ bedeutet die Ordinate η von $z = \xi + \eta i$.

divergent. Nach dem Satz B des § 11 ist wegen $|g(x)| < M$ und $b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, wenn für $m \geqq 2$

$$B_m(\varphi) = \sum_{n=2}^{m} b_n e^{n\varphi i}$$

gesetzt wird,

$$|B_m(\varphi)| < c,$$

wo c von m und φ frei ist.

Wird nun für $n \geqq 2$

$$a_n = \frac{b_n}{\log n},$$

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{\log n} x^n$$

gesetzt, so ist erstens

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n|$$

divergent; zweitens

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{n\varphi i}$$

gleichmäßig konvergent, wie aus der für $v \geqq u \geqq 3$ gültigen Abschätzung

$$\left| \sum_{n=u}^{v} a_n e^{n\varphi i} \right| = \left| \sum_{n=u}^{v} \frac{B_n(\varphi) - B_{n-1}(\varphi)}{\log n} \right|$$

$$= \left| \sum_{n=u}^{v} B_n(\varphi) \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log (n+1)} \right) - \frac{B_{u-1}(\varphi)}{\log u} + \frac{B_v(\varphi)}{\log (v+1)} \right|$$

$$< c \sum_{n=u}^{v} \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log (n+1)} \right) + \frac{c}{\log u} + \frac{c}{\log (v+1)} = \frac{2c}{\log u}$$

hervorgeht.

§ 15.

Lusinsches Beispiel.

Es gibt eine Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

mit $a_n \to 0$, welche auf dem ganzen Rande des Einheitskreises divergiert.

Beweis: Für ganzes $m > 0$ setze ich

$$g_m(x) = 1 + x + \cdots + x^{m-1} = \frac{1-x^m}{1-x}.$$

Dann ist für $\xi = e^{\varphi i} \neq 1$

$$|g_m(\xi)| = \left|\frac{1-e^{m\varphi i}}{1-e^{\varphi i}}\right| = \left|\frac{e^{-\frac{m}{2}\varphi i} - e^{\frac{m}{2}\varphi i}}{e^{-\frac{\varphi}{2}i} - e^{\frac{\varphi}{2}i}}\right| = \left|\frac{\sin\frac{m\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right|.$$

Auf dem Kreisbogen $-\frac{\pi}{m} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{m}$ exkl. $\varphi = 0$ ist also $\left(\text{wegen } \left|\frac{m\varphi}{2}\right| \leqq \frac{\pi}{2}\right)$

$$|g_m(\xi)| \geqq \frac{\frac{2}{\pi}\left|\frac{m\varphi}{2}\right|}{\left|\frac{\varphi}{2}\right|} = \frac{2}{\pi}m,$$

und diese Abschätzung $\frac{2}{\pi}m$ gilt auch für $\varphi = 0$. Für jedes $\xi = e^{\varphi i}$ gibt es also $\left(\text{da jener Bogen die Länge } \frac{2\pi}{m} \text{ hat}\right)$ ein ganzes k des Intervalls $0 \leqq k < m$, so daß

$$\left|g_m\left(e^{-\frac{2\pi k}{m}i}\xi\right)\right| \geqq \frac{2}{\pi}m$$

ist; wir merken uns

$$\underset{0 \leqq k < m}{\text{Max.}} \left|g_m\left(e^{-\frac{2\pi k}{m}i}\xi\right)\right| \geqq \frac{2}{\pi}m.$$

Nun werde für jedes $m > 0$ das Polynom

$$h_m(x) = g_m(x) + x^m g_m\left(e^{-\frac{2\pi}{m}i}x\right) + \cdots + x^{mk} g_m\left(e^{-\frac{2\pi k}{m}i}x\right) + \cdots$$
$$+ x^{m(m-1)} g_m\left(e^{-\frac{2\pi(m-1)}{m}i}x\right)$$

betrachtet; dies ist, da in jedem der m Terme die Exponenten größer sind als in den vorangehenden, ein Polynom $(m-1)(m+1)$ ten Grades, in dem alle Koeffizienten den absoluten Betrag 1 haben.

Schließlich werde

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} x^{1^2+2^2+\cdots+(m-1)^2} h_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

gesetzt. Dies ist, da links jeder Term wegen $1^2+\cdots+(m-1)^2 + (m-1)(m+1) < 1^2+\cdots+(m-1)^2+m^2$ ausschließlich höhere Exponenten liefert als der vorhergehende, eine Potenzreihe mit $a_n \to 0$.

Wäre diese Potenzreihe für irgend ein ξ auf dem Einheitskreise konvergent, so müßte a fortiori

$$\lim_{m=\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} \left|\xi^{1^2+\cdots+(m-1)^2}\right| \underset{0 \leqq k < m}{\text{Max.}} \left|\xi^{mk} g_m\left(e^{-\frac{2\pi k}{m} i} \xi\right)\right| = 0$$

sein, während nach dem obigen der Ausdruck unter dem Limeszeichen

$$\geqq \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{2}{\pi} m = \frac{2}{\pi} \sqrt{m}$$

ist.

§ 16.

Sierpińskisches Beispiel.

Es gibt eine Potenzreihe

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

welche in genau einem Punkte des Einheitskreises konvergiert.

Beweis: Unter Benutzung des Lusinschen Beispiels werde gesetzt:

$$g(x) = a_0 - a_0 x + a_1 x^2 - a_1 x^3 + a_2 x^4 - a_2 x^5 + \cdots$$

Diese Reihe ist im Punkte $x = 1$ wegen $a_n \to 0$ konvergent. Wäre sie für ein $\xi = e^{\varphi i} \neq 1$ konvergent, so würde a fortiori

$$a_0(1-\xi) + a_1 \xi^2 (1-\xi) + a_2 \xi^4 (1-\xi) + \cdots$$

konvergieren, also

$$a_0 + a_1 \xi^2 + a_2 \xi^4 + \cdots$$

gleichfalls, was wegen $|\xi^2| = 1$ nach Lusin ausgeschlossen ist.

Fünftes Kapitel.

Beziehungen der Koeffizienten einer Potenzreihe zu Singularitäten der Funktion auf dem Rande.

§ 17.

Satz von Vivanti-Dienes.

Voraussetzung: *Die Potenzreihe*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

habe den Konvergenzradius 1, *und alle Koeffizienten* a_n *seien* $\geqq 0$ *oder (was weniger besagt) gehören einem Winkelraum* $r e^{\varphi i}$, $r \geqq 0$, $\cos \varphi > \delta$ *an.*

Behauptung: 1 *ist singulärer Punkt der Funktion* $f(x)$.

Beweis: Wenn irgend eine Doppelreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_{n\nu}$$

in der angegebenen Summationsfolge konvergiert und alle Glieder einem Winkelraum $r e^{\varphi i}$, $r \geqq 0$, $\cos \varphi > \delta$ angehören, ist die Doppelreihe

$$\sum_{n,\nu} b_{n\nu}$$

absolut konvergent; wird nämlich $b_{n\nu} = r_{n\nu} e^{\varphi_{n\nu} i}$ gesetzt ($\cos \varphi_{n\nu} > \delta$), so konvergiert[1])

1) $\Re(z)$ bedeutet die Abszisse ξ von $z = \xi + \eta i$.

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Re(b_{n\nu}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} r_{n\nu} \cos \varphi_{n\nu},$$

also auch

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} r_{n\nu}\, \delta$$

und folglich auch

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} r_{n\nu}.$$

Gesetzt nun, 1 wäre reguläre Stelle; dann würde die mindestens für $|x| < \frac{1}{2}$ konvergente Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(\frac{1}{2})}{\nu!} (x - \tfrac{1}{2})^{\nu}$$

größeren Konvergenzradius als $\frac{1}{2}$ haben, also für ein $\varepsilon > 0$ im Punkte $x = 1 + \varepsilon$ konvergieren. Nun ist

$$\frac{f^{(\nu)}(\frac{1}{2})}{\nu!} = \sum_{n=\nu}^{\infty} \binom{n}{\nu} a_n \frac{1}{2^{n-\nu}},$$

und die (bei sukzessiver Summation nach n und ν) konvergente Doppelreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=\nu}^{\infty} \binom{n}{\nu} a_n \frac{1}{2^{n-\nu}} (\tfrac{1}{2} + \varepsilon)^{\nu}$$

hat lauter Glieder $r_{n\nu} e^{\varphi_{n\nu} i}$ mit $\cos \varphi_{n\nu} > \delta$. Sie wäre also absolut konvergent; insbesondere müßte daher die durch Umkehrung der Summationsfolge entstehende Reihe konvergieren:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (1 + 2\varepsilon)^{\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} (2 + 2\varepsilon)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1 + \varepsilon)^n,$$

während die gegebene Potenzreihe nur den Konvergenzradius 1 hat.

§ 18.

Satz von Fatou-M. Riesz.

Voraussetzung: $a_n \to 0$.

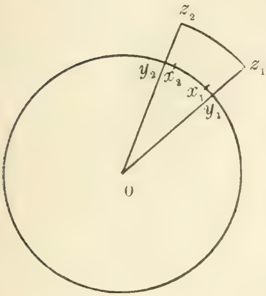
Behauptung:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

konvergiert in jedem regulären Punkte des Einheitskreises und zwar *gleichmäßig auf jedem Regularitätsbogen (d. i. Bogen, dessen sämtliche Punkte einschließlich der Enden regulär sind).*

Vorbemerkung: Falls der Konvergenzradius $r > 1$ ist, ist die Behauptung trivial. Im Falle $r = 1$ braucht natürlich kein regulärer Punkt auf dem Rande zu liegen.

Beweis: Es sei $x_1 \dots x_2$ ein gegebener Regularitätsbogen ($\operatorname{arc} x_1 \leqq \operatorname{arc} x \leqq \operatorname{arc} x_2$). Ich kann ihn beiderseits so verlängern, daß $y_1 \dots y_2$ auch noch ein Regularitätsbogen ist ($\operatorname{arc} y_1 < \operatorname{arc} x_1$, $\operatorname{arc} x_2 < \operatorname{arc} y_2$), und kann $R > 1$ so wählen, daß $f(x)$ im ganzen Sektor (einschließlich Rand) $0 \leqq |x| \leqq R$, $\operatorname{arc} y_1 \leqq \operatorname{arc} x \leqq \operatorname{arc} y_2$ regulär ist; z_1 und z_2 mögen die Ecken des Sektors außerhalb des Einheitskreises bezeichnen. Die Behauptung wird bewiesen sein, wenn es gelingt, für die eo ipso im Sektor regulären Funktionen von x



$$g_n(x) = \frac{f(x) - a_0 - \cdots - a_n x^n}{x^{n+1}} (x - y_1)(x - y_2) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

zu zeigen, daß auf dem Rande des Sektors gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} g_n(x) = 0$$

ist. Denn, weil $|g_n(x)|$ im Innern des Sektors nicht größer als das Maximum auf dem Rande ist, ist alsdann auf dem Bogen $x_1 \dots x_2$ gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} g_n(x) = 0,$$

und auf diesem Bogen ist

$$|f(x) - (a_0 + \cdots + a_n x^n)| \leqq \frac{|g_n(x)|}{L^2},$$

wo L der kleinste Abstand des Bogens vom Rande des Sektors ist, so daß auf dem Bogen gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} (f(x) - (a_0 + \cdots + a_n x^n)) = 0$$

folgen wird.

Offenbar braucht

$$\lim_{n=\infty} g_n(x) = 0$$

nur gezeigt zu werden:

1) gleichmäßig auf der Strecke 0 (exkl.) bis y_1 (exkl.),

2) gleichmäßig auf der Strecke y_1 (exkl.) bis z_1 (exkl.),

3) gleichmäßig auf dem Bogen z_1 (inkl.) bis z_2 (inkl.);

denn im Punkte 0 ist $g_n(x) = a_{n+1} y_1 y_2 \to 0$, im Punkte y_1 ist jedes $g_n(x) = 0$, und für die Strecke 0 bis z_2 folgt es aus Symmetriegründen.

M bezeichne das Maximum von $|f(x)|$ für die Sektorfläche.

1) Im Innern des Einheitskreises, also auf der Strecke 0 (exkl.) bis y_1 (exkl.) ist

$$\begin{aligned}|f(x) - (a_0 + \cdots + a_n x^n)| &= |a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \cdots|\\ &\leqq |a_{n+1}|\,|x|^{n+1} + |a_{n+2}|\,|x|^{n+2} + \cdots,\end{aligned}$$

also, wenn ε_n die obere Grenze von $|a_\nu|$ für $\nu > n$ ist,

$$\leqq \varepsilon_n(|x|^{n+1} + |x|^{n+2} + \cdots) = \frac{\varepsilon_n |x|^{n+1}}{1 - |x|}.$$

Wird $x = r y_1$ gesetzt, wo also $|x| = r$ und $0 < r < 1$ ist, so ist

$$|x - y_1| = 1 - r, \quad |x - y_2| < 2,$$

folglich

$$|g_n(x)| \leqq \frac{\varepsilon_n r^{n+1}}{1 - r} \frac{1}{r^{n+1}} (1 - r) 2 = 2 \varepsilon_n,$$

wo die rechte Seite von x frei ist und nach Voraussetzung gegen 0 strebt.

2) Wenn für jedes $m \geqq 0$

$$M + |a_0| + |a_1| R + \cdots + |a_m| R^m = A_m$$

gesetzt wird, ergibt sich auf der Strecke y_1 (exkl.) bis z_1 (exkl.), die mit $x = r y_1$, $1 < r < R$ bezeichnet werden kann, für $n > m$

$$|f(x) - (a_0 + \cdots + a_n x^n)|$$

$$\leqq M + |a_0| + |a_1| R + \cdots + |a_m| R^m + \varepsilon_m (r^{m+1} + \cdots + r^n)$$

$$\leqq A_m + \varepsilon_m (1 + r + \cdots + r^n) = A_m + \varepsilon_m \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \leqq A_m + \varepsilon_m \frac{r^{n+1}}{r - 1},$$

ferner

$$|x - y_1| = r - 1, \ |x - y_2| < 2R,$$

also

$$|g_n(x)| \leqq \left(A_m + \varepsilon_m \frac{r^{n+1}}{r - 1}\right) \frac{1}{r^{n+1}} (r - 1) 2R = A_m \frac{r - 1}{r^{n+1}} 2R + \varepsilon_m . 2R.$$

Nun ist

$$\frac{r-1}{r^{n+1}} < \frac{r-1}{r^{n+1}-1} = \frac{1}{r^n+\cdots+1} < \frac{1}{n},$$

also

$$|g_n(x)| \leqq \frac{2\,A_m\,R}{n} + 2\,R\,\varepsilon_m.$$

Zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein $m = m(\delta)$, so daß $2\,R\,\varepsilon_m < \frac{\delta}{2}$ ist. Alsdann ist (bei allen x der Strecke) für alle n, welche sowohl m als auch $\frac{4\,A_m\,R}{\delta}$ übertreffen,

$$|g_n(x)| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

3) Wenn A_m die obige Bedeutung hat, ist auf dem Bogen z_1 (inkl.) bis z_2 (inkl.) für $n > m$

$$\begin{aligned} &|f(x) - (a_0 + \cdots + a_n x^n)| \\ &\leqq M + |a_0| + |a_1|\,R + \cdots + |a_m|\,R^m + \varepsilon_m(R^{m+1} + \cdots + R^n) \\ &\leqq A_m + \varepsilon_m(1 + R + \cdots + R^n) \leqq A_m + \varepsilon_m \frac{R^{n+1}}{R-1}, \end{aligned}$$

ferner

$$|x - y_1| < 2\,R, \quad |x - y_2| < 2\,R,$$

also

$$|g_n(x)| \leqq \left(A_m + \varepsilon_m \frac{R^{n+1}}{R-1}\right) \frac{1}{R^{n+1}}\,4\,R^2 = A_m \frac{4}{R^{n-1}} + \varepsilon_m \frac{4\,R^2}{R-1}.$$

Zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein $m = m(\delta)$, so daß $\varepsilon_m \frac{4\,R^2}{R-1} < \frac{\delta}{2}$ ist, und alsdann ein $N = N(\delta) > m$, so daß für $n > N$

$$A_m \frac{4}{R^{n-1}} < \frac{\delta}{2}$$

ist, also (bei allen x des Bogens)

$$|g_n(x)| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

§ 19.

Hadamardscher Lückensatz.

Hilfssatz 1.

Voraussetzung: *Es habe*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

den Konvergenzradius 1, *und es sei*

$$\overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[\lambda]{\left| \sum_{n=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{n} a_n \right|} \geqq 2.$$

Behauptung: 1 *ist singulärer Punkt.*

Beweis: Die Funktion

$$g(y) = \frac{1}{1-y} f\left(\frac{y}{1-y}\right)$$

ist für $\Re(y) < \frac{1}{2}$ regulär, da dort $\left|\frac{y}{1-y}\right| < 1$ ist. Ihre (mindestens für $|y| < \frac{1}{2}$ konvergente) Entwicklung bei $y = 0$ lautet

$$g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{y^n}{(1-y)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(n+1)\ldots(n+\mu)}{\mu!} y^\mu$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty} y^\lambda \sum_{n=0}^{\lambda} \frac{\lambda!}{n!(\lambda-n)!} a_n = \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda y^\lambda.$$

Da nach Voraussetzung

$$\overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[\lambda]{|b_\lambda|} \geqq 2$$

ist, so ist $\frac{1}{2}$ der wahre Konvergenzradius dieser Potenzreihe. Da alle von $\frac{1}{2}$ verschiedenen Punkte des Kreises $|y| = \frac{1}{2}$ reguläre Stellen von $g(y)$ sind, ist also $g(y)$ singulär in $y = \frac{1}{2}$; wäre aber $f(x)$ in $x = 1$ regulär, so wäre $g(y)$ in $y = \frac{1}{2}$ auch regulär.

Hilfssatz 2.

Voraussetzung: *Es habe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

den Konvergenzradius 1, *und es sei für irgend ein* ϑ *der Strecke* $0 < \vartheta < 1$

$$\overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[\lambda]{\left| a_\lambda + \sum_{0<\nu\leqq\vartheta\lambda} \frac{\lambda!\,\lambda!}{(\lambda-\nu)!\,(\lambda+\nu)!}(a_{\lambda-\nu}+a_{\lambda+\nu}) \right|} \geqq 1.$$

Behauptung: 1 *ist singulärer Punkt.*

Beweis: Der Bruch $\frac{\lambda!\,\lambda!}{(\lambda-\nu)!\,(\lambda+\nu)!}$ fällt mit wachsendem ν der Strecke $0 \leqq \nu \leqq \lambda$, da der Quotient zweier konsekutiver Brüche (bei $\nu+1$ und ν) den Wert

$$\frac{(\lambda-\nu)!\,(\lambda+\nu)!}{(\lambda-\nu-1)!\,(\lambda+\nu+1)!} = \frac{\lambda-\nu}{\lambda+\nu+1} < 1$$

hat. Also ist

$$\underset{\vartheta\lambda<\nu\leqq\lambda}{\text{Max.}} \frac{\lambda!\,\lambda!}{(\lambda-\nu)!\,(\lambda+\nu)!} \leqq \frac{\lambda!\,\lambda!}{(\lambda-[\vartheta\lambda])!\,(\lambda+[\vartheta\lambda])!};$$

der Logarithmus der (bei festem ϑ nur von λ abhängigen) rechten Seite ist für wachsendes λ nach der Stirlingschen Formel

$$\begin{aligned} &2\lambda\log\lambda - 2\lambda + o(\lambda) - (1-\vartheta)\lambda\log\lambda - (1-\vartheta)\lambda\log(1-\vartheta) \\ &+ (1-\vartheta)\lambda - (1+\vartheta)\lambda\log\lambda - (1+\vartheta)\lambda\log(1+\vartheta) + (1+\vartheta)\lambda \\ = &-\lambda\{(1-\vartheta)\log(1-\vartheta) + (1+\vartheta)\log(1+\vartheta)\} + o(\lambda) = -q\lambda + o(\lambda), \end{aligned}$$

wo

$$q = (1-\vartheta)\log(1-\vartheta) + (1+\vartheta)\log(1+\vartheta) = \int_0^\vartheta \log\frac{1+z}{1-z}\,dz > 0.$$

Ferner ist wegen

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

für $n > n_0(q)$

$$\underset{0\leqq m\leqq n}{\text{Max.}} |a_m| < e^{\frac{q}{4}n},$$

also für $\lambda > \frac{n_0}{2}$

$$\underset{\vartheta\lambda<\nu\leqq\lambda}{\text{Max.}} |a_{\lambda-\nu} + a_{\lambda+\nu}| < 2e^{\frac{q}{4}2\lambda} = 2e^{\frac{q}{2}\lambda},$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\vartheta\lambda<\nu\leqq\lambda} \frac{\lambda!\,\lambda!}{(\lambda-\nu)!\,(\lambda+\nu)!}(a_{\lambda-\nu}+a_{\lambda+\nu}) \right| &\leqq \lambda e^{-q\lambda+o(\lambda)}\,2e^{\frac{q}{2}\lambda} \\ &= e^{-\frac{q}{2}\lambda+o(\lambda)}, \end{aligned}$$

$$\overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[\lambda]{\left| \sum_{\vartheta\lambda < \nu \leqq \lambda} \frac{\lambda!\ \lambda!}{(\lambda-\nu)!\ (\lambda+\nu)!} (a_{\lambda-\nu} + a_{\lambda+\nu}) \right|} \leqq e^{-\frac{q}{2}} < 1.$$

Aus

$$\overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[\lambda]{|P_\lambda|} \geqq 1, \qquad \overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[\lambda]{|p_\lambda|} = \Theta < 1$$

folgt aber

$$\overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[\lambda]{|P_\lambda + p_\lambda|} \geqq 1;$$

denn, wenn $0 < \delta < 1 - \Theta$ ist, ist unendlich oft zugleich

$$|P_\lambda| > \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^\lambda, \qquad |p_\lambda| < (1-\delta)^\lambda,$$

also

$$|P_\lambda + p_\lambda| > \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^\lambda - (1-\delta)^\lambda = \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^\lambda \left(1 - \left(\frac{1-\delta}{1-\frac{1}{2}\delta}\right)^\lambda\right),$$

$$\sqrt[\lambda]{|P_\lambda + p_\lambda|} > \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \sqrt[\lambda]{1 - \left(\frac{1-\delta}{1-\frac{1}{2}\delta}\right)^\lambda} \rightarrow 1 - \frac{\delta}{2}.$$

Demgemäß folgt in Verbindung mit der Voraussetzung, wenn

$$P_\lambda = a_\lambda + \sum_{0 < \nu \leqq \vartheta\lambda} \frac{\lambda!\ \lambda!}{(\lambda-\nu)!\ (\lambda+\nu)!} (a_{\lambda-\nu} + a_{\lambda+\nu}),$$

$$p_\lambda = \sum_{\vartheta\lambda < \nu \leqq \lambda} \frac{\lambda!\ \lambda!}{(\lambda-\nu)!\ (\lambda+\nu)!} (a_{\lambda-\nu} + a_{\lambda+\nu})$$

gesetzt wird,

$$\overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[\lambda]{\left| a_\lambda + \sum_{0 < \nu \leqq \lambda} \frac{\lambda!\ \lambda!}{(\lambda-\nu)!\ (\lambda+\nu)!} (a_{\lambda-\nu} + a_{\lambda+\nu}) \right|} \geqq 1,$$

$$\overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[2\lambda]{\left| a_\lambda + \sum_{0 < \nu \leqq \lambda} \frac{\lambda!\ \lambda!}{(\lambda-\nu)!\ (\lambda+\nu)!} (a_{\lambda-\nu} + a_{\lambda+\nu}) \right|} \geqq 1.$$

Der Ausdruck unter dem absoluten Betrage links ist aber

$$= \sum_{n=0}^{2\lambda} \frac{\lambda!\ \lambda!}{n!\ (2\lambda - n)!} a_n = \frac{\lambda!\ \lambda!}{(2\lambda)!} \sum_{n=0}^{2\lambda} \binom{2\lambda}{n} a_n.$$

Wegen

$$\log \frac{\lambda!\,\lambda!}{(2\lambda)!} = 2\lambda \log \lambda - 2\lambda + o(\lambda) - 2\lambda \log(2\lambda) + 2\lambda = -2\lambda \log 2 + o(\lambda)$$

ist

$$\sqrt[2\lambda]{\frac{\lambda!\,\lambda!}{(2\lambda)!}} \to \frac{1}{2},$$

also

$$\overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sqrt[2\lambda]{\sum_{n=0}^{2\lambda} \binom{2\lambda}{n} a_n} \geqq 2,$$

woraus nach Hilfssatz 1 (dessen Voraussetzung a fortiori erfüllt ist) die Singularität von $x = 1$ folgt.

Hadamardscher Lückensatz.

Voraussetzung: *Die Potenzreihe*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{m_k} x^{m_k} \qquad (0 \leqq m_1 < m_2 < \cdots)$$

habe den Konvergenzradius 1. *Es sei*

$$\underline{\lim_{k=\infty}} \frac{m_{k+1}}{m_k} > 1,$$

d. h. es gebe ein $\varepsilon > 0$, *so daß stets* $m_{k+1} > (1+\varepsilon)\, m_k$ *ist.*

Behauptung: 1 *ist singulär.*

Vorbemerkung: Hieraus folgt durch die Substitution $e^{-\varphi i} x = y$, daß der Einheitskreis natürliche Grenze ist.

Beweis: ϑ sei so gewählt, daß $\frac{1}{1+\varepsilon} < 1 - \vartheta < 1 + \vartheta < 1 + \varepsilon$ ist. Dann ist $m_{k+1} > (1+\vartheta)\, m_k$ (für $k \geqq 1$) und $m_{k-1} < (1-\vartheta)\, m_k$ (für $k \geqq 2$), also für $\lambda = m_k$ der Radikand der Voraussetzung von Hilfssatz 2

$$= |a_{m_k}|;$$

weil nun unsere Potenzreihe den Konvergenzradius 1 hat, ist

$$\overline{\lim_{k=\infty}} \sqrt[m_k]{|a_{m_k}|} = 1,$$

also $x = 1$ nach Hilfssatz 2 singulärer Punkt.

§ 20.

Satz von Pólya.

Es habe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

den Konvergenzradius 1. *Dann gibt es eine Folge*

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots,$$

wo jedes $\varepsilon_n = \pm 1$ *ist, derart, daß die Reihe*

$$\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 x + \cdots + \varepsilon_n a_n x^n + \cdots$$

nicht über den Einheitskreis fortsetzbar ist.

Beweis: Nach dem Hadamardschen Lückensatz ist jede Reihe

$$Q(x) = b_{m_1} x^{m_1} + \cdots + b_{m_k} x^{m_k} + \cdots$$

mit dem Konvergenzradius 1, bei der stets $m_{k+1} > 2 m_k$ ist, nicht fortsetzbar.

Aus $f(x)$ kann ich wegen

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

solche Glieder $a_{n_k} x^{n_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ herausgreifen, daß

$$\lim_{k=\infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = 1, \quad n_{k+1} > 2 n_k$$

ist. Es werde

$$R(x) = a_{n_1} x^{n_1} + \cdots + a_{n_k} x^{n_k} + \cdots$$

und

$$f(x) - R(x) = f_0(x)$$

gesetzt. (Sollte $f_0(x)$ identisch 0 sein, so ist die Behauptung trivial; die ε_n dürften dann sogar beliebig ± 1 sein.)

$R(x)$ werde irgendwie in unendlich viele Potenzreihen mit je unendlich vielen Gliedern gespalten:

$$R(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_\nu(x) + \cdots$$

(Jedes Glied $a_{n_k} x^{n_k}$ gehört also genau einem $f_\nu(x)$ mit $\nu \geqq 1$ an, jedes Glied $a_n x^n$ genau einem $f_\nu(x)$ mit $\nu \geqq 0$.)

Jetzt betrachte ich sämtliche Potenzreihen

$$P(x) = f_0(x) + \delta_1 f_1(x) + \cdots + \delta_\nu f_\nu(x) + \cdots, \qquad \delta_\nu = \pm 1,$$

jede nach wachsenden Potenzen geordnet gedacht. Jedes $P(x)$ ist eine Potenzreihe der Gestalt

$$\varepsilon_0 a_0 + \cdots + \varepsilon_n a_n x^n + \cdots, \qquad \varepsilon_n = \pm 1.$$

Ich behaupte, daß mindestens eines jener $P(x)$ nicht fortsetzbar ist. Anderenfalls — da die $P(x)$ die Mächtigkeit des Kontinuums haben und jede irgendwo über den Einheitskreis fortsetzbare Funktion in einer Einheitswurzel regulär ist, es aber nur abzählbar viele Einheitswurzeln gibt — gäbe es zwei $P(x)$, die in einem und demselben Randpunkte ξ regulär wären. Ihre Differenz wäre also auch in ξ regulär. Sie hat aber die Gestalt

$$\eta_1 f_1(x) + \cdots + \eta_\nu f_\nu(x) + \cdots,$$

wo alle $\eta_\nu = 0, +2, -2$, aber nicht alle $= 0$ sind. Dies ist aber eine Potenzreihe vom oben genannten Typus $Q(x)$, da der Quotient zweier vorhandener Exponenten > 2 ist und die Reihe (wegen $\lim\limits_{k=\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = 1$) den Konvergenzradius 1 hat. Diese Funktion wäre also doch in ξ singulär.

Sechstes Kapitel.

Maximum und Mittelwert des absoluten Betrages einer analytischen Funktion auf Kreisen.

§ 21.

Hadamardscher Dreikreisesatz.

Voraussetzung: *Es sei $0 < r_1 < r_2 < r_3$. Es sei $f(x)$ für $r_1 \leqq |x| \leqq r_3$ eindeutig und regulär. Es bezeichnen M_1, M_2, M_3 die Maxima von $|f(x)|$ auf den Kreisen $|x| = r_1, r_2, r_3$.*

Behauptung: $M_2^{\log\frac{r_3}{r_1}} \leqq M_1^{\log\frac{r_3}{r_2}} M_3^{\log\frac{r_2}{r_1}}$.

Vorbemerkungen: Die Behauptung läßt sich auch so schreiben:

$$\begin{vmatrix} \log M_1 & \log r_1 & 1 \\ \log M_2 & \log r_2 & 1 \\ \log M_3 & \log r_3 & 1 \end{vmatrix} \leqq 0$$

und besagt, daß bei jeder in einem Ring $\varrho < r < \mathrm{P}$ eindeutig-regulären, nicht identisch verschwindenden Funktion $\log M(r) = \log \operatorname{Max.}_{|x|=r} |f(x)|$ für $\varrho < r < \mathrm{P}$ eine konvexe[1]) Funktion von $\log r$

1) Hierbei heißt eine im Intervall $\tau < t < \tau_1$ definierte reelle Funktion $g(t)$ konvex, wenn für zwei beliebige Punkte $t_1 < t_3$ des Intervalls allen dazwischenliegenden t ein $g(t)$ entspricht, welches nicht oberhalb der Sehne von $(t_1, g(t_1))$ zu $(t_3, g(t_3))$ liegt. D. h. für $\tau < t_1 < t_2 < t_3 < \tau_1$ soll sein:

ist. Für ganzes $f(x)$ ist dies also bei allen $r > 0$ gültig; für Potenzreihen, die im Kreis $|x| < \mathsf{P}$ konvergieren, bei allen positiven $r < \mathsf{P}$.

Beweis: $f(x)$ darf als nicht identisch 0 angenommen werden, so daß M_1, M_2, $M_3 > 0$ sind.

Es sei α irgend eine reelle Zahl. $x^\alpha f(x)$ ist für $r_1 \leqq |x| \leqq r_3$ regulär, aber nicht notwendig eindeutig; $|x^\alpha f(x)|$ ist dort eindeutig und stetig. Auf $|x| = r_1$ ist

$$|x^\alpha f(x)| \leqq r_1^\alpha M_1,$$

auf $|x| = r_3$

$$|x^\alpha f(x)| \leqq r_3^\alpha M_3.$$

Auf dem Rande des Ringes $r_1 \leqq |x| \leqq r_3$ ist daher

$$|x^\alpha f(x)| \leqq \text{Max.}\ (r_1^\alpha M_1,\ r_3^\alpha M_3).$$

Dies muß auch im Innern des Ringes gelten (weil jeder Zweig von $x^\alpha f(x)$ an jeder Stelle des Ringes regulär ist). Also, wenn es auf $|x| = r_2$ angewendet wird,

$$r_2^\alpha M_2 \leqq \text{Max.}\ (r_1^\alpha M_1,\ r_3^\alpha M_3),$$

$$M_2 \leqq \text{Max.}\left(\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^\alpha M_1,\ \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^\alpha M_3\right).$$

Hierin setze ich speziell

$$\alpha = \log\frac{M_3}{M_1} : \log\frac{r_1}{r_3};$$

dann ergibt sich, da beide Zahlen hinter Max. gleich werden,

$$M_2 \leqq M_1\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\log\frac{M_3}{M_1} : \log\frac{r_1}{r_3}} = M_1\left(\frac{M_3}{M_1}\right)^{\log\frac{r_2}{r_1} : \log\frac{r_3}{r_1}}$$

$$= M_1^{\log\frac{r_3}{r_2} : \log\frac{r_3}{r_1}}\, M_3^{\log\frac{r_2}{r_1} : \log\frac{r_3}{r_1}}.$$

$$g(t_2) \leqq g(t_1) + \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}\,(g(t_3) - g(t_1)),$$

$$(t_2 - t_3)\, g(t_1) + (t_3 - t_1)\, g(t_2) + (t_1 - t_2)\, g(t_3) \leqq 0,$$

$$\begin{vmatrix} g(t_1) & t_1 & 1 \\ g(t_2) & t_2 & 1 \\ g(t_3) & t_3 & 1 \end{vmatrix} \leqq 0.$$

Hinreichend für Konvexität ist bekanntlich $g''(t) \geqq 0$; doch wird dies Kriterium im obigen Text nicht brauchbar sein.

Zusatz: $x = y - x_0$ transformiert den Satz in den entsprechenden Wortlaut für drei Kreise mit dem Mittelpunkt x_0.

§ 22.

Satz von Jentzsch.

Ein älterer Hurwitzscher Satz.

Voraussetzung: *Eine nicht konstante Potenzreihe*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

konvergiere überall oder habe einen endlichen positiven Konvergenzradius.

Behauptung: *Die Menge der Nullstellen von $f(x)$ im Innern des Konvergenzgebietes ist identisch mit den diesem Innern angehörigen Punkten der Menge $\mathfrak{Q}$ der Häufungspunkte der Nullstellen*[1]) *der Abschnitte*

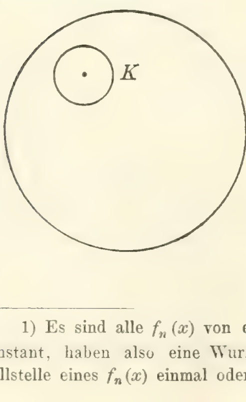
$$f_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu,$$

wenn hierbei jede Nullstelle so oft gezählt wird, als sie auftritt (also eventuell unendlich oft).

Vorbemerkung: $\mathfrak{Q}$ ist so erklärt, daß ein Punkt dann und nur dann dazu gehört, wenn es zu jeder Umgebung unendlich viele n gibt, so daß $f_n(x)$ dort eine Nullstelle hat.

Erster Beweis: 1) Es sei

$$f(\xi) = 0$$



und überdies im Falle eines endlichen Radius r der Punkt ξ dem Kreise $|x| < r$ angehörig. Es sei $\delta > 0$ gegeben und gleich so klein angenommen, daß der Kreis $|x - \xi| \leqq \delta$ (Kreis K) erstens im Innern des Konvergenzgebietes liegt und zweitens einschließlich seines Randes keine weitere Nullstelle von $f(x)$ als den Mittelpunkt ξ enthält. Dann ist auf dem Rande von K

1) Es sind alle $f_n(x)$ von einem $n_0 > 0$ an (wo zuerst $a_{n_0} \neq 0$ ist) nicht konstant, haben also eine Wurzel. Es ist für $\mathfrak{Q}$ unerheblich, ob eine k-fache Nullstelle eines $f_n(x)$ einmal oder k-mal gezählt wird.

$$|f(x)| > \varepsilon$$

bei passender Wahl eines $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Potenzreihe auf der Kreisfläche K ist bei passender Wahl eines $\nu = \nu(\delta)$ für $n > \nu$ und die Fläche K

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

also auf dem Rande von K

$$|f_n(x)| > \frac{\varepsilon}{2},$$

im Mittelpunkt ξ von K

$$|f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$f_n(x)$ hat also in K eine Wurzel. Da dies für jedes hinreichend kleine $\delta > 0$ gilt, ist ξ ein Punkt von $\mathfrak{Q}$.

2) Es sei ξ im Innern des Konvergenzgebietes gelegen und

$$f(\xi) \neq 0.$$

Dann ist ein Kreis K um ξ mit dem Radius δ so wählbar, daß er im Innern des Konvergenzgebietes liegt und überhaupt keine Nullstelle von $f(x)$ enthält. Auf der Kreisfläche K ist also

$$|f(x)| > \varepsilon > 0.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz auf K ist dort bei passender Wahl von ν für $n > \nu$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

also

$$f_n(x) \neq 0.$$

ξ ist also kein Punkt von $\mathfrak{Q}$.

Zweiter Beweis: Es sei ξ ein Punkt im Innern des Konvergenzgebietes und δ_0 so gewählt, daß der Kreis $|x - \xi| \leqq \delta_0$ dem Innern des Konvergenzgebietes angehört und abgesehen von der etwaigen Nullstelle ξ keine Wurzel von $f(x)$ enthält. Für jedes δ der Strecke $0 < \delta \leqq \delta_0$ ist alsdann bei Integration über die Kreisperipherie K um ξ mit dem Radius δ der Ausdruck

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

gleich der Vielfachheit V der Nullstelle ξ (also eine ganze Zahl $\geqq 0$). Da nun $f_n(x)$ längs K gleichmäßig gegen $f(x)$ strebt (und infolgedessen für hinreichend großes $n > n_0 = n_0(\delta)$ längs K absolut oberhalb einer von x freien positiven Schranke liegt), und da $f_n'(x)$ längs K gleichmäßig gegen $f'(x)$ konvergiert, so konvergiert $\frac{f_n'(x)}{f_n(x)}$ längs K gleichmäßig gegen $\frac{f'(x)}{f(x)}$. Die Wurzelzahl

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f_n'(x)}{f_n(x)}\,dx$$

von $f_n(x)$ innerhalb K strebt also für $n \to \infty$ gegen V, ist also $= V$ für alle $n > n_1 = n_1(\delta)$. Wenn also $V = 0$ ist, so gibt es um ξ einen Kreis, in dem für $n > n_1$ kein $f_n(x)$ verschwindet; wenn $V > 0$ ist, so haben in jedem hinreichend kleinen Kreise um ξ unendlich viele $f_n(x)$ (sogar alle von einer Stelle an) V Wurzeln (mehrfache immer mehrfach gezählt), so daß ξ zu $\mathfrak{Q}$ gehört.

Satz von Jentzsch.

Voraussetzung: *Es habe*

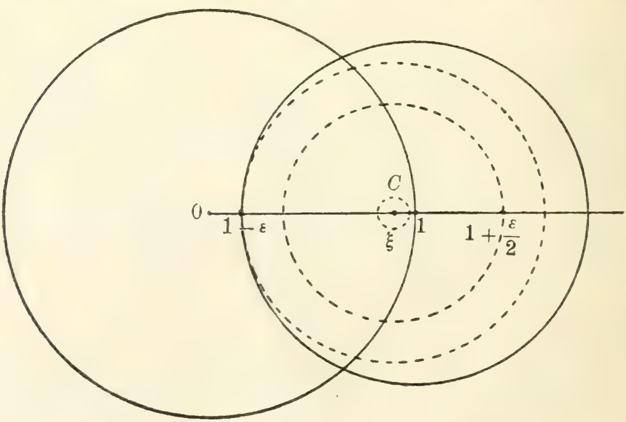
$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

den Konvergenzradius 1.

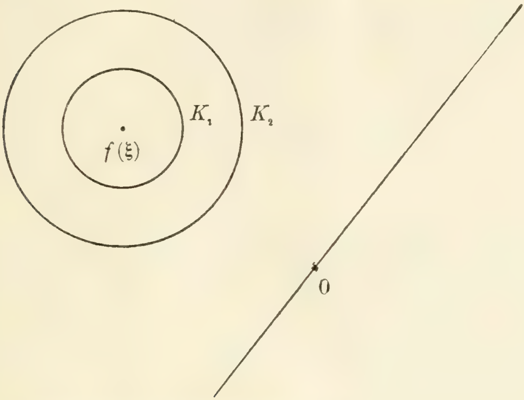
Behauptung: $x = 1$ *ist Punkt von* $\mathfrak{Q}$.

Vorbemerkung: Daraus folgt natürlich ($x = z x_0$), daß bei jeder Potenzreihe mit endlichem Konvergenzradius jeder Punkt des Randes zu $\mathfrak{Q}$ gehört.

Beweis: Anderenfalls gäbe es ein ε der Strecke $0 < \varepsilon < 1$ und ein n_0, so daß für $n > n_0$ im Kreise $|x-1| \leq \varepsilon$ die Funktion $f_n(x)$



nicht verschwindet. Ich setze $\xi = 1 - \frac{\varepsilon}{8}$. Nach dem Hurwitzschen Satz ist eo ipso $f(\xi) \neq 0$.



In der y-Ebene ziehe ich um $y = f(\xi)$ die zwei Kreise K_1, K_2 mit den Radien $\frac{|f(\xi)|}{4}$, $\frac{|f(\xi)|}{2}$. Beide Kreise gehören einer Halbebene in Bezug auf die senkrecht zu $0 \ldots f(\xi)$ durch 0 gezogene Gerade an. Diese Halbebene kann mit

$$\alpha < \operatorname{arc} y < \alpha + \pi$$

bezeichnet werden. Um ξ ziehe ich einen Kreis C mit so kleinem Radius ϱ, daß erstens $\varrho < \frac{\varepsilon}{8}$ ist (also C dem Innern des Einheitskreises und des Kreises $|x-1| \leqq \varepsilon$ angehört), und daß zweitens $f(x)$ im Kreise K_1 liegt, wenn x in C liegt. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $f_n(x)$ in C gibt es ein $n_1 > n_0$, so daß $f_n(x)$ für C und alle $n > n_1$ in K_2 liegt. In C kann also gesetzt werden

$$f(x) = e^{g(x)},$$

$$f_n(x) = e^{g_n(x)} \qquad (n > n_1),$$

wo $g(x)$, $g_n(x)$ regulär sind und

$$\alpha < \Im g(x) < \alpha + \pi, \quad \alpha < \Im g_n(x) < \alpha + \pi$$

ist. $g_n(x)$ ist sogar für $|x-1| \leqq \varepsilon$ regulär. In C ist gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x),$$

also (wegen der obigen Ungleichungen für die imaginären Teile)

$$\lim_{n=\infty} g_n(x) = g(x),$$

folglich (wegen der Beschränktheit von $g(x)$ in C) gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} g_n(x) = 0.$$

Ich setze nun für $|x-1| \leqq \varepsilon$, $n > n_1$

$$e^{\frac{1}{n} g_n(x)} - 1 = h_n(x).$$

(Das ist ein dort regulärer Zweig von $\sqrt[n]{f_n(x)} - 1$.) Und ich wende den Hadamardschen Dreikreisesatz auf die Funktion $h_n(x)$ und die (in der Figur punktierten) Kreise mit dem Mittelpunkt ξ und den Radien ϱ, $\frac{5}{8}\varepsilon$, $\frac{7}{8}\varepsilon$ an. Auf dem zweiten Kreis liegt der Punkt $1+\frac{\varepsilon}{2}$; der dritte gehört auch noch ganz der Kreisfläche $|x-1| \leqq \varepsilon$ an. Wenn $M_1^{(n)}$ und $M_3^{(n)}$ die Maxima von $h_n(x)$ für $|x-\xi| = \varrho$ und $|x-\xi| = \frac{7}{8}\varepsilon$ bezeichnen, ist nach der Hadamardschen Ungleichung

$$\left| h_n\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right| \leqq (M_1^{(n)})^{1-\vartheta} (M_3^{(n)})^{\vartheta},$$

wo $0 < \vartheta < 1$ und ϑ von n frei ist (nämlich nur von ϱ und ε abhängt). Nun ist wegen

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|a_m|} = 1$$

für alle $m > 0$

$$|a_m| < A^m,$$

wo $A > 1$ von m frei ist, also für $n > 0$, $|x-1| \leqq \varepsilon$

$$|f_n(x)| \leqq |a_0| + |a_1|(1+\varepsilon) + \cdots + |a_n|(1+\varepsilon)^n \leqq |a_0| + nA^n(1+\varepsilon)^n < A_1^n,$$

wo A_1 nicht von x und n abhängt. Für $n > n_1$ ist also auf der Kreisfläche $|x-1| \leqq \varepsilon$

$$|h_n(x)| \leqq \sqrt[n]{|f_n(x)|} + 1 < A_1 + 1,$$

folglich

$$(M_3^{(n)})^{\vartheta} < (A_1+1)^{\vartheta} < A_1 + 1.$$

Andererseits ist für $|x-\xi| = \varrho$ nach dem obigen gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} h_n(x) = 0,$$

also

$$\lim_{n=\infty} M_1^{(n)} = 0,$$

$$\lim_{n=\infty} (M_1^{(n)})^{1-\vartheta} = 0.$$

Die Hadamardsche Ungleichung liefert also

$$\lim_{n=\infty} h_n\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) = 0,$$

$$\lim_{n=\infty} e^{\frac{1}{n} g_n\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)} = 1,$$

$$\lim_{n=\infty} \left| e^{\frac{1}{n} g_n\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)} \right| = \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\left| f_n\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right|} = 1.$$

Für $n \geqq n_2$ ist also

$$\left| f_n\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right| < \left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)^n,$$

folglich für $n > n_2$

$$\left| f_{n-1}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right| < \left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)^{n-1} < \left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)^n,$$

$$\left| a_n \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^n \right| = \left| f_n\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) - f_{n-1}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right| < 2\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)^n,$$

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \leqq \frac{1+\frac{\varepsilon}{4}}{1+\frac{\varepsilon}{2}} < 1,$$

entgegen der Annahme, daß $f(x)$ den Konvergenzradius 1 hat.

§ 23.

Hardyscher Mittelwertsatz.

Es sei eine nicht konstante Funktion

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

für $|x| < R$ regulär. Dann wächst

$$M(r) = \underset{|x| = r}{\text{Max.}} |f(x)| \qquad (0 < r < R)$$

bekanntlich mit r, und $\log M(r)$ ist (nach dem Hadamardschen Dreikreisesatz) eine konvexe Funktion von $\log r$.

Beide Eigenschaften kommen auch dem Mittelwert

$$H(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(r e^{\varphi i}\right) \right|^2 d\varphi$$

von $|f(x)|^2$ auf dem Kreise $|x| = r$ zu, wie aus der Identität

$$H(r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

hervorgeht. Die rechte Seite wächst ja offenbar mit r, und sie ist die M-Funktion, bezogen auf

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 x^{2n},$$

so daß $\log H(r)$ eine konvexe Funktion von $\log r$ ist.

Übrigens ist für jede in einem positiven Intervall $\varrho < r < \mathrm{P}$ konvergente Reihe

$$\Phi(r) = \sum_n p_n r^n,$$

wo $p_n \geqq 0$ (aber nicht stets $= 0$) ist und n irgend eine Folge reeller (nicht notwendig ganzer) Zahlen durchläuft (natürlich in beliebiger Reihenfolge), die Konvexität von $\log \Phi(r)$ als Funktion von $\log r$ folgendermaßen direkt in Evidenz zu setzen[1]. Bekanntlich ist für $0 < \vartheta < 1$, $A_n \geqq 0$, $B_n \geqq 0$

$$\sum_n A_n^{\vartheta} B_n^{1-\vartheta} \leqq \left(\sum_n A_n\right)^{\vartheta} \left(\sum_n B_n\right)^{1-\vartheta},$$

falls beide Reihen rechts konvergieren. Wird hierin für $\varrho < r_1 < r_2 < r_3 < \mathrm{P}$

$$A_n = p_n r_1^n, \quad B_n = p_n r_3^n$$

gesetzt, so gibt dies

$$\Phi(r_1^{\vartheta} r_3^{1-\vartheta}) = \sum_n p_n (r_1^n)^{\vartheta} (r_3^n)^{1-\vartheta} \leqq \left(\sum_n p_n r_1^n\right)^{\vartheta} \left(\sum_n p_n r_3^n\right)^{1-\vartheta}$$
$$= (\Phi(r_1))^{\vartheta} (\Phi(r_3))^{1-\vartheta},$$

woraus für

$$\vartheta = \log \frac{r_3}{r_2} : \log \frac{r_3}{r_1}$$

1) Vergl. Jensen, S. 183.

wegen

$$1-\vartheta = \log\frac{r_2}{r_1} : \log\frac{r_3}{r_1},$$

$$r_1^{\vartheta} r_3^{1-\vartheta} = e^{\left(\log r_1 \log\frac{r_3}{r_2} + \log r_3 \log\frac{r_2}{r_1}\right) : \log\frac{r_3}{r_1}} = r_2$$

die Behauptung

$$(\Phi(r_2))^{\log\frac{r_3}{r_1}} \leqq (\Phi(r_1))^{\log\frac{r_3}{r_2}} (\Phi(r_3))^{\log\frac{r_2}{r_1}}$$

folgt [1]).

Hardy hat nun bewiesen, daß beide Eigenschaften von $M(r)$ und $H(r)$ auch dem Mittelwert $\mu(r)$ des absoluten Betrages von $f(x)$ selbst zukommen, oder, was dasselbe besagt, seinem 2πfachen

$$I(r) = \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{\varphi i}\right) \right| d\varphi.$$

Also lautet die

Behauptung: *$I(r)$ wächst mit r, und $\log I(r)$ ist eine konvexe Funktion von $\log r$, beides für $0 < r < R$.*

Vorbemerkung: Bei einer ganzen Funktion $f(x)$ gilt dies also für alle $r > 0$.

Beweis: Daß $I(r)$ eine stetige Funktion von r ist, ist wegen der Stetigkeit von $f\left(re^{\varphi i}\right)$ in r und φ trivial.

Ich zeige zunächst, daß $I(r)$ nach r differentiierbar und $I'(r)$ stetig ist. Ich setze $x = re^{\varphi i} = u + vi$, $f(x) = U + Vi$. Dann ist offenbar in jedem Punkte $x \neq 0$ des Kreises $|x| < R$, in welchem $f(x)$ nicht verschwindet, die partielle Ableitung

$$g(r,\varphi) = \frac{\partial\left|f\left(re^{\varphi i}\right)\right|}{\partial r} = \frac{\partial\sqrt{U^2+V^2}}{\partial r}$$

$$= \frac{\partial\sqrt{U^2+V^2}}{\partial u}\cos\varphi + \frac{\partial\sqrt{U^2+V^2}}{\partial v}\sin\varphi$$

vorhanden und eine stetige Funktion von r und φ. Ferner ist in jedem solchen Punkte

$$|g(r,\varphi)| \leqq |f'(x)|;$$

1) Wegen der offenbaren Stetigkeit von $\Phi(r)$ genügt es nach Jensen (S. 180) zum Nachweise der Konvexität

$$\Phi\left(\sqrt{r_1 r_3}\right) \leqq \sqrt{\Phi(r_1)\,\Phi(r_3)}$$

zu beweisen, und hierfür langt die Cauchysche Ungleichung, d. h. der Spezialfall $\vartheta = \frac{1}{2}$ der obigen.

denn für absolut hinreichend kleine positive und negative h ist

$$\left|\frac{\left|f\left((r+h)e^{\varphi i}\right)\right|-\left|f\left(re^{\varphi i}\right)\right|}{h}\right| \leqq \left|\frac{f\left((r+h)e^{\varphi i}\right)-f\left(re^{\varphi i}\right)}{h}\right|,$$

wo die rechte Seite mit $h \to 0$ gegen $\left|e^{\varphi i} f'\left(re^{\varphi i}\right)\right| = |f'(x)|$ strebt.

Das Integral

$$\lambda(r) = \int_0^{2\pi} g(r, \varphi)\, d\varphi$$

hat also für jedes r der Strecke $0 < r < R$ einen Sinn[1]) und hängt dort stetig von r ab. Ferner ist für jedes r der Strecke $0 < r < R$, dem keine Wurzel entspricht, weil in einem Ring um den betreffenden Kreis $g(r, \varphi)$ stetig von r und φ abhängt,

$$\lambda(r) = \int_0^{2\pi} g(r, \varphi)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \left|f\left(re^{\varphi i}\right)\right|}{\partial r}\, d\varphi$$

$$= \frac{d \int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{\varphi i}\right)\right| d\varphi}{dr} = \frac{dI(r)}{dr};$$

aus der Richtigkeit von

$$I'(r) = \lambda(r)$$

für alle r der Strecke $0 < r < R$ mit etwaiger Ausnahme von endlich vielen oder von einer Folge $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots$ mit $r_n \to R$ folgt aber die Richtigkeit für alle r der Strecke $0 < r < R$ und somit die Existenz und Stetigkeit von $I'(r)$; denn nach dem Mittelwertsatz ist bei $h \to 0$ (von links und rechts) mit Rücksicht auf die Stetigkeit von $\lambda(r)$

$$\frac{I(r_\nu + h) - I(r_\nu)}{h} = I'(r_\nu + \vartheta h) = \lambda(r_\nu + \vartheta h) \to \lambda(r_\nu).$$

Ferner ist offenbar bei $r \to 0$

$$r I'(r) \to 0;$$

denn wenn c so gewählt wird, daß $|f'(x)| \leqq c$ für $|x| \leqq \frac{R}{2}$ ist, ist für $0 < r \leqq \frac{R}{2}$

$$|r I'(r)| = r|\lambda(r)| \leqq 2\pi r c.$$

Der Nachweis des beständigen Wachsens von $I(r)$ wird offen-

1) Es ist ein uneigentliches Integral für solche r, denen eine Wurzel entspricht.

bar geliefert sein, wenn im Innern jedes wurzelfreien Ringes $\varrho < r < \mathrm{P}$ (wo $0 \leqq \varrho < \mathrm{P} \leqq R$ ist)

$$\frac{d}{dr}(r\,I'(r)) > 0$$

gezeigt werden kann. Denn daraus folgt dann, daß $r\,I'(r)$ in jedem wurzelfreien Ring wächst, also (wegen der Stetigkeit) für $0 < r < R$ überall wächst, also (wegen $\lim\limits_{r=0} r\,I'(r) = 0$) ebenda positiv ist; folglich, daß $I'(r) > 0$ für $0 < r < R$ ist.

Und die Konvexität von $\log I(r)$ als Funktion von $\log r$ wird bewiesen sein, wenn sie für das Innere jedes wurzelfreien Ringes gezeigt werden kann; denn, wenn eine differentiierbare Funktion in zwei angrenzenden Intervallen konvex ist, ist sie es auch in dem aus diesen zusammengesetzten.

Es sei demgemäß $0 \leqq \varrho < \mathrm{P} \leqq R$ und $f(x) \neq 0$ für $\varrho < |x| < \mathrm{P}$. Wenn $f(x)$ im Kreise $|x| \leqq \varrho$ eine gerade bezw. ungerade Anzahl von Wurzeln hat, ist jeder Zweig von $\sqrt{f(x)}$ bezw. von $\sqrt{\dfrac{f(x)}{x}}$ im Ring $\varrho < |x| < \mathrm{P}$ eindeutig-regulär; jedenfalls ist daher im Ring nach dem Laurentschen Satz

$$\sqrt{f(x)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (\sqrt{x})^n,$$

wo entweder alle b mit geradem oder alle b mit ungeradem Index Null sind. Daraus folgt, wenn $\bar{b}$ die zu b konjugierte Zahl bezeichnet,

$$I(r) = \int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{\varphi i}\right)\right| d\varphi = \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n r^{\frac{n}{2}} e^{\frac{n}{2}\varphi i} \right|^2 d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n r^{\frac{n}{2}} e^{\frac{n}{2}\varphi i} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{b}_m r^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{m}{2}\varphi i} d\varphi$$

$$= \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} b_n \bar{b}_m r^{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}} \int_0^{2\pi} e^{\frac{n-m}{2}\varphi i} d\varphi$$

(wo die Vertauschung von $\int$ mit $\sum\sum$ und beliebige Gliederanordnung wegen der Konvergenz von $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |b_n|\, r^{\frac{n}{2}}$ erlaubt ist)

$$= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n|^2 r^n$$

(weil $b_n \bar{b}_m = 0$ oder $\frac{n-m}{2}$ ganz und alsdann das Integral 0 für $n \gtrless m$, sonst 2π ist),

$$I'(r) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n|^2 n r^{n-1},$$

$$r I'(r) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n|^2 n r^n,$$

$$\frac{d}{dr}(r I'(r)) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n|^2 n^2 r^{n-1} \geqq 0;$$

hier ist das Gleichheitszeichen noch ausgeschlossen, da sonst $\sqrt{f(x)} = b_0$, also $f(x)$ konstant wäre.

Ferner folgt aus der gefundenen Reihe für $I(r)$ wegen $2\pi |b_n|^2 \geqq 0$ nach dem zu Beginn dieses Paragraphen Vermerkten die Konvexität von $\log I(r)$ als Funktion von $\log r$ für $\varrho < r < \mathrm{P}$; man kann natürlich statt dessen einfach konstatieren[1]), daß

$$\frac{d^2 \log I(r)}{(d \log r)^2} = r \frac{d}{dr}\left(r \frac{I'(r)}{I(r)}\right) = r \frac{I(r)(I'(r) + r I''(r)) - r I'(r) I'(r)}{(I(r))^2} \geqq 0,$$

d. h. daß

$$I(r) I'(r) + r I(r) I''(r) - r (I'(r))^2 \geqq 0$$

ist, was so herausgerechnet wird: Wegen

$$I(r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n r^n \qquad (p_n \geqq 0)$$

ist

$$\begin{aligned} & I(r) I'(r) + r I(r) I''(r) - r (I'(r))^2 \\ = & \sum_n p_n r^n \sum_m m p_m r^{m-1} + r \sum_n p_n r^n \sum_m m(m-1) p_m r^{m-2} \\ & \qquad - r \sum_n n p_n r^{n-1} \sum_m m p_m r^{m-1} \\ = & \sum_{n,m} p_n p_m (m + m(m-1) - nm) r^{n+m-1} = \sum_{n,m} p_n p_m (m^2 - nm) r^{n+m-1} \\ = & \sum_{n<m} p_n p_m r^{n+m-1} (m^2 - nm + n^2 - nm) = \sum_{n<m} p_n p_m r^{n+m-1} (m-n)^2 \geqq 0. \end{aligned}$$

1) Im Anschluß an Hartogs, S. 78.

Siebentes Kapitel.

Der Picardsche Ideenkreis.

§ 24.

Der Schottkysche Satz.

Hilfssatz von Carathéodory[1]).

Voraussetzung: *Es sei* $g(x)$ *für* $|x| \leqq R$ *regulär. Für* $0 < \varrho \leqq R$ *mögen* $A(\varrho)$, $B(\varrho)$ *und* $M(\varrho)$ *die Maxima von* $\Re g(x)$, $-\Re g(x)$ *und* $|g(x)|$ *auf dem Kreise* $|x| = \varrho$, *d. h. für* $|x| \leqq \varrho$ *bezeichnen.*

Behauptung: *Für* $0 < r < R$ *ist*

$$M(r) \leqq \frac{2R}{R-r}(A(R) + 2|g(0)|),$$

$$M(r) \leqq \frac{2R}{R-r}(B(R) + 2|g(0)|).$$

Beweis: Offenbar braucht nur ersteres bewiesen zu werden, da die zweite Relation dann durch Anwendung auf $-g(x)$ folgt.

Wenn $g(x)$ konstant ist, ist die Behauptung wegen

$$|g(0)| \leqq \Re g(0) + 2|g(0)|$$

trivial. Es sei also $g(x)$ nicht konstant, und es werde kurz $A(R) = A$, $g(0) = \beta + \gamma i$ gesetzt, so daß $\beta < A$ ist.

Die Funktion

$$h(x) = \frac{g(x) - \beta - \gamma i}{g(x) + \beta - \gamma i - 2A} = \frac{(g(x) - A) - (\beta + \gamma i - A)}{(g(x) - A) + (\beta - \gamma i - A)}$$

ist für $|x| \leqq R$ regulär, da der reelle Teil des Nenners $\leqq A + \beta - 2A = \beta - A < 0$ ist; $h(x)$ verschwindet für $x = 0$, und für $|x| \leqq R$ ist

$$|h(x)| \leqq 1$$

1) Nach einer brieflichen Mitteilung aus dem Jahre 1905 zuerst in meinen Arbeiten mehrfach verwandt.

(da für $u \leqq 0$, $u_0 < 0$, $v \gtreqless 0$, $v_0 \gtreqless 0$

$$\left|\frac{u+vi-(u_0+v_0 i)}{u+vi+(u_0-v_0 i)}\right|^2 = \frac{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}{(u+u_0)^2+(v-v_0)^2} \leqq 1$$

ist). Daher ist $\frac{h(x)}{x}$ für $|x| \leqq R$ regulär. Für $|x| = R$ ist

$$\left|\frac{h(x)}{x}\right| \leqq \frac{1}{R};$$

also ist auch für $|x| \leqq r$

$$\left|\frac{h(x)}{x}\right| \leqq \frac{1}{R},$$

somit dort

$$|h(x)| \leqq \frac{r}{R};$$

mit Rücksicht auf $A-\beta > 0$ ist also für $|x| \leqq r$

$$\begin{aligned}|g(x)| &= \left|\frac{\beta+\gamma i+(\beta-\gamma i-2A)h(x)}{1-h(x)}\right| = \left|\beta+\gamma i-\frac{2(A-\beta)h(x)}{1-h(x)}\right| \\ &\leqq |g(0)|+\frac{2(A-\beta)1}{1-\frac{r}{R}} = |g(0)|-\frac{2\beta R}{R-r}+\frac{2AR}{R-r} \\ &\leqq |g(0)|+|g(0)|\frac{2R}{R-r}+\frac{2AR}{R-r} \\ &\leqq |g(0)|\frac{2R}{R-r}+|g(0)|\frac{2R}{R-r}+\frac{2AR}{R-r} = \frac{2R}{R-r}(A+2|g(0)|).\end{aligned}$$

Zusatz: In allen folgenden Anwendungen wird $R \leqq 1$ sein, so daß die Ungleichungen

$$M(r) \leqq \frac{2}{R-r}(A(R)+2|g(0)|), \quad M(r) \leqq \frac{2}{R-r}(B(R)+2|g(0)|)$$

gelten.

Schottkyscher Satz.

Es gibt ein für $0 < \vartheta < 1$ und komplexes a definiertes $\Omega = \Omega(\vartheta, a)$ mit folgender Eigenschaft:

Jede im Kreise $|x| \leqq 1$ reguläre und dort überall von 0 und von 1 verschiedene Funktion $f(x)$, welche im Punkte $x = 0$ den Wert a hat, genügt für $|x| \leqq \vartheta$ der Ungleichung

$$|f(x)| < \Omega.$$

Vorbemerkung: Der Satz besagt also, daß alle jene $f(x)$ für $|x| \leqq \vartheta$ gleichmäßig beschränkt sind.

Beweis: In der Folge sind $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{11}$ Abkürzungen für positive Funktionen von α allein. Eo ipso ist nach Voraussetzung $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$.

Da $f(x)$ für $|x| \leqq 1$ regulär und $\neq 0$ ist, gibt es eine für $|x| \leqq 1$ reguläre Funktion $f_1(x)$ derart, daß für $|x| \leqq 1$

$$f(x) = e^{f_1(x)}$$

und

$$-\pi < \Im f_1(0) \leqq \pi$$

ist. $f_1(0)$ hängt wegen

$$f(0) = e^{f_1(0)}$$

nur von α ab. Weil ferner $f(x)$ für $|x| \leqq 1$ den Wert 1 ausläßt, ist dort

$$1 - f(x) = e^{f_2(x)},$$

wo $f_2(x)$ für $|x| \leqq 1$ regulär,

$$-\pi < \Im f_2(0) \leqq \pi$$

ist und $f_2(0)$, als ein Wert des $\log(1 - f(0))$, nur von α abhängt. Bei $f_1(x)$ rede ich im Sinne des Carathéodoryschen Hilfssatzes von $B_1(\varrho)$ und $M_1(\varrho)$, bei $f_2(x)$ von $M_2(\varrho)$ und setze

$$\text{Max.}\,(M_1(\varrho), M_2(\varrho)) = \mathfrak{M}(\varrho),$$

alles für $0 < \varrho \leqq 1$. Wegen

$$|f(x)| \leqq e^{|f_1(x)|}$$

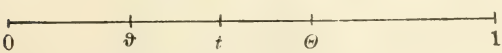
wird der Schottkysche Satz bewiesen sein, wenn es gelingt,

$$\mathfrak{M}(\vartheta) \leqq \Omega_1 = \Omega_1(\vartheta, \alpha)$$

darzutun.

Es sei $0 < \vartheta < 1$. Ich setze

$$t = \vartheta + \frac{1-\vartheta}{4}, \quad \Theta = \vartheta + \frac{1-\vartheta}{2} = \frac{1+\vartheta}{2}.$$



Nach der zweiten Ungleichung des obigen Zusatzes ist zunächst

$$M_1(\vartheta) \leqq \frac{2}{t-\vartheta}(B_1(t) + \psi_1) = \frac{8}{1-\vartheta}(B_1(t) + \psi_1).$$

Ich wähle x' auf $|x| = t$ so, daß

$$\Re f_1(x') = -B_1(t)$$

ist, und nehme zunächst an, daß $B_1(t) > 1$ sei. Dann ist

$$\left| e^{f_1(x')} \right| = e^{-B_1(t)} < \frac{1}{e} < \frac{1}{2};$$

aus

$$e^{f_2(x')} = 1 - e^{f_1(x')}$$

folgt also bei passender Wahl einer ganzen Zahl n

$$|f_2(x') - 2n\pi i| = \left| -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(e^{f_1(x')}\right)^m}{m} \right| \leqq \sum_{m=1}^{\infty} e^{-mB_1(t)}$$

$$= \frac{e^{-B_1(t)}}{1 - e^{-B_1(t)}} < 2e^{-B_1(t)} < 1.$$

Daher ist erstens

$$2|n|\pi < |f_2(x')| + 1 \leqq M_2(t) + 1;$$

zweitens, wenn eine für $|x| \leqq 1$ reguläre Funktion $\Phi(x)$ durch

$$f_2(x) - 2n\pi i = e^{\Phi(x)}, \quad -\pi < \Im\Phi(0) \leqq \pi$$

definiert wird ($f_2(x)$ ist ja nie ein Multiplum von $2\pi i$, da sonst $f(x)$ verschwinden würde) und $\mathsf{A}(\varrho)$, $\mathsf{B}(\varrho)$, $\mathsf{M}(\varrho)$ die übliche Bedeutung (des A, B, M) bei $\Phi(x)$ haben,

$$e^{-\mathsf{B}(t)} \leqq |f_2(x') - 2n\pi i| < 2e^{-B_1(t)},$$

$$B_1(t) < \log 2 + \mathsf{B}(t) < 1 + \mathsf{M}(t) \leqq 1 + \frac{2}{\Theta - t}(\mathsf{A}(\Theta) + 2|\Phi(0)|)$$

zufolge des Hilfssatzes. Hierin ist einerseits

$$\mathsf{A}(\Theta) = \log \operatorname*{Max.}_{|x|=\Theta} |f_2(x) - 2n\pi i| \leqq \log(M_2(\Theta) + 2|n|\pi)$$

$$< \log(2M_2(\Theta) + 1) \leqq \log\left(2M_2(\Theta) + \frac{M_2(\Theta)}{|f_2(0)|}\right) = \log M_2(\Theta) + \psi_2;$$

andererseits wegen

$$\Re\Phi(0) = \log|f_2(0) - 2n\pi i|$$

im Falle $n = 0$

$$|\Re\Phi(0)| = |\log|f_2(0)|| \leqq |\log|f_2(0)|| + \log\frac{M_2(\Theta)}{|f_2(0)|} < \log M_2(\Theta) + \psi_3,$$

im Falle $n \gtrless 0$ (da alsdann $|f_2(0) - 2n\pi i| \geqq \pi > 1$ ist)

$$0 < \Re\,\Phi(0) \leqq \log\left(|f_2(0)| + 2|n|\pi\right) \leqq \log\left(M_2(\Theta) + M_2(\Theta) + \frac{M_2(\Theta)}{|f_2(0)|}\right)$$
$$= \log M_2(\Theta) + \psi_2;$$

folglich jedenfalls ($n \gtreqless 0$)

$$|\Phi(0)| \leqq |\Re\,\Phi(0)| + \pi < \log M_2(\Theta) + \psi_4.$$

Daher ist

$$B_1(t) < \frac{1}{\Theta - t} + \frac{2}{\Theta - t}\left(3 \log M_2(\Theta) + \psi_2 + 2\psi_4\right)$$
$$= \frac{6}{\Theta - t}\left(\log M_2(\Theta) + \psi_5\right) \leqq \frac{24}{1 - \vartheta}\left(\log \mathfrak{M}(\Theta) + \psi_5\right).$$

Diese Abschätzung von $B_1(t)$ ist für $B_1(t) > 1$ bewiesen, aber für $B_1(t) \leqq 1$ gewiß wahr wegen

$$1 \leqq 1 + \log \frac{M_2(\Theta)}{|f_2(0)|} < \log M_2(\Theta) + \psi_6 \leqq \log \mathfrak{M}(\Theta) + \psi_6.$$

Jedenfalls ist daher

$$M_1(\vartheta) < \frac{8}{1 - \vartheta}\left(\frac{24}{1 - \vartheta}\left(\log \mathfrak{M}(\Theta) + \psi_7\right) + \frac{\psi_1}{1 - \vartheta}\right)$$
$$= \frac{192}{(1 - \vartheta)^2}\left(\log \mathfrak{M}(\Theta) + \psi_8\right).$$

Aus Symmetriegründen ist auch

$$M_2(\vartheta) < \frac{192}{(1 - \vartheta)^2}\left(\log \mathfrak{M}(\Theta) + \psi_9\right),$$

also

$$\mathfrak{M}(\vartheta) = \text{Max.}\left(M_1(\vartheta), M_2(\vartheta)\right) < \frac{192}{(1 - \vartheta)^2}\left(\log \mathfrak{M}(\Theta) + \psi_{10}\right).$$

Die Funktion von y

$$\frac{192\,(\log y + \psi_{10})}{\sqrt{y}}$$

ist für $y \geqq |f_1(0)|$ nach oben beschränkt; ihre obere Grenze ψ_1 (für $y \geqq |f_1(0)|$) hängt nur von α ab. Ich erhalte

$$\mathfrak{M}(\vartheta) < \frac{\psi_{11}\sqrt{\mathfrak{M}(\Theta)}}{(1 - \vartheta)^2}.$$

Die Funktion

$$N(\varrho) = \frac{(1 - \varrho)^2}{4\psi_{11}}\sqrt{\mathfrak{M}(\varrho)} \qquad (0 < \varrho < 1)$$

genügt daher wegen

$$\mathfrak{M}(\varrho) = \psi_{11}^2 \left(\frac{4 N(\varrho)}{(1-\varrho)^2} \right)^2$$

für $0 < \vartheta < 1$ der Ungleichung

$$\psi_{11}^2 \left(\frac{4 N(\vartheta)}{(1-\vartheta)^2} \right)^2 < \frac{\psi_{11}}{(1-\vartheta)^2} \psi_{11} \frac{4 N(\Theta)}{(1-\Theta)^2};$$

wegen $1 - \Theta = \dfrac{1-\vartheta}{2}$ ist daher

$$(N(\vartheta))^2 < N(\Theta),$$
$$N(\vartheta) < \sqrt{N(\Theta)}.$$

Wird also

$$\vartheta_1 = \frac{1+\vartheta}{2}, \quad \vartheta_2 = \frac{1+\vartheta_1}{2}, \quad \cdots, \quad \vartheta_n = \frac{1+\vartheta_{n-1}}{2}, \quad \cdots$$

gesetzt (alles Zahlen unter 1), so ist für jedes $n > 0$

$$N(\vartheta) < \sqrt{N(\vartheta_1)} < \sqrt[4]{N(\vartheta_2)} < \cdots < \sqrt[2^n]{N(\vartheta_n)} \leqq \sqrt[2^n]{\sqrt{\frac{\mathfrak{M}(\vartheta_n)}{\psi_{11}^2}}}$$
$$\leqq \sqrt[2^{n+1}]{\frac{\mathfrak{M}(1)}{\psi_{11}^2}},$$

folglich

$$N(\vartheta) \leqq \lim_{n=\infty} \sqrt[2^{n+1}]{\frac{\mathfrak{M}(1)}{\psi_{11}^2}} = 1,$$

$$\mathfrak{M}(\vartheta) \leqq \psi_{11}^2 \left(\frac{4}{(1-\vartheta)^2} \right)^2 = \frac{16 \psi_{11}^2}{(1-\vartheta)^4} = \Omega_1(\vartheta, \alpha),$$

q. e. d.

Korollar: *Es gibt für* $0 < \vartheta < 1$ *und komplexes* α *ein* $\Omega_2 = \Omega_2(\vartheta, \alpha)$, *so daß jedes in einem Kreise* $|x| < R$ *reguläre und die Werte* 0, 1 *auslassende* $f(x)$ *mit* $f(0) = \alpha$ *für* $|x| \leqq \vartheta R$ *der Ungleichung genügt*

$$|f(x)| < \Omega_2.$$

Beweis: Es werde

$$f\left(\frac{1+\vartheta}{2} R y\right) = g(y)$$

gesetzt. $g(y)$ ist für $|y| \leqq 1$ regulär, $\neq 0$ und $\neq 1$; ferner ist $g(0) = \alpha$. Nach dem Schottkyschen Satz ist also für $|y| \leqq \dfrac{2\vartheta}{1+\vartheta}$

$$|g(y)| < \Omega\left(\frac{2\vartheta}{1+\vartheta}, \alpha\right) = \Omega_2(\vartheta, \alpha),$$

also für $|x| \leqq \vartheta R$

$$|f(x)| < \Omega_2.$$

§ 25.

Der Landausche Satz und der Picardsche Satz.

Landauscher Satz.

Es gibt für komplexes α und komplexes $\beta \neq 0$ ein $\Omega_3 = \Omega_3(\alpha, \beta)$, so daß jede für $|x| < \Omega_3$ reguläre Funktion

$$f(x) = \alpha + \beta x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

(wo also $f(0) = \alpha$, $f'(0) = \beta$ ist) ebenda irgendwo 0 oder 1 ist.

Beweis: Es sei $\alpha \neq 0$ und $\alpha \neq 1$, da sonst jedes $\Omega_3 > 0$ das Gewünschte leistet. Wenn im Kreise $|x| < R$ die Funktion

$$f(x) = \alpha + \beta x + \cdots$$

von 0 und 1 verschieden ist, so ist nach dem vorangegangenen Korollar für $|x| \leqq \frac{R}{2}$

$$|f(x)| < \Omega_2(\tfrac{1}{2}, \alpha) = \Omega_4(\alpha);$$

daher ist

$$|\beta| < \frac{\Omega_4(\alpha)}{\frac{R}{2}},$$

$$R < \frac{2\,\Omega_4(\alpha)}{|\beta|} = \Omega_3(\alpha, \beta).$$

Zusatz: Insbesondere hat jede ganze rationale Funktion

$$f(x) = \alpha + \beta x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \qquad (\beta \neq 0)$$

im Kreise $|x| < \Omega_3(\alpha, \beta)$ mindestens eine Null- oder Einsstelle. Aus diesem — beim gegenwärtigen Stande der Wissenschaft nicht direkt beweisbaren — algebraischen Satz folgt aber leicht der allgemeine Landausche Satz. Denn, wenn eine für

$$|x| < \Omega_3(\alpha, \beta) + 1 = \Omega_5(\alpha, \beta)$$

konvergente Potenzreihe

$$f(x) = \alpha + \beta x + \cdots \text{ ad inf.}$$

vorliegt und man weiß, daß jeder Abschnitt

$$f_n(x) = \alpha + \beta x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

im Kreise $|x| < \Omega_3(\alpha, \beta)$ eine Null- oder Einsstelle hat, so verschwinden in diesem Kreise entweder unendlich viele $f_n(x)$ oder unendlich viele $f_n(x) - 1$. Ersterenfalls hat die Menge der in $|x| < \Omega_3$ gelegenen Wurzeln der $f_n(x)$ einen Häufungspunkt in $|x| \leqq \Omega_3 < \Omega_5$, welcher nach dem Hurwitzschen Satz Nullstelle von $f(x)$ ist; letzterenfalls findet man ebenso in $|x| \leqq \Omega_3 < \Omega_5$ eine Einsstelle von $f(x)$. Die Zahl Ω_5 genügt also den Bedingungen des Landauschen Satzes.

Picardscher Satz.

Jede nicht konstante ganze Funktion $f(x)$ ist irgendwo 0 oder 1.

Beweis: ξ sei so gewählt, daß $f'(\xi) \neq 0$ ist. Dann ist in der ganzen Ebene

$$f(x) = f(\xi + y) = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \cdots = g(y) \qquad (A_1 \neq 0).$$

Nach dem Landauschen Satz ist also $g(y) = 0$ oder 1 für ein y des Kreises $|y| < \Omega_3(A_0, A_1)$, also überhaupt irgendwo.

Zusatz: *Es sei $a \neq b$. Jede nicht konstante ganze Funktion $f(x)$ ist irgendwo a oder b.*

Beweis: $\dfrac{f(x) - a}{b - a}$ ist irgendwo 0 oder 1.

§ 26.

Der große Picardsche Satz.

Voraussetzung: *$f(x)$ sei für $0 < |x - x_0| < \varrho$ eindeutig-regulär, $\neq a$ und $\neq b$ (wo $a \neq b$ ist).*

Behauptung: *x_0 ist keine wesentlich singuläre Stelle (sondern regulär oder ein Pol).*

Vorbemerkungen: Mit anderen Worten: In jeder Nähe jeder isolierten wesentlich singulären Stelle läßt eine (in der Umgebung dieser Stelle eindeutige) Funktion höchstens einen Wert aus.

Dieser Satz enthält den (kleinen) Picardschen Satz, wie die Substitution $x - x_0 = \dfrac{1}{y}$ lehrt. Überhaupt ist der große Picardsche Satz völlig gleichwertig mit der Aussage: Jede für $|x| > \mathsf{P}$ eindeutig-reguläre Funktion, die für $x = \infty$ weder regulär ist noch dort einen Pol hat, läßt für $|x| > P$ höchstens einen Wert aus.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x_0 = 0$, $\varrho = 1$, $a = 0$, $b = 1$. (Denn sonst betrachte man

$$\frac{f(x_0 + \varrho y) - a}{b - a}.)$$

Es sei also $f(x)$ für $0 < |x| < 1$ eindeutig, regulär, $\neq 0$ und $\neq 1$. Ich nehme an, 0 sei doch eine wesentlich singuläre Stelle, und werde einen Widerspruch herleiten.

Ein nochmaliger Blick auf den Beweis des Schottkyschen Satzes lehrt, daß die dort mit $\psi_1, \ldots, \psi_{11}$ bezeichneten Funktionen von α so gewählt werden können, daß sie für $|\alpha - 2| < \frac{1}{2}$ unter einer absoluten Konstanten liegen. Für $\vartheta = \frac{1}{2}$ und $|\alpha - 2| < \frac{1}{2}$ kann also das Ω des Schottkyschen Satzes als absolute Konstante genommen werden.

Nach Weierstraß kann ich eine Punktfolge $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ so wählen, daß

$$e^{-4\pi} > |x_1| > |x_2| > \cdots > |x_n| > \ldots, \; x_n \to 0$$

und

$$|f(x_n) - 2| < \tfrac{1}{2}$$

ist.

Ich bestimme für jedes n die Zahl t_n durch

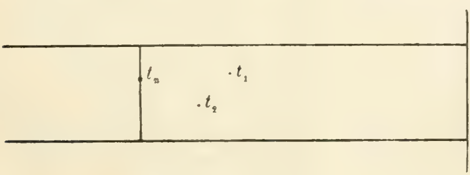
$$e^{t_n} = x_n, \; -\pi < \Im t_n \leqq \pi$$

und betrachte die für $\Re t < 0$ eindeutig-reguläre, von 0 und 1 verschiedene Funktion

$$f(x) = f(e^t) = g(t).$$

Sie hat die Periode $2\pi i$. Es ist

$$-4\pi > \Re t_1 > \Re t_2 > \cdots > \Re t_n > \cdots, \; \Re t_n \to -\infty.$$



Das Bild der im Streifen $-\pi \leqq \Im t \leqq \pi$ durch t_n gelegten Vertikalstrecke ist der Kreis $|x| = |x_n|$ der x-Ebene. Ich wende den Schottkyschen Satz auf die Funktion

$$g(t_n + 4\pi y) = h(y)$$

an; wegen

$$h(0) = g(t_n) = f(x_n)$$

ist

$$|h(0) - 2| < \tfrac{1}{2},$$

also, da $h(y)$ für $|y| \leqq 1$ weder 0 noch 1 ist, für $|y| \leqq \frac{1}{2}$

$$|h(y)| < \Omega.$$

Auf der Vertikalstrecke durch t_n, die dem Kreise $|t - t_n| \leqq 2\pi$ angehört, ist also

$$|g(t)| < \Omega;$$

daher ist für jedes n auf dem Kreise $|x| = |x_n|$

$$|f(x)| < \Omega.$$

Diese Ungleichung muß also auch in dem Ring zwischen zweien dieser Kreise gelten. Für $0 < |x| \leqq |x_1|$ ist also, da jedes derartige x einem Ringe $|x_{n+1}| \leqq |x| \leqq |x_n|$ angehört,

$$|f(x)| < \Omega,$$

im Gegensatz zu der Annahme, daß 0 eine wesentlich singuläre Stelle ist.

§ 27.

Der Koebesche Verzerrungssatz.

Satz 1.

Es gibt eine positive absolute Konstante q mit folgender Eigenschaft:

Jede Funktion

$$f(x) = x + a_2 x^2 + \cdots$$

(wo also $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ ist), die im Kreise $|x| \leqq 1$ regulär ist und dort keinen Wert mehr als einmal annimmt (woraus $f'(x) \neq 0$ für $|x| < 1$ folgt) genügt auf dem Rande $|x| = 1$ der Ungleichung

$$|f(x)| \geqq q.$$

Vorbemerkung: Da $\frac{f(x)}{x}$ für $|x| \leqq 1$ regulär und $\neq 0$ ist, ist somit für $|x| \leqq 1$

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \geqq q,$$

$$|f(x)| \geqq q\,|x|.$$

Beweise: 1) (Direkt): Für $|x| \leqq 1$ ist

$$y = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x} - a_2 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

auch schlicht (d. h. bildet die Fläche des Einheitskreises auf das Äußere einer, übrigens den Nullpunkt umschließenden Kurve ab). Auch

$$z = y + a_2 = \frac{1}{x} + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

ist für $|x| \leqq 1$ schlicht (ohne daß das Bild der Peripherie den Punkt 0 im Innern zu haben braucht). Nun ist

$$\frac{1}{\underset{|x|=1}{\mathrm{Min.}}\ |f(x)|} = \underset{|x|=1}{\mathrm{Max.}}\ |y(x)| \leqq \underset{\substack{|x_1|=1\\|x_2|=1}}{\mathrm{Max.}}\ |y(x_1) - y(x_2)|$$

$$= \underset{\substack{|x_1|=1\\|x_2|=1}}{\mathrm{Max.}}\ |z(x_1) - z(x_2)| \leqq 2 \underset{|x|=1}{\mathrm{Max.}}\ |z|.$$

Andererseits ist $\frac{z}{x} - \frac{1}{x^2}$ für $|x| \leqq 1$ regulär, also

$$\underset{|x|=\frac{1}{2}}{\mathrm{Max.}} \left|\frac{z}{x} - \frac{1}{x^2}\right| \leqq \underset{|x|=1}{\mathrm{Max.}} \left|\frac{z}{x} - \frac{1}{x^2}\right|,$$

$$2 \underset{|x|=\frac{1}{2}}{\mathrm{Max.}} |z| - 4 \leqq \underset{|x|=1}{\mathrm{Max.}}\ |z| + 1;$$

da nun das Bild von $|x| = 1$ in der z-Ebene im Innern des Bildes von $|x| = \frac{1}{2}$ liegt, ist

$$\underset{|x|=1}{\mathrm{Max.}}\ |z| < \underset{|x|=\frac{1}{2}}{\mathrm{Max.}}\ |z|,$$

$$2 \underset{|x|=1}{\mathrm{Max.}} |z| - 4 < \underset{|x|=1}{\mathrm{Max.}}\ |z| + 1,$$

$$\underset{|x|=1}{\mathrm{Max.}}\ |z| < 5,$$

$$\underset{|x|=1}{\mathrm{Min.}}\ |f(x)| > \frac{1}{10},$$

q. e. d.

2) (Als Anwendung meines Satzes aus dem Picardschen Ideenkreise): Es sei für ein bestimmtes $f(x)$, das die Voraussetzung erfüllt,

$$\underset{|x|=1}{\text{Min.}} |f(x)| = \varrho;$$

eo ipso ist $\varrho > 0$. Dann ist in einem Punkte x_1 auf dem Einheitskreise

$$f(x_1) = \gamma, \quad |\gamma| = \varrho;$$

ferner ist $-\gamma + f(x)$ für $|x| < 1$ nirgends 0; für $|x| < 1$ ist daher

$$-\gamma + f(x) = -\gamma + x + a_2 x^2 + \cdots = -\gamma\left(1 - \frac{x}{\gamma} + \cdots\right)$$

$$= -\gamma e^{-\frac{x}{\gamma} + c_2 x^2 + \cdots}.$$

Die für $|x| < 1$ reguläre Funktion

$$g(x) = -\frac{x}{\gamma} + c_2 x^2 + \cdots$$

ist dort nie $2\pi i$ und nie $4\pi i$; denn in einem (eo ipso von 0 verschiedenen) solchen Punkte würde

$$-\gamma + f(x) = -\gamma,$$
$$f(x) = 0$$

sein. Die Funktion

$$g(-\gamma y) = y + d_2 y^2 + \cdots$$

ist also für $|y| < \frac{1}{\varrho}$ regulär, aber weder $2\pi i$ noch $4\pi i$. Nach dem Landauschen Satz ist daher

$$\frac{1}{\varrho} \leqq \frac{1}{q},$$

wo q eine absolute Konstante ist, d. h.

$$\varrho \geqq q,$$

q. e. d.

Satz 2.

Es gibt ein nur von ϑ, wo $0 < \vartheta < 1$ ist, abhängiges positives $\Omega_1 = \Omega_1(\vartheta)$, so daß jede für $|x| < 1$ reguläre und schlichte Funktion

$$f(x) = x + a_2 x^2 + \cdots$$

im Kreise $|x| \leqq \vartheta$ *der Ungleichung*

$$|f(x)| \leqq \Omega_1(\vartheta)$$

genügt.

Beweis: Die Funktion

$$f_1(x) = \frac{2}{1+\vartheta} f\left(\frac{1+\vartheta}{2} x\right) = x + \cdots$$

ist für $|x| \leqq 1$ regulär und schlicht. Daher ist nach Satz 1 für $|x| \leqq 1$

$$\left|\frac{f_1(x)}{x}\right| \geqq q.$$

Nun ist für $|x| \leqq 1$

$$\frac{f_1(x)}{x} = e^{b_1 x + b_2 x^2 + \cdots} = e^{f_2(x)}.$$

Wegen $\Re f_2(x) \geqq \log q$ auf $|x| = 1$ ist also nach Carathéodorys Ungleichung für $|x| \leqq \dfrac{2\vartheta}{1+\vartheta}$

$$|f_2(x)| \leqq \frac{2}{1 - \dfrac{2\vartheta}{1+\vartheta}} \left(\log \frac{1}{q} + 2\,|f_2(0)|\right) = \frac{2(1+\vartheta)}{1-\vartheta} \log \frac{1}{q} = \Omega_2(\vartheta),$$

$$|f_1(x)| \leqq |x|\, e^{|f_2(x)|} \leqq e^{\Omega_2(\vartheta)} = \Omega_1(\vartheta),$$

d. h. für $|x| \leqq \vartheta$

$$|f(x)| \leqq \frac{1+\vartheta}{2} \Omega_1(\vartheta) \leqq \Omega_1(\vartheta).$$

Satz 3.

Es gibt zu ϑ $(0 < \vartheta < 1)$ *je ein positives* $\Omega_3(\vartheta)$ *und* $\Omega_4(\vartheta)$, *so daß jede für* $|x| < 1$ *reguläre und schlichte Funktion*

$$f(x) = x + a_2 x^2 + \cdots$$

im Kreise $|x| \leqq \vartheta$ *die Ungleichungen*

$$\frac{1}{\Omega_3(\vartheta)} \leqq |f'(x)| \leqq \Omega_4(\vartheta)$$

erfüllt.

Beweis: 1) Für $|x| \leqq \dfrac{1+\vartheta}{2}$ ist

$$|f(x)| \leqq \Omega_1\left(\frac{1+\vartheta}{2}\right) = \Omega_5(\vartheta),$$

also für $|x| \leqq \vartheta$

$$|f'(x)| \leqq \frac{\Omega_5(\vartheta)}{\frac{1+\vartheta}{2} - \vartheta} = \Omega_4(\vartheta).$$

2) $f'(x)$ verschwindet nicht für $|x| < 1$; ebenda ist also

$$f'(x) = 1 + \cdots = e^{c_1 x + c_2 x^2 + \cdots} = e^{f_3(x)}.$$

Für $|x| \leqq \frac{1+\vartheta}{2}$ ist

$$\Re f_3(x) \leqq \log \Omega_4\left(\frac{1+\vartheta}{2}\right) < \Omega_6(\vartheta),$$

also nach Carathéodorys Ungleichung für $|x| \leqq \vartheta$

$$|f_3(x)| < \frac{2}{\frac{1+\vartheta}{2} - \vartheta}\,\Omega_6(\vartheta) = \Omega_7(\vartheta),$$

$$|f'(x)| = e^{\Re f_3(x)} \geqq e^{-\Omega_7(\vartheta)} = \frac{1}{\Omega_3(\vartheta)}.$$

Koebes Verzerrungssatz.

Es gibt zu ϑ $(0 < \vartheta < 1)$ je ein positives $\Omega_8(\vartheta)$ und $\Omega_9(\vartheta)$, so daß bei jeder für $|x| < R$ regulären und schlichten Funktion

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

wenn x_1 und x_2 zwei Punkte des Kreises $|x| \leqq \vartheta R$ sind, die Ungleichungen

$$\frac{1}{\Omega_8(\vartheta)} \leqq \left|\frac{f'(x_1)}{f'(x_2)}\right| \leqq \Omega_9(\vartheta)$$

gelten.

Beweis: Eo ipso ist $a_1 = f'(0) \neq 0$. Die Funktion

$$f_4(x) = \frac{f(Rx) - a_0}{R a_1} = x + \cdots$$

ist für $|x| < 1$ regulär und schlicht. Nach Satz 3 ist also für $|x| \leqq \vartheta$

$$\frac{1}{\Omega_3(\vartheta)} \leqq |f_4'(x)| = \frac{|f'(Rx)|}{|a_1|} \leqq \Omega_4(\vartheta);$$

für $|x_1| \leqq \vartheta R$, $|x_2| \leqq \vartheta R$ ist daher

$$\frac{1}{\Omega_3(\vartheta)} \leqq \frac{|f'(x_1)|}{|a_1|} \leqq \Omega_4(\vartheta),$$

$$\frac{1}{\Omega_3(\vartheta)} \leqq \frac{|f'(x_2)|}{|a_1|} \leqq \Omega_4(\vartheta),$$

also

$$\frac{1}{\Omega_3(\vartheta)\,\Omega_4(\vartheta)} \leqq \left|\frac{f'(x_1)}{f'(x_2)}\right| \leqq \Omega_3(\vartheta)\,\Omega_4(\vartheta).$$

Literaturverzeichnis.

Blumenthal, O.

Über ganze transzendente Funktionen. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 16, S. 97—109; 1907.

Bohr, H.

A Theorem concerning Power Series. Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, Bd. 13, S. 1—5; 1914.

Borel, É.

Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Picard sur les fonctions entières. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, Bd. 122, S. 1045—1048; 1896.

Cesàro, E.

Sur la multiplication des séries. Bulletin des Sciences mathématiques, Ser. 2, Bd. 14, Teil 1, S. 114—120; 1890.

Dienes, P.

Essai sur les singularités des fonctions analytiques. Journal de Mathématiques pures et appliquées, Ser. 6, Bd. 5, S. 327—413; 1909.

Faber, G.

Über das Anwachsen analytischer Funktionen. Mathematische Annalen, Bd. 63, S. 549—551; 1907.

Fatou, P.

Séries trigonométriques et séries de Taylor. Acta Mathematica, Bd. 30, S. 335—400; 1906.

Fejér, L.

1. *Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze.* Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1910, No. 3, 17 S.
2. *La convergence sur son cercle de convergence d'une série de puissance effectuant une représentation conforme du cercle sur le plan simple.* Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, Bd. 156, S. 46—49; 1913.

3. *Über gewisse durch die Fouriersche und Laplacesche Reihe definierten Mittelkurven und Mittelflächen.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 38, S. 79—97; 1914.

4. *Über die Konvergenz der Potenzreihe an der Konvergenzgrenze in Fällen der konformen Abbildung auf die schlichte Ebene.* Mathematische Abhandlungen, Hermann Amandus Schwarz zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 6. August 1914 gewidmet von Freunden und Schülern, S. 42—53; Berlin (Springer), 1914.

Fekete, M.

Sur les séries de Dirichlet. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, Bd. 150, S. 1033—1036; 1910.

Hadamard, J.

1. *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor.* Journal de Mathématiques pures et appliquées, Ser. 4, Bd. 8, S. 101—186; 1892.
2. *Sur les fonctions entières.* Bulletin de la Société mathématique de France, Bd. 24, S. 186-187; 1896.
3. *Notice sur les travaux scientifiques de M. Jacques Hadamard,* Teil 2. 91 S.; Paris (Hermann), 1912.

Hardy, G. H.

1. *A theorem concerning Taylor's series.* The quarterly Journal of pure and applied Mathematics, Bd. 44, S. 147—160; 1913.
2. *The Mean Value of the Modulus of an Analytic Function.* Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, Bd. 14, S. 269—277; 1915.

Hardy, G. H. und **Littlewood,** J. E.

1. *Contributions to the Arithmetic Theory of Series.* Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, Bd. 11, S. 411—478; 1913.
2. *Some theorems concerning Dirichlet's series.* The Messenger of Mathematics, Ser. 2, Bd. 43, S. 134—147; 1914.
3. *Tauberian Theorems concerning Power Series and Dirichlet's Series whose Coefficients are Positive.* Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, Bd. 13, S. 174—191; 1914.

Hartogs, F.

Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten. Mathematische Annalen, Bd. 62, S. 1—88; 1906.

Hölder, O.

Grenzwerthe von Reihen an der Convergenzgrenze. Mathematische Annalen, Bd. 20, S. 535—549; 1882.

Hurwitz, A.

Ueber die Nullstellen der Bessel'schen Function. Mathematische Annalen, Bd. 33, S. 246—266; 1889.

Hurwitz, A. und **Pólya,** G.

Zwei Beweise eines von Herrn Fatou vermuteten Satzes. Acta Mathematica, Bd. 40, S. 179—183; 1916.

Jensen, J. L. W. V.

Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. Acta Mathematica, Bd. 30, S. 175—193; 1906.

Jentzsch, R.

Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Funktionen. Inauguraldissertation, 39 S.; Berlin, 1914.

Kakeya, S.

On the Limits of the Roots of an Algebraic Equation with Positive Coefficients. The Tôhoku Mathematical Journal, Bd. 2, S. 140—142; 1912.

Knopp, K.

Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze. Inauguraldissertation, 50 S.; Berlin, 1907.

Koebe, P.

1. *Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven.* Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1907, S. 191—210.
2. *Ueber die Uniformisierung der algebraischen Kurven durch automorphe Funktionen mit imaginärer Substitutionsgruppe.* Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1909, S. 68—76.
3. *Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven.* II. Mathematische Annalen, Bd. 69, S. 1—81; 1910.
4. *Über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche.* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 19, S. 339—348; 1910.

Landau, E.

1. *Über eine Verallgemeinerung des Picardschen Satzes.* Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, Jahrgang 1904, S. 1118—1133.
2. *Über einen Satz von Tschebyschef.* Mathematische Annalen, Bd. 61, S. 527—550; 1905.
3. *Über die Konvergenz einiger Klassen von unendlichen Reihen am Rande des Konvergenzgebietes.* Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 18, S. 8—28; 1907.
4. *Abschätzung der Koeffizientensumme einer Potenzreihe.* Archiv der Mathematik und Physik, Ser. 3, Bd. 21, S. 42—50 und S. 250—255; Bd. 24, S. 250—260; 1913 und 1916.

Lindelöf, E.

Sur le théorème de M. Picard dans la théorie des fonctions monogènes. Compte rendu du congrès des mathématiciens tenu à Stockholm 22—25 septembre 1909, S. 112—136; Leipzig und Berlin (Teubner), 1910.

Littlewood, J. E.

The Converse of Abel's Theorem on Power Series. Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, Bd. 9, S. 434—448; 1911.

Lukács, F.

Eine Eigenschaft des Konvergenzkreises der Potenzreihen. Archiv der Mathematik und Physik, Ser. 3, Bd. 23, S. 34—35; 1915.

Lusin, N.

Über eine Potenzreihe. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 32, S. 386—390; 1911.

Mittag-Leffler, G.

Über die analytische Darstellung eines eindeutigen Zweiges einer monogenen Funktion. Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1915, S. 109—164.

Picard, É.

1. *Sur une propriété des fonctions entières.* Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, Bd. 88, S. 1024—1027; 1879.
2. *Sur les fonctions analytiques uniformes dans le voisinage d'un point singulier essentiel.* Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, Bd. 89, S. 745—747; 1879.

Plemelj, J.

Die Grenzkreis-Uniformisierung analytischer Gebilde. Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 23, S. 297—304; 1912.

Pringsheim, A.

1. *Ueber Functionen, welche in gewissen Punkten endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung, aber keine Taylor'sche Reihenentwickelung besitzen.* Mathematische Annalen, Bd. 44, S. 41—56; 1894.
2. *Über einige funktionentheoretische Anwendungen der Eulerschen Reihen-Transformation.* Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1912, S. 11—92.

Riesz, M.

1. *Sur un problème d'Abel.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 30, S. 339—345; 1910.
2. *Über einen Satz des Herrn Fatou.* Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 140, S. 89—99; 1911.

Schnee, W.

Die Identität des Cesàroschen und Hölderschen Grenzwertes. Mathematische Annalen, Bd. 67, S. 110—125; 1909.

Schottky, F.

Über den Picard'schen Satz und die Borel'schen Ungleichungen. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, Jahrgang 1904, S. 1244—1262.

Schur, I.

Über die Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte. Mathematische Annalen, Bd. 74, S. 447—458; 1913.

Sierpiński, W.

O szeregu potęgowym, który na swem kole zbieżności jest zbieżnym w jednym tylko punkcie (Sur une série de puissances qui converge sur son cercle de convergence dans un point seulement). Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Bd. 5, Teil 3, S. 153—157; 1912.

Steffensen, J. F.

Über Potenzreihen, im besonderen solche, deren Koeffizienten zahlentheoretische Funktionen sind. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 38, S. 376—386; 1914.

Tauber, A.

Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen. Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 8, S. 273—277; 1897.

Vivanti, G.

1. *Sulle serie di potenze.* Rivista di Matematica, Bd. 3, S. 111—114; 1893.
2. *Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen.* Umarbeitung unter Mitwirkung des Verfassers deutsch herausgegeben von A. Gutzmer; Leipzig (Teubner), 1906.

Inhalt.

Seite

Fünftes Kapitel.

Beziehungen der Koeffizienten einer Potenzreihe zu Singularitäten der Funktion auf dem Rande.

Sechstes Kapitel.

Maximum und Mittelwert des absoluten Betrages einer analytischen Funktion auf Kreisen.

Siebentes Kapitel.

Der Picardsche Ideenkreis.